

**ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА**  
**на диссертационную работу Ботороевой Марии Николаевны**  
**«Моделирование развивающихся систем на основе интегральных**  
**уравнений Вольтерра», представленную на соискание ученой степени**  
**кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 –**  
**«Математическое моделирование, численные методы и комплексы**  
**программ»**

**Актуальность избранной темы работы.** Общеизвестна роль интегральных уравнений типа Вольтерра для моделирования динамических процессов самой разной природы в физике, механике, экономике, экологии, медицине, биологии и т.д. В 1977 году В.М. Глушковым была предложена двухсекторная макроэкономическая модель, в которой важную роль играют операторы Вольтерра с переменными как верхним, так и нижним пределами интегрирования. При этом (неубывающая) функция в нижнем пределе интегрирования определяет динамику отмирания (замены) элементов развивающейся системы. Это направление затем интенсивно развивалось В.М. Глушковым и его коллегами – В.В. Ивановым, В.М. Яненко, Ю.П. Яценко и др. Развитию теории и численных методов решения уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования посвящены работы А.С. Апарцина и его коллег.

Диссертационная работа Ботороевой М.Н. посвящена математическому моделированию развивающихся систем на основе взаимосвязанных интегральных уравнений Вольтерра как I, так и II рода с переменными пределами интегрирования и алгебраических уравнений. Такая система, представленная в виде интегрального уравнения с тождественно вырожденной матрицей в главной части, называется интегро-алгебраическим уравнением (ИАУ) с переменными пределами интегрирования. Возможность интерпретировать модель развивающейся системы практически в любой предметной области, отсутствие исследований и методов численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования обуславливают актуальность темы диссертационного исследования.

**Новизна научных результатов.** Результаты, выносимые на защиту, являются новыми, поскольку работ, посвященных качественному исследованию ИАУ с переменными пределами интегрирования, а также их численному решению, практически нет (за исключением частного случая неклассических интегральных уравнений Вольтерра I рода).

**Обоснованность и достоверность основных положений и выводов.**

Получены условия существования единственного непрерывного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования для частного случая, сформулированные в виде теорем. Доказательства соответствуют современному уровню математической строгости. Обоснована  $L$ -устойчивость численных методов решения интегральных уравнений Вольтерра II рода и построена их область устойчивости. Достоверность полученных результатов продемонстрирована на большом количестве модельных примеров, а также на расчетах с реальными данными.

**Структура и содержание диссертации.** Диссертация изложена на 139 страницах, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 90 наименований.

Во **введении** автор обосновывает актуальность и формулирует цель выбранной темы, приводит библиографический обзор по теме исследования и методологическую основу. Также во введении дано краткое описание содержания диссертации и перечень конференций и семинаров, на которых докладывались выносимые на защиту научные результаты.

В **первой** главе приведены известные сведения из теории матричных пучков. Показано место ИАУ с переменными пределами интегрирования в классификации систем интегральных уравнений Вольтерра. Приводится двухсекторная модель развивающейся системы типа В.М. Глушкова, представленная в виде линейного ИАУ с переменными пределами интегрирования. Основными результатами данной главы являются исследование существования единственного непрерывного решения ИАУ с

переменными пределами интегрирования и построение многошаговых методов их решения. Алгоритмы второго, третьего и четвертого порядков точности реализованы в виде комплекса программ. Приведены расчеты тестовых примеров.

Во **второй** главе рассмотрена модель колебаний озона в атмосфере, описанная с помощью системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра II рода. Описаны особенности численного решения таких систем, предложены безытерационные  $L$ -устойчивые численные методы, построена область их устойчивости и приведены численные расчеты на тестовых примерах.

**Третья** глава несет прикладной характер. Результаты первой главы применяются в области электроэнергетики. Проведен анализ на предмет существования решения задачи определения стратегии ввода новых генерирующих мощностей электроэнергетической системы, состоящей из шести типов электростанций. Приведено описание модели развития ЭЭС России, учитывающей динамику замены устаревшего оборудования, с помощью интегрального уравнения Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования. Реализован алгоритм второго порядка точности численного решения этого уравнения. С его помощью на реальных данных получен прогноз стратегии вводов генерирующих мощностей ЭЭС России для достижения уровня роста располагаемой мощности в 1% и 2%. Сравнение полученных результатов с аналогичными результатами других исследователей и с реальными данными вводов генерирующих мощностей подтверждает адекватность модели и расчетов.

**Заключение** содержит выводы по диссертационной работе.

По диссертации имеются следующие **замечания**:

1. В первой главе при описании методов Адамса следовало бы указать, устойчивы ли они к возмущениям входных данных.

2. В первой главе были разработаны многошаговые методы численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования. В третьей главе применяется одношаговый метод для численного решения неклассического ИУВ I рода (3.5). Следовало бы прежде провести расчеты тестовых примеров уравнений вида (3.5).

3. Диссертация содержит некоторое количество опечаток, которые, впрочем, не искажают сути написанного.

Сделанные замечания не снижают ценности полученных результатов и не влияют на положительную оценку диссертации в целом.

Основные результаты опубликованы в 10 работах, среди которых 3 входят в список журналов, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ для опубликования результатов диссертаций. Имеется два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Диссертация удовлетворяет паспорту специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а именно пунктам областей исследования: 2 «развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей»; 3 «разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»; 4 «реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Автореферат полностью отражает содержание диссертации. Подводя итог, полагаю, что диссертация **соответствует** требованиям постановления правительства РФ от 24.09.2013 № 842 (ред. от 01.10.2018) «О порядке присуждения ученых степеней», включая оценку соответствия п. 9. Она представляет собой законченную научно-квалификационную работу, вносящую заметный вклад в область качественного исследования и

численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования и в область математического моделирования развивающихся систем.

Считаю, что диссертационная работа Ботороевой Марии Николаевны удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент:  
старший научный сотрудник  
отдела прикладной математики  
ФБГУН Институт систем энергетики  
им. Л.А. Мелентьева СО РАН,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент

Е.В. Маркова

27 ноября 2018 г.

Маркова Евгения Владимировна  
664033, г. Иркутск, ИСЭМ СО РАН,  
ул. Лермонтова, 130  
(3952)500-646, доп. 260  
markova@isem.irk.ru

