А.В. Середа
Россия, Улан-Удэ, Бурятский государственный университет

Преобразование геометрических условий в аналитические при решении планиметрических задач

В геометрических задачах нередко часть условий представлена либо косвенным образом, либо в виде словесного описания особенностей заданной конфигурации. Статья посвящена рассмотрению приемов перевода таких условий на аналитический язык.

A.V. Sereda

Transformation of geometrical conditions in analytical ones at the decision of planymetrical tasks

It is quite often in geometrical tasks that part of conditions is represented or by an indirect image, or as the verbal description of features of the given configuration. This article is devoted to consideration of receptions of translation of these conditions on analytical language.

Считается, что задача сформулирована корректно, если в ней нет "лишних" условий (т.е. условий, которые можно не использовать для решения задачи), а те условия, которые даны, достаточны для ее решения. Поэтому при решении любой корректно поставленной задачи нужно использовать все ее условия. Игнорирование (или неправильное понимание) того или иного условия обычно является основной причиной затруднений в решении задачи.

В геометрических задачах нередко часть условий задана либо косвенным образом, либо в виде словесного описания особенностей заданной геометрической конфигурации. В последнем случае очень важно перевести эти условия на аналитический язык. Часто именно этот этап решения является ключевым, так как позволяет выяснить характерные особенности заданной конфигурации [1]. Проиллюстрируем эти соображения двумя примерами, взятыми из практики вступительных экзаменов на механико-математическом и экономическом факультетах Новосибирского государственного университета.

Пример 1. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 9$. На стороне AC выбрана точка M так, что окружности, вписанные в треугольники ABM и BMC, касаются друг друга. Найти, в каком отношении отрезок BM делит площадь треугольника ABC.

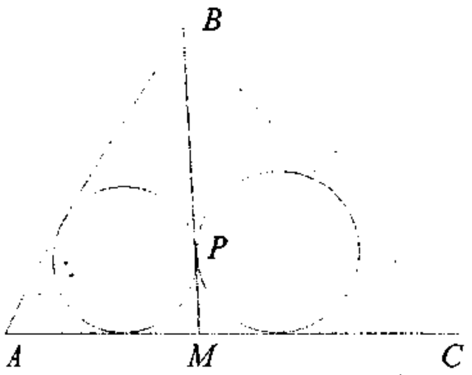

Рис. 1

Решение. Для решения задачи достаточно знать, в каком отношении точка M делит сторону AC. Обозначим через P точку касания окружностей, вписанных в треугольники ABM и BMC. Очевидно, что $P \in BM$.

Переведём на аналитический язык условие касания окружностей. Введём обозначения: $AM = x$, $BM = l$.

Используя свойство окружности, вписанной в треугольник, для треугольника ABM находим, что

$BP = \frac{1}{2}(AB + BM + AN) - AM = \frac{1}{2}(7 + l + x) - x = \frac{7 + l - x}{2}$, а из треугольника BMC определяем ещё одно соотношение для этой же величины:

$$BP=\frac{1}{2}(BC+MC+BM)-MC=\frac{1}{2}(8+9-x+l)-(9-x)=\frac{l+x-1}{2}.$$

Таким образом, получаем равенство $\frac{7+l-x}{2}=\frac{l+x-1}{2}$, которое является аналитическим эквивалентом условия касания окружностей, вписанных в треугольники ABM и BMC. Отсюда находим, что $x=4$. Следовательно, $AM=4$, $MC=5$ и $\frac{S_{ABM}}{S_{BMC}}=\frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{S_{ABM}}{S_{BMC}}=\frac{4}{5}$.

Пример 2. В трапеции $ABCD$ основание AB равно 2, угол A равен 60°, а угол B равен 30°. Известно, что биссектрисы углов A и D трапеции и высота CM, опущенная из вершины C на основание AB, пересекаются в одной точке. Найти площадь трапеции.

Решение. Произвольная трапеция определяется четырьмя параметрами. В данном случае явно заданы три, а четвёртый "скрыт" в условии пересечения биссектрис углов A и D на высоте CM трапеции. Чтобы решить задачу, этому условию надо придать аналитический вид.

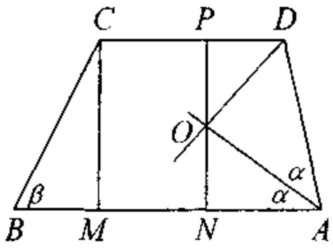

Рис. 2

Рассмотрим сначала произвольную трапецию $ABCD$ (рис. 2). Обозначим: $CM=h$, $BM=x$, O – точка пересечения биссектрис углов A и D. Опустим из этой точки перпендикуляры OP и ON на основания трапеции. Так как точка O равноудалена от сторон CD, AD и AB, то $OP=ON=\frac{h}{2}$. Из треугольника BCM определяется, что $h=x\cdot tg\beta$, а из треугольника AON находим, что $AN=\frac{h}{2\cdot tg\alpha}=\frac{x\cdot tg\beta}{2\cdot tg\alpha}$. Условие принадлежности точки O высоте CM означает, что точки M и N совпадают и $BM+AN=AB$. Таким образом, аналитическим выражением условия пересечения биссектрис углов A и D на высоте CM является (в наших обозначениях) равенство $x+x\frac{tg\beta}{2\cdot tg\alpha}=AB$.

Применив полученное равенство к условиям нашей задачи ($AB=2$, $\alpha=\beta$, конкретное значение величин углов на данном этапе решения значения не имеет), получаем соотношение $\frac{3}{2}x=2$ или $x=\frac{4}{3}$.

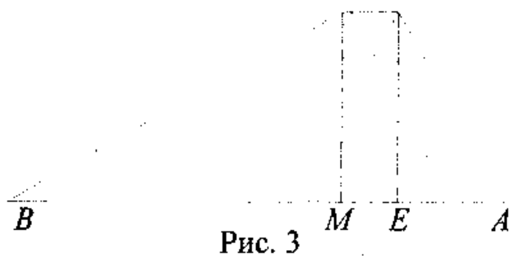

Рис. 3

Опустим из вершины D высоту DE на основание AB. Дальнейшее очевидно:

$$h=\frac{4}{3}\cdot tg30^\circ=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sqrt{3}},$$

$$AE=h\cdot ctg60^\circ=\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{9},$$

$$CD=ME=2-BM-AE=2-\frac{4}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}.$$

Таким образом, $S = \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{9}) \cdot \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{81}$

Ответ: $S = \frac{40\sqrt{3}}{81}$.

Литература

1. Середа А.В. О методах решения геометрических задач // Математика и методы ее преподавания: Сб. ст. – Улан-Удэ: изд-во БГУ, 2000. С. 157-165.

Р.И. Сунгатуллина

Россия, Республика Татарстан, Казань,

Институт развития образования Республики Татарстан

Готовность учителя математики к деятельности по развитию математических способностей учащихся общеобразовательной школы

В статье рассматривается проблема готовности учителя к деятельности по развитию математических способностей учащихся в контексте ее формирования в условиях системы повышения квалификации, определяются задачи курсовой подготовки, в рамках которой учитель творчески реализует свой потенциал и решает проблемы профессионального развития. Анализируются основные направления и факторы, влияющие на состояние готовности учителя к деятельности по развитию способностей учащихся и предлагается структуризация системы элементов готовности.

R.I. Sungatullina

Readiness of the teacher for activity on development of mathematical abilities of pupils as a pedagogical phenomenon and features of its formation in qualification improvement system of professional skills

In article given the problem of readiness of the teacher for activity on development of mathematical abilities of pupils in a context of its formation in conditions of in qualification improvement system of professional skills is considered, the tasks of course preparation within the limits of which the teacher creatively realizes the potential and solves problems of professional development are defined. The basic directions and the factors influencing on the condition of readiness of the teacher for activity on development of pupils' abilities are analyzed and the structurization of system of readiness elements is offered.

В современных условиях модернизации школьного математического образования особое значение приобретает творческая, продуктивная деятельность учителя математики, ориентированная на интеллектуальное развитие учащихся и, прежде всего, их математическое мышление.

Анализ существующей практики развития способностей учеников на уроках математики, опыт работы с учителями математики в системе повышения квалификации показывает, что большинство работающих педагогов не готово к осуществлению целенаправленной и эффективной деятельности по развитию математических способностей учащихся. Не случайно учителя математики испытывают существенные затруднения при определении целей и задач развития способностей конкретного ребенка, в формировании интереса к предмету, в построении перспективы личностного роста в