Я.А.Барлукова, М.Н.Очиров
Россия, Улан-Удэ, Бурятский государственный университет

Педагогический аспект математического моделирования экономических процессов

В статье дано математическое описание экономических задач, иллюстрирующих педагогическую модель развития профессиональной компетентности будущих экономистов.

Ja.A. Barlukova, M.N. Ochirov

Pedagogical aspect of mathematical modeling of economic processes

The mathematical description of economic problems illustrating the pedagogical model of development of professional competence of future economists is given in the article.

Экономические процессы протекают во времени с определенной интенсивностью. Поэтому их описание требует использования дифференциального и интегрального исчисления.

Любая отрасль представляет собой совокупность производственных единиц, которая характеризуется мощностью – максимально возможным выпуском продукта в единицу времени – и используемой технологией. А технология задается нормами затрат продуктов и ресурсов на единицу выпускаемой продукции. Будем считать, что одна технология отличается от другой лишь одним параметром – нормой затрат живого труда на единицу продукта λ. Тогда технологическая структура отрасли задается функцией распределения мощностей по технологиям $m(t,\lambda)$. Зависимость от времени указывает, что мощность каждой производственной единицы меняется со временем.

Функция $m(t,\lambda) > 0$ предполагается непрерывной по аргументу λ на интервале (ν,∞). Тогда мощность отрасли равна

$$M(t) = \int_{\nu}^{\infty} m(t,\lambda)d\lambda$$

и число рабочих мест равно

$$R^*(t) = \int_{\nu}^{\infty} \lambda m(t,\lambda)d\lambda .$$

Параметр ν задает характеристику наилучшей технологии в отрасли и может уменьшаться со временем.

Положим, $m(t,\lambda) = M(t)\cdot h(t,\lambda)$

Пусть в момент времени t отрасль располагает количеством $R(t)$ трудовых ресурсов.

Максимально возможный выпуск продукта будет

$$Y(t) = M(t)\int_{\nu}^{\xi} h(t,\lambda)d\lambda ,$$

где ξ находится из уравнения

$$R(t) = M(t)\int_{\nu}^{\xi} \lambda h(t,\lambda)d\lambda .$$

Из этих двух выражений можно найти функцию $M(t)\cdot f(t,x)$ на интервале $0 \le x \le x^*$. Функция $f(t,x)$ обладает свойствами:

$$f(t,0)=0\ ,\qquad f(t,x^*)=1\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\xi}\ ,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0 \qquad \text{при } 0\le x\le x^*.$$

Функция $f(t,x)$ называется производственной функцией. Она выражает максимальные производственные возможности отрасли.

Если цена p и ставка зарплаты S, то можно показать, что $\xi=\frac{p}{S}$.

Ниже мы приведем примеры математических моделей, в которых производственная функция будет характеризовать производственные возможности конкретных экономических процессов.

В настоящее время перед системой образования стоит проблема его фундаментализации, которая достигается интеграцией учебных дисциплин. В экономическом образовании курс математики рассматривается как основа интеграции обучения. Современная экономика широко использует математические методы как в решении практических задач, так и в теоретических исследованиях. Благодаря интеграции на основе математики возможно добиться повышения уровня экономического образования, придавая ему личностно- ориентированный смысл.

В интеграции обучения будущих экономистов возможны два пути: первый – преподаватели математики осуществляют обогащение содержания экономическим компонентом, второй – преподаватели специальных дисциплин широко используют математические методы. На самом деле ни те, ни другие не обеспечивают истинной интеграции, поскольку первым не хватает экономических знаний, вторым – математических, а тем и другим - педагогических знаний. Очень часто студент рассматривается лишь как объект образования, а расчет должен делаться на самореализацию студента в обучении, на самоактуализацию его личностного потенциала в овладении профессией в ее современном толковании.

Мы рассматриваем курс математики как фактор развития профессиональной направленности и профессиональной компетентности будущего экономиста. В качестве педагогических условий, обеспечивающих эффективное профессиональное образование будущих экономистов, мы рассматриваем интеграцию математики и экономики, развитие профессионального самосознания и развитие мотивации учебной деятельности.

В настоящей статье мы приведем пример математических моделей экономических задач. Математическое моделирование мы рассматриваем как основной механизм решения поставленных выше проблем.

С помощью модели мы можем получить некоторую информацию об исследуемом объекте. Для того чтобы эта информация была достаточно точной, модель должна быть достаточно сложной.

Математическая модель исследуемой задачи способна характеризовать не только количественную сторону процесса, но и раскрыть его качественную сторону.

Под математическим моделированием экономического развития понимают создание общих принципов математического описания экономических процессов.

Во-первых, математическое описание экономической системы должно основываться на системном подходе. Экономическое развитие есть результат взаимодействия производственных и непроизводственных процессов, связанных посредством производственных отношений людей. Все они должны быть описаны в совокупности.

Во-вторых, математическая модель управляемой экономической системы должна содержать не только описание технологий процессов производства, распределения и т.п., но и описание экономических механизмов регулирования, отражающих взаимодействия людей, участвующих в производстве.

В-третьих, регулирующее и программирующее воздействие государства на экономику должно быть описано математической моделью управляющей системы: описание информации о состоянии системы и внешних условиях, на основании которой принимаются решения; описание алгоритма выработки управляющих воздействий и описание реализации воздействий государства на управляемую экономическую систему.

В-четвертых, достоверно описать экономическое развитие можно в терминах макропоказателей. Важна характеристика массового поведения людей типа распределения вероятностей вести себя.

В-пятых, надо адекватно описать то обстоятельство, что общественная система – открытая система, подверженная внешним случайным воздействиям; надо описать воздействие случайностей на структуру системы; надо сформулировать принцип отбора изменений структуры.

В-шестых, результаты математического анализа экономического развития надо сравнивать с качественными особенностями реального процесса.

Экономическая система в целом является предметом исследования в теории экономического равновесия и в теории экономического роста.

1. Математическая модель экономического равновесия.

Вопрос состоит в том, чтобы найти такую систему рыночных цен, при которой производители и потребители, действуя в соответствии со своими интересами, нашли бы согласованное решение, когда совокупное производство каждого продукта было бы сбалансировано с общим спросом на этот продукт. Такие цены существуют и называются равновесными. Соответствующее равновесным ценам состояние экономики называется экономическим равновесием.

Известно, что экономическое равновесие оптимально по Парето: будучи в равновесном состоянии, ни один экономический агент не может повысить удовлетворения собственного интереса, не ущемив при этом интересов других.

Рассмотрим модель общего экономического равновесия Дж. Кейнса.

Будем считать, что в рыночной экономике производится единственный продукт – национальный доход, часть которого используется для текущего потребления, а другая часть сберегается для инвестирования.

Пусть Y-выпуск продукта за некоторую единицу времени, S –сберегаемая часть, ω-потребляемая часть:

$$Y = S + \omega. \qquad (1)$$

Производственные возможности экономики задает производственная функция – зависимость величины выпуска продукта от запаса и состава основных фондов хозяйства и числа занятых в нем работников.

В теории равновесия считается, что запас и состав основных фондов не изменяются, выпуск продукта зависит только от числа R занятых работников; тогда производственная функция будет иметь вид:

$$Y = F(R). \qquad (2)$$

Обычно считают: $F(0) = 0$, $F'(R) > 0$, $F''(R) < 0$.

Кейнс выделяет следующих экономических агентов: нанимателей и нанимаемых, потребителей (сберегателей) и производителей (инвесторов), предлагающих и спрашивающих деньги. Агенты действуют на трех рынках: рынке труда, рынке продуктов, рынке денег. На этих рынках происходит распределение и обмен товаров: труда, продуктов, денег.

<u>Рынок труда</u>. В модели Кейнса считается, что зарплата S постоянна, а число занятых определяется спросом на труд нанимателей. Если p – цена продукта, то в модели Кейнса действует уравнение:

$$F'(R) = \frac{S}{p}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) определяет число R занятых в хозяйстве, а по нему в силу (2) и выпуск продукта Y.

Рынок продукта. Еще одним допущением в модели Кейнса: потребляемая часть выпуска ω зависит от величины самого выпуска Y:

$\omega = \omega(Y)$, (4)

причем так называемая склонность к потреблению $c = \omega'(Y)$ лежит в пределах $0<c<1$. Это означает, что потребители тратят долю с прироста дохода ΔY на потребление, а остальное сберегают. Неупотребляемая (сберегаемая) часть дохода будет:

$S = Y - \omega(Y)$. (5)

При этом $\Delta S = (1-c)\Delta Y$. Величина $d=1-c$ показывает сберегаемую долю дохода ΔY и называется склонностью к сбережению.

Модель Кейнса описывает краткосрочное равновесие экономики, инвестиции в ней – просто фактор производственной активности. Поясним это.

Пусть инвестиции A заданы и рынок продукта находится в равновесии: предложение фондообразующего продукта равно спросу на него:

$Y - \omega(Y) = A$.

Если $\omega(Y)$ выпукла вверх, то это уравнение имеет решение $Y = Y(A)$, значит, инвестиции ограничивают уровень производственной активности.

Предположим, что инвестиции увеличились на величину ΔA. Из последнего уравнения следует, что это вызовет дополнительный выпуск:

$$\Delta Y = \frac{\Delta A}{1-c} . \qquad (6)$$

Соотношение (6) – это соотношение мультипликатора Кейнса. Его можно записать в виде:

$\Delta Y = (1 + c + c^2 + c^3 + \ldots)\Delta A$.

Если инвестиции делаются в предприятие, обещающее доход D в год, то при нынешней норме процента r в такое предприятие не стоит инвестировать больше, чем $A = \dfrac{D}{r}$. Поэтому предполагают, что спрос на инвестиции $A=A(r)$, причем $A'(r) < 0$, $A(r) = 0$ при $r \geq \bar{r}$.

Если рынок находится в равновесии, то

$S(Y) = A(r)$. (7)

Это условие выражаем зависимость спроса на продукт Y от нормы процента r.

Рынок денег. Чтобы сделать инвестиции, надо купить на рынке продукта фондообразующий продукт.

Кейнс считает предложение денег Z заданным управляющим параметром. Он делит спрос на операционный и спекулятивный. Операционный спрос на деньги покрывает потребности совершать сделки на рынке. Если цена продукта p, то платежи в единицу времени (поток) можно оценить как pY . Если характерное время обращения денег (запаздывание платежей по отношению к поставкам) есть θ , то количество денег, которое надо иметь на руках, можно оценить как $\theta\, pY$. Это и есть операционный спрос.

Если текущая норма процента низка, то ценные бумаги предпочитают не покупать, а держат деньги дома в виде банкнот, выжидая повышения нормы процента. Это спекулятивный спрос на деньги $I(r)$, при этом $I'(r) < 0$, $\lim\limits_{r \to \bar{r}} I(r) = \infty$.

Итак, общий спрос на деньги равен $\theta\, pY + I(r)$, и условие равновесия рынка денег

$Z = \theta\, pY + I(r)$. (8)

Система уравнений (2), (3), (7), (8) описывает состояние равновесия рыночной экономики, определяя равновесные значения выпуска Y, занятости R цены продукта p и нормы процента r в зависимости от заданных ставки зарплаты S и предложения денег Z.

Модель равновесия используется для сравнительного статического анализа того, как изменится равновесное состояние экономики (Y ,R, p, r) в зависимости от вариаций зарплаты δs, предложения денег δZ, а также вариаций функций спроса и предложения δZ, δA, δI, δY, характеризующие интересы агентов.

Если, например, надо парировать инфляционные тенденции, т.е. снизить цену р, то следует провести систему мероприятий, которые обеспечивают выполнение неравенств: $\delta A<0$ (уменьшают инвестиции), $\delta S>0$ (стимулируют сбережения), $\delta Z<0$ (снижают ликвидность денег), $\delta I>0$ (увеличивают спекулятивный спрос), $\delta s<0$ (уменьшают зарплату), $\delta Y>0$ (стимулируют выпуск).

Системный подход дает возможность наметить целенаправленный комплекс парирующих мероприятий.

2. Математическая модель экономического роста.

Рассмотрим простейшую модель экономического роста. Пусть в замкнутом хозяйстве производится единственный продукт – национальный доход. Замкнутым называется хозяйство, в котором используется только созданный в нем национальный доход и притом целиком. Часть этого продукта используется для потребления, а другая часть накапливается как основной фонд и тем самым увеличивает его производственные возможности.

Пусть Y – величина выпуска продукта в единицу времени, ω – его часть, используемая для потребления, A – накапливаемая часть продукта:

$Y = \omega + A$.

Производственные возможности хозяйства ограничены его мощностью M и задаются производственной функцией. Мощность – максимально возможный выпуск продукта.

Пусть R – число занятых в хозяйстве.

Производственную функцию зададим в виде

$$Y = Mf(x), \qquad (9)$$

где $$x = \frac{R}{M}. \qquad (10)$$

Если R^* – число рабочих мест в хозяйстве при величине мощности M, $x^* = \dfrac{R^*}{M}$, то будет:

$$f(0) = 0, f(x^*) = 1, f'(x) > 0, f''(x) < 0 \quad \text{при } x \le x^*.$$

Накапливаемая часть продукта A используется, чтобы компенсировать уменьшение мощности вследствие износа оборудования и чтобы создавать новые мощности. Если создание единицы новой мощности поглощает b единиц фондообразующего продукта, то накопление A в единицу времени создает I единиц новой мощности и

$$bI = A. \qquad (11)$$

Скорость изменения мощности есть производная $\dot{M}$ по времени. Она складывается из скорости создания новой мощности I и скорости уменьшения мощности вследствие износа оборудования:

$$\dot{M} = I - \mu M, \qquad (12)$$

где μ – коэффициент, выражающий темп выбытия мощности.

Число занятых работников будем считать растущим с постоянным темпом γ:

$$R = R_0 e^{\gamma t},$$

где R_0–заданная величина.

Перейдем к новым переменным:

$$y=\frac{Y}{M}, j=\frac{I}{M}, w=\frac{\omega}{R}.$$

Величину y можно понимать как степень загрузки мощности, j-это величина, обратная времени наращивания мощности, w – потребление на душу занятого в хозяйстве.

Из уравнения (12) получаем:

$$\frac{\dot{M}}{M}=j-\mu \ . \qquad (13)$$

Из (9), (10), (11) находим:

$$y=f(x), \qquad (14)$$

и $f(x)=bj+wx$ (15)

Исследуем частное решение системы уравнений (13)-(15):

$$\frac{\dot{M}}{M}=\nu .$$

В этом решении $x=\dfrac{R_0}{M_0}$ постоянно. В силу (13) $j=\nu+\mu$ (16) и постоянно. В силу (14) y постоянно, а из (15) w постоянно.

Введем $\bar{b}=\dfrac{bM}{Y}=\dfrac{b}{y}$. Это средняя фондоемкость единицы продукта. Если мощности загружены полностью, то $y=1, \bar{b}=b$. Величину

$$n=\frac{A}{Y}=\frac{bI}{Y}=\frac{bj}{y}=\bar{b}j \qquad (17)$$

назовем долей накопления в составе национального дохода.

Из условия (16) и из (17) находим

$$\nu=\frac{n}{\bar{b}}-\mu \ . \qquad (18)$$

Это верхнее технологическое ограничение на темп роста.

Чтобы производство расширялось, нужно:

$$1-\mu b>0 \ . \qquad (19)$$

Условие (19) означает: в единицу времени единица мощности вырабатывает единицу продукта и уменьшается вследствие износа мощности на μ единиц. Компенсация уменьшения мощности требует затрат μb единиц продукта. Следовательно, условие (19) по сути выражает свойство продуктивности мощности: единица мощности в единицу времени выпускает продукта больше, чем требуется для её восстановления. Чистый продукт с единицы мощности равен $1-\mu b$ в единицу времени. Его можно использовать и для создания новой мощности и для потребления.

Из (15) и (16) следует, что в режиме роста с темпом ν производство может обеспечить потребление на душу занятых в нем:

$$w=\frac{f(x)-b(\nu+\mu)}{x}.$$

При $w'=0$ мы найдем x, при котором душевое потребление максимально. Оно находится из уравнения:

$$xf'(x)-f(x)+b(\nu+\mu)=0 . \qquad (20)$$

Если выполнено условие продуктивности(19), уравнение (20) имеет единственное решение: $0<x\le x^*$.

Из уравнений (20), (16) и (17) найдем норму накопления, обеспечивающую максимум душевого потребления

$$n_m = \frac{1 - x_m f'(x_m)}{f(x_m)},$$

где через x_m обозначено решение уравнения (20).

Величина $E = \dfrac{xf'(x)}{f(x)}$ называется эластичностью загрузки мощности $y = f(x)$ относительно средней трудоемкости единицы мощности x. Уравнение (20) задает «Золотое правило роста», а n_m - норма «Золотого правила роста». Из уравнения (20) и выражения для w следует, что $f'(x_m) = w_m$, т.е. потребление на душу занятых w_m равно предельной производительности труда $f'(x_m)$ - приросту выпуска продукта при увеличении занятых на единицу.

Приведенные модели равновесия и экономического роста отражают совершенно разные процессы в одной и той же экономической системе. Теория экономического равновесия считает, что экономика развивается, переходя из одного равновесного состояния к другому [1].

Теория экономического роста основана на предположении, что экономические механизмы регулирования действуют быстро и эффективно, обеспечивая оптимальное соотношение между накоплением и потреблением, оптимальное распределение рабочей силы и т.п. В этой теории экономические механизмы регулирования не берутся в расчет, дело сводится к описанию чисто технологических связей в хозяйстве.

Эти примеры показывают, что в анализе экономики нужен системный подход с тщательным описанием обратных связей в экономической системе.

Литература

1. Столерю Л. Равновесие и экономический рост. М .: Статистика, 1974.
2. Петров А.А. Математические модели прогнозирования народного хозяйства. М.: Знание, 1974.