© Д. Больтогтох, Д. Халтар, Д. Энхбаатар
Монголия, Улан-Батор, Национальный университет Монголии

Оптимизационные модели коммерческой деятельности банка и финансовой поддержки малого бизнеса[1]

В данной работе построены математическая модель максимизации дохода банка-монополиста и математические модели рационального расспределения кредитных денег для малого бизнеса.

D. Bolitogtokh, D. Haltar,D. Enkhbaatar

Optimization models of banking commercial activity and supporting the small business enterprises

In this work we have written a mathematical maximizing model profit of bank-monopoly and optimal llocation of credits for small business enterprises.

Введение

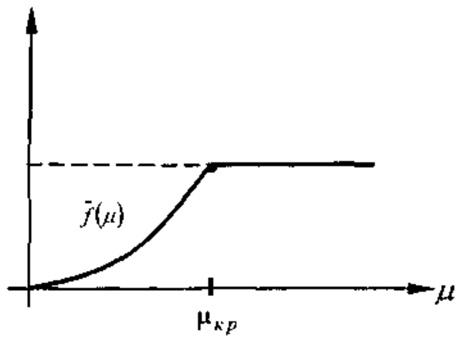
В первом параграфе данной работы будет исследована задача максимизации чистой прибыли банка-монополиста (или банков равных возможностей) на рынках кредита и депозита, а в следующем параграфе рассматриваются модели кредитирования малого и средного бизнеса и два конкретных примера. Нужно заметить следующие два обстоятельства, связанные с кредитированием малого и средного бизнеса. Во-первых, кредитную организацию, которая кредитирует определенное количество представителей малого и средного бизнеса по какому-то проекту, можно считать фирмой-монополистом, так как последние обслуживаются только ею. Во-вторых, в этом случае кредитная организация наиболее заинтересована в максимизации прибыли своих заемщиков, так как от этого зависит успех всего проекта, следовательно, прибыльность кредитной организации в результате осуществления данного проекта. Именно эти предложения позволяют рассматривать оптимизационные модели.

§1. Моделирование эффективности коммерческой деятельности банка-монополиста

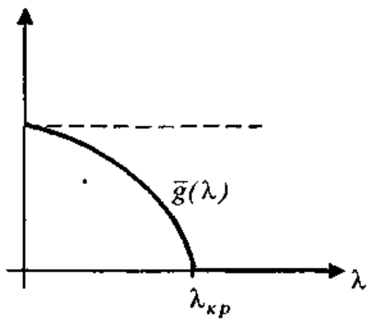
Здесь рассматривается математическая модель, которая может быть использована для описания эффективной коммерческой деятельности только такой финансовой организации, которая является банком-монополистом (системой *банк равных возможностей*) на финансовом рынке. Она очень полезна для такой кредитной организации, как сберегательно-кредитный кооператив, который имеет определенное количество клиентов, обслуживаемых только ею.

Здесь мы приводим самую простую статистическую модель обращения части наличных денег $C > 0$ граждан (организаций, компаний) через банк. Количество денег, которые граждане хотят хранить в данном банке или взять в кредиты, конечно, зависит соответственно от депозитной $\mu > 0$ и кредитной $\lambda > 0$ ставок банка. Обозначим через $f(\mu): 0 \le f(\mu) \le 1$ и $g(\lambda): 0 \le g(\lambda) \le 1$ соответственно вероятности отдачи своих наличных денег данному банку и получения в кредит денег, находящихся в распоряжении банка для актива. Предлагаемые нами графики функций $f(\mu)$ и $g(\lambda)$ показаны на рисунках. $\bar{f}(\mu)$ и $\bar{g}(\lambda)$ являются соответственно строго выпуклой возрастающей и строго вогнутой убывающей функциями, удовлетворяющими условиям $\bar{g}(0) = 1$ $\bar{f}(0) = 0$, $\bar{g}'(0) = \bar{f}'(0) = 0$. Это

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (совместный российско-монгольский проект 07-01-90101).



означает, что при малой кредитной ставке по мере её возрастания число граждан, желающих получить большие кредиты, медленно убывает, зато при малой депозитной ставке по мере её возрастания число граждан,



желающих вкладывать все свои деньги в банк, медленно убывает. Тогда вероятности сбережения и получения в кредит всех имеющихся денег соответственно выражаются формулами:

$$f(\mu) = \min(\bar{f}(\mu), 1);$$

$$g(\lambda) = \max(\bar{g}(\lambda), 0).$$

$\mu_{кр}, \lambda_{кр}$ являются теми критическими значениями ставок, когда соответственно все хотят отдать свои деньги в банк или отказаться от кредита. Допустим так же, что все затраты банка, кроме депозитной ставки, будем считать пропорциональными β-й части суммарного дохода, $0 < \beta < 1$, а α-я часть депозита останется в Монголбанке как резервный капитал. Тогда имеем: количество депозита $f(\mu) \cdot C$; количество кредита $(1-\alpha)\rho g(\lambda) f(\mu) \cdot C$, т.е. $(1-\alpha)\rho$-я часть депозита выдается в кредит. Число $0 < \rho \le 1$ показывает, какая доля актива банка идет на ссуд. Доход, получаемый от кредитирования, $(1-\alpha)\rho\lambda \cdot g(\lambda) f(\mu) \cdot C$, β-я часть которой идет на расход, связанный с депозитом: $\mu \cdot f(\mu) \cdot C$. Следовательно, задача максимизации чистой прибыли банка выражается как

$$\Pi(\mu, \lambda) = C((1-\beta)(1-\alpha)\lambda \times \times g(\lambda) f(\mu) - \mu \cdot f(\mu)) \to \max, \quad (1)$$
$$\mu \ge 0, \lambda \ge 0.$$

Так как $g(\lambda) = 0$ при $\lambda \ge \lambda_{кр}$ и $f(\mu) = 1$ при $\mu \ge \mu_{кр}$, то $\Pi(\mu, \lambda) \to 0$ при $\mu \to \infty$, $\lambda \to \infty$, следовательно, решение (μ^*, λ^*) задачи (1) существует. $(\lambda \cdot g(\lambda))'' = 2g'(\lambda) + g''(\lambda) \cdot \lambda < 0$ на $\left[0, \lambda_{кр}\right]$, и поэтому единственное решение $0 < \lambda^* < \lambda$ находится из условия $g'(\lambda) \cdot \lambda + g(\lambda) = 0$. Это следует, из того, что функция $\alpha(\lambda) = \lambda \cdot g(\lambda)$ положительна и строго вогнута на $[0.\lambda_{кр})$, причем, $\alpha(0) = \alpha(\lambda_{кр}) = 0$. Для нахождения μ^*, мы должны решить следующую задачу.

$$A(\mu) = ((1-\beta)(1-\alpha)\rho\lambda^* \times \times g(\lambda^*) f(\mu) - \mu \cdot f(\mu)) \to \max, \quad \mu \ge 0 \quad (*)$$

В вышеописанной модели предполагается, что, собрав деньги вкладчиков с некоторой ставкой μ, банк часть из них раздает в виде кредита заемщикам со ставкой λ. При $\mu = \mu^*, \lambda = \lambda^*$ данный банк или кооператив должен получить наибольший чистый доход.

По данным 2005 г., в Монголии функционируют более 300 сберегательно-кредитных кооперативов. К сожалению, в последнее время часть из них, желая приобрести побольше вкладчиков (следовательно, в конечном счёте побольше денег), обещала неправомерные высокие депозитные ставки, соревнуясь как бы между собой. Это привело в конечном счете полному краху некоторых из них, которые просто не в состоянии выплатить деньги вкладчикам, вложив их деньги в недвижимость. В этом смысле данная модель может быть полезной, ибо показывает, какая гармония должна существовать между депозитной и кредитной ставками.

Числовой пример. Предположим, что функции $\bar{f}(\mu)$ и $\bar{g}(\lambda)$ имеют соответственно следующие виды:

$$\bar{f}(\mu) = a\mu^2, a > 0, \ \bar{g}(\lambda) = 1 - b\lambda^2, b > 0.$$

Найдем $\mu_{кр}$ и $\lambda_{кр}$:

$$a\mu^2 = 1 \Rightarrow \mu_{кр} = \sqrt{\frac{1}{a}} ,$$

$$1 - b\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{кр} = \sqrt{\frac{1}{b}} .$$

Следовательно, имеют место формулы:

$f(\mu) = \overline{f}(\mu)$ при $\mu_{кр} < \sqrt{\frac{1}{a}}$, $f(\mu) = 1$ при $\mu_{кр} > \sqrt{\frac{1}{a}}$, $g(\lambda) = \overline{g}(\lambda)$ при $\lambda_{кр} < \sqrt{\frac{1}{b}}$, $g(\lambda) = 0$ при $\lambda_{кр} \ge \sqrt{\frac{1}{b}}$.

Для нахождения оптимальной кредитной ставки λ^* мы должны решить следующее уравнение на $\left[0, \sqrt{\frac{1}{b}}\right)$.

$$(\lambda g(\lambda))' = g'(\lambda)\lambda + g(\lambda) = 0 ,$$

$$-2b\lambda^2 + 1 - b\lambda^2 = 0 .$$

Откуда находим, что $\lambda^* = \sqrt{\frac{1}{3b}}$.

Тогда, учитывая $(*)$, для нахождения μ^* имеем следующую экстремальную задачу:

$$A(\mu) = \left(\frac{2}{3}(1-\alpha)\rho(1-\beta)\sqrt{\frac{1}{3b}} - \mu\right) \cdot f(\mu) \to \max,$$

$$\mu \ge 0 .$$

Введем обозначение

$$B = \frac{2}{3}(1-\alpha)\rho(1-\beta)\sqrt{\frac{1}{3b}} .$$

Тогда после простых вычислений легко получить формулу

$$\mu^* = \begin{cases} \frac{2}{3}B, & B - \sqrt{\frac{1}{a}} < \frac{4}{27} a \cdot B^3, \\ \sqrt{\frac{1}{a}}, & B - \sqrt{\frac{1}{a}} \ge \frac{4}{27} a \cdot B^3. \end{cases}$$

Полагаясь на квартальные данные об внутреннем валовом продукте, суммарных показателях кредита и сбережения, взвешенных размерах кредитной и депозитной ставок банковской системы Монголии за 2002-2006 гг., для функций $\overline{f}(\mu) = a\mu^2$, $a > 0$, $\overline{g}(\lambda) = 1 - b\lambda^2$, $b > 0$, и фиксированных параметров $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.3$, $\rho = 0.6$ мы получили следующие оценки:

$$a = 0.0027 , b = 0.00056 , \mu_{кр} = 19.24 ,$$

$$\lambda_{кр} = 42.2 , \mu^* = 19.24 , \lambda^* = 24.4 .$$

§2. Кредитирование малого бизнеса и поддержка его малодоходной части

Здесь рассматриваются задача максимизации суммарного дохода определенного количества заемщиков и максиминная задача поддержки их малодоходной части.

1. Максимизация суммарного дохода малого бизнеса. Пусть имеется N представителей малого и среднего бизнеса, которые нуждаются в финансовой поддержке. Допустим, что некая кредитная организация взялась за кредитование этих бизнесменов, выделив при этом сумму M денег. Обычно такая работа выполняется по целовой программе или проекту для того, чтобы кредитируемые организации выпускали однотипные продукты. Пусть k -й заемщик, взяв кредит в количестве x_k, может выпускать продукцию стоимостью $f_k(x_k)$, затратив при этом $(c_k + \mu)x_k$ денег, где $\mu > 0$ – кредитная ставка, усредненная за кредитный срок. Мы ограничимся случаем, когда известна цена капиталов (мы здесь предполагаем, что потенциальные заемщики для получения кредита имеют возможности подставить кое-что или получить гарантию надежных спонсоров и т.д.), подставленных под залог заемщиками E_k, $k = 1,...,N$. Тогда будем иметь следующую задачу оптимизации:

$$\sum_{k=1}^{N} \left[f_k(x_k) - (c_k + \mu)x_k \right] \to \max ,$$

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = M, \quad 0 \le x_k \le \alpha \cdot E_k, \quad k = 1,...,N ,$$

где $\alpha > 0$ задается кредитной организацией. Для переменных x_k, принимающих реальные значения, решение этой задачи характеризуется так называемой обобщенной леммой Гиббса, доказанной нами. Эта задача при реальных значениях x_k может быть решена с помощью алгоритма, использующего обобщенную лемму Гиббса, причем в случае строгой вогнутости функций $f_k(x_k)$ этот алгоритм является конечным. В случае, когда x_k принимает конечное число значений, нужно использовать метод динамического программирования, описанный в [6].

2. Поддержка малоимущей части населения посредством микрокредита. Около 96% из занимающихся бизнесом организаций нашей страны составляют представители среднего и малого бизнеса, причем они производят 60% внутреннего валового продукта. Поэтому в последние годы в Монголии все более широкий размах приобретают так называемые микрофинансовые услуги бедным слоям населения. Такого рода деятельностью занимаются не только банковские организации, но и небанковские финансовые организации и сберегательно-кредитные кооперативы. Среди микрофинансовых услуг главное место занимает кредитирование малоимущей, т.е. малодоходной, части населения. Причем этому вопросу государство уделяет самое серьезное внимание. Подтверждением тому является организация национального конгресса по микрофинансированию, проведенного в ноябре 2004 г. в Улан-Баторе. Подробную информацию о микрофинансе, микрокредите и микробизнесе можно найти в монографиях: "Бичил зээл ба бизнес эрхлэгчдийн үндэсний чуулган" (1994), "Монгол дахь бичил санхүүгийн дэд салбарын судалгаа" (2004).

Микрокредитом называется обслуживание бедных слоев населения в виде ссуд в малых размерах. Среди иностранных спонсоров, поддерживающих микрокредит в Монголии, можно назвать следующие организации: USAID, World Bank, CGAP, ADB, IFC, JICA, GTZ, IFAD и UNDP.

А государственная политика поддержки малоимущей части населения осуществляется главным образом через Монголбанк.

Когда проект кредитирования осуществляется по правительственной программе или по инициативе какой-либо иностранной организации доброй воли, то больше всего внимание уделяется малоимущей части среднего и малого бизнеса, т.е. микробизнесу. При этом речь не идет о снижении кредитных ставок и предоставлении других льгот малоимущим, а имеется в виду поддержка коммерческой деятельности тех, кто в этом больше всего нуждается. Обычно бедняки не имеют капитала, который можно было отдать в залог, но вполне способны провести коммерческую деятельность. При такой постановке вопроса мы должны решить следующую максиминную проблему:

$$\min_{1\le k\le N}\left(f_k(x_k)-(c_k+\mu)x_k\right)\to\max,$$

$$\sum_{k=1}^{N}x_k=M,\quad x_k\ge 0,\quad k=1,\dots,N,$$

где x_k – количество кредита, предназначаемое k-му заемщику. Эта модель представляет собой классическую максиминную задачу распределения ресурсов [3], и решается известными алгоритмами: когда x_k могут принимать реальные значения, она решается с помощью алгоритма, основанного на классической лемме Гиббса и теоремы Гермейера, а когда x_k принимают целочисленные значения, она решается с помощью метода динамического программирования [6].

При учете кредитного залога мы получаем следующую задачу:

$$\min_{1\le k\le N}\left(f_k(x_k)-(c_k+\mu)x_k\right)\to\max,$$

$$\sum_{k=1}^{N}x_k=M,\quad 0\le x_k\le\alpha\cdot E_k,\quad k=1,\dots,N.$$

Здесь E_k – количество капитала i-го заемщика, αE_k – доля капитала E_k, $0<\alpha<1$, такая, что кредитная организация не может дать i-му заемщику больше денег, чем αE_k. С помощью обобщенной леммы Гиббса можно доказать теорему, характеризующую решение этой задачи, которую можно назвать обобщенной теоремой Гермейера для максминных задач с ограничениями. В случае, когда x_k принимают целочисленные значения, нужно использовать алгоритм нахождения решения задачи из пункта 1 с добавлением метода штрафов.

Литература

1. Антонов А.В., Поманский А.Б. Рационирование кредитов и алгоритм эффективности распределения заемных средств // Экономика и математические методы. – 1994.
2. Annual Report, 2006, Bank of Mongolia. Ulaanbaatar.
3. Давыдов Э.Г. Исследование операций: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1990.

4. Дашням Ц. Финансово-кредитные методы регулирования рыночных отношений в Монголии. – 2003.

5. Чулуунбаатар Н. Вопросы оптимизации управление финансовами средствами коммерческого банка. – Улан-Батор.

6. Исследование операций в экономике: Учеб. Пособ. для вузов / Под ред. Кремера Н.Ш. – М., 1997.

7. Синки Дж. Ф., Управление финансами в коммерческих банках. – М.: Catallaxy, 1994.

8. Sealey, C.W. and Linndley S.T. Inputs, Outputs, and Theory of Production and Cost at Depository Financial Institutions // Journal of Finance, 1977.

9. Sub-sector review of microfinance in Mongolia, 2005, UNDP, printed in Mongolia.

10. Чулуунбат О. Бюджетная и денежно-кредитная политика Монголии при переходе к рыночной экономики. – Улан-Батор, 2002.

11. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. – М.: Мир, 1967.