© В.Н. Ханхасаев
Россия, Улан-Удэ, Восточно-Сибирский государственный технологический университет

Об одной краевой задаче для некоторых уравнений смешанно-составного типа 4-го порядка

В линейной постановке задачи для уравнения 4-го порядка используются два разных оператора 2-го порядка, аналогичные смешанному оператору теплопроводности, обобщающему чисто гиперболический случай и применяемого при математическом моделировании процесса отключения электрической дуги. Доказана также разрешимость поставленной задачи и в квазилинейном случае.

© V.N. Khankhasaev

About the boundary value problem for some fourth-order partial equations of a mixed-composite type

Two different second-order partial operators are used in linear statement of the boundary value problem for fourth-order partial equation and are similar to the heat-transfer operator of a mixed type which is generalize strongly hyperbolic case and is used in mathematical modeling of the electric arc interrupted process. Also it proved solvability of the posed boundary value problem in the quasilinear case.

В работах [1-2] рассматривались математические модели разного уровня сложности для электрической дуги, остывающей в потоке газа. Было показано, что если процессы в области амплитуды тока обычно представляют как установившиеся, хорошо описываемые классическим уравнением теплопроводности параболического типа, то интенсивное дугогашение в области нуля тока необходимо рассматривать как существенно нестационарный процесс. Для изучения таких процессов на основе обобщения гипотезы Фурье вводилось гиперболическое уравнение теплопроводности, различные краевые задачи для которого решались как численно, так и аналитически. К этой проблеме примыкает также моделирование волнового механизма теплопереноса, обусловленного конечной скоростью распространения тепла.

Связывая теперь эти две фазы горения электрической дуги, необходимо рассмотреть уравнение теплопроводности смешанного типа, где коэффициент при второй производной по времени может менять свой знак или вообще вырождаться, а также приводить постановки и исследовать корректность прямых и обратных задач для таких математических моделей.

Наряду с многочисленными методами решения краевых задач для различных уравнений 2-го порядка $K_1u=h$ можно использовать и предложенный Ю.А. Дубинским подход, когда с уравнением $K_1\ u=h$, которое в общем случае неразрешимо для произвольной правой части h, связывается некоторое уравнение 4-го порядка $K_2K_1u=K_2h$, которое уже разрешимо всегда. Тогда исходное уравнение разрешимо с точностью до ядра оператора K_2. Эта конструкция может использоваться и как прием описания области значений оператора $K_1\ u$, соответствующего некорректной задаче.

В этой работе будут рассмотрены корректно-поставленные краевые задачи в ограниченной области для таких некоэрцитивных уравнений четвертого порядка смешанно-составного типа, для которых удалось доказать разрешимость в некоторых весовых пространствах, несмотря на суперпозицию разных операторов.

1. Линейная постановка

Рассмотрим в области

$$D = \{(x, y): 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$$

дифференциальное уравнение в частных производных 4-го порядка

$$L\,u = K_1 K_2\, u = f\,(x,y), \tag{1}$$

где дифференциальные операторы $K_1\, u$ и $K_2\, u$ имеют вид:

$$K_1 u \equiv k_1(x,y)\,u_{yy} + u_{xx} + a_1(x,y)\,u_y + c_1(x,y)\,u = f_1(x,y), \tag{2}$$

$$K_2 u \equiv k_2(x,y)\,u_{xx} + u_{yy} + a_2(x,y)\,u_x + c_2(x,y)\,u = f_2(x,y), \tag{3}$$

с достаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяющими условиям:

$$k_1(x,1) \ge 0, \quad k_1(x,0) \le 0, \quad x \in [0,1]; \tag{4}$$

$$(2a_1 - k_{1y})(x,y) > 0, \quad (2a_2 - |k_{2x}|)(x,y) > 0, \quad (x,y) \in \overline{D}; \tag{5}$$

$$k_2(1,y) = 0, \quad k_2(0,y) \le 0, \quad y \in [0,1]; \tag{6}$$

$$c_1(x,y),\, c_{1y}(x,y),\, c_2(x,y),\, c_{2x}(x,y) \le 0, \quad (x,y) \in D. \tag{7}$$

Так как на знаки функций k_1 и k_2 внутри области D не сделано никаких предположений, то в классы уравнений вида (2) и (3) входит часть параболических, эллиптико-параболических и эллиптико-гиперболических уравнений с произвольными линиями и областями параболического вырождения, а также описанный во введении оператор теплопроводности смешанного типа, аналог которого приводится в работе [3].

Рассматривая теперь уравнение (1), мы видим, что оно охватывает широкий класс уравнений смешанно-составного типа. Так, например, сюда входят уравнения с линиями вырождения, делящими область D на несколько частей, в которых уравнение (1) является либо эллиптическим, либо составным, то есть имеющим две мнимые и две действительные характеристики, и либо чисто гиперболическим.

В связи с известной симметрией между K_1 и K_2, а также с произвольностью линий вырождения естественно исследование уравнения (1) в квадрате D. Пусть $\nu = (\nu_x, \nu_y)$ - вектор внутренней нормали в D, а Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 – стороны D, соответственно, *(x=0), (y=1), (x=1), (y=0).*

Краевая задача А. *Найти решение уравнения (1) в области D такое, что*

$$u\big|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0, \; u_x\big|_{\Gamma_1} = 0, \qquad K_2 u\big|_{\Gamma_1} = 0, \; u_{yy}\big|_{\Gamma_2} = 0. \tag{8}$$

Краевая задача В(С). *Найти решение уравнения (2),(3) в области D такое, что*

$$u\big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0, \; \left(u\big|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0\right). \tag{9}$$

Заметим, что краевая задача C является частным случаем задачи B после соответствующей замены переменных, и значит в следующей лемме индексы при коэффициентах в (2),(3) можно опустить, имея в виду краевую задачу B (для задачи C достаточно поменять переменные и соответствующие индексы).

Лемма 1. *Для любой функции* $u(x,y) \in C^2(\overline{D})$, *удовлетворяющей (9), имеет место априорная оценка*

$$\|Ku\|_0 \ge \alpha_1 \|u\|_1, \tag{10}$$

где $\|\cdot\|_0$ *- норма в* $L_2(D)$, $\|\cdot\|_1$ *- норма в* $W_2^1(D)$; *здесь и далее через* α *будем обозначать некоторые положительные постоянные, не зависящие от функций, входящих в соответствующие неравенства.*

Доказательство. Интегрированием по частям получаем:

$$2\int_D e^{\lambda y} u_y Ku\,dD = 2(ku_{yy} + u_{xx} + au_y + cu,\, e^{\lambda y}u_y) = \int_D \{[(2a - k_y) - \lambda k]\,u_y^2 + \lambda u_x^2 - (c_y + \lambda c)u^2\}\, e^{\lambda y} dD + \int_\Gamma \{-ku_y^2\nu_y - 2u_x u_y \nu_x + u_x^2 \nu_y - cu^2\nu_y\}\, e^{\lambda y} d\Gamma.$$

В силу (4),(6),(7),(9) интеграл по границе неотрицателен, а из (5) при достаточно малых $\lambda > 0$ *и* δ следует, что $((2a - k_y) - \lambda k)(x,y) \ge \delta > 0, \; (x,y) \in D$.

Применяя теперь неравенства Коши и Фридрихса, получаем искомую оценку (10). Из леммы 1, в частности, следует, что регулярные решения краевых задач B и C единственны.

Определение 1.

Функцию $u(x,y) \in W_2^2(D)$ *будем называть слабым обобщенным решением краевой задачи А, если для любых* $v(x,y) \in C_0^\infty(D)$ *имеет место тождество:*

$$(u, L^* v)_0 = (f, v)_0\,. \tag{11}$$

Определение 2. *Функцию* $u(x,y) \in W_2^2(D)$ *будем называть полусиль-*

ным решением краевой задачи A, если существует последовательность функций $(u_n) \in W_2^2(D)$, *удовлетворяющих (8), такая, что* $(Lu_n) \in L_2(D)$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|_2 = \lim_{n\to\infty}\|Lu_n - f\|_0 = 0. \quad (12)$$

Теорема 1. *Для любой функции* $f(x,y) \in L_2(D)$ *существует слабое обобщенное решение u(x,y) краевой задачи A, причем в случаях* $k_1|_{\Gamma_2} > 0$ *или* $k_1|_{\Gamma_2} = 0$, *при дополнительном условии, что* $(2a_1 + k_{1y})(x,y) > 0$ *в* $\overline{D}$, *существует и единственное полусильное решение.*

Доказательство. Применяя к уравнению (2) метод «ε - регуляризации» уравнением составного типа 3-го порядка и метод вспомогательного оператора по схеме, изложенной в работе [4], получаем, что существует слабое обобщенное решение $v(x,y) \in W_2^1(D)$ краевой задачи *B*, то есть для любых $w(x,y) \in C_0^\infty(D)$ выполнено тождество:

$$(v, K_1^* w)_0 = (f, w)_0 \, . \quad (13)$$

Не трудно видеть, что так как в класс уравнений вида (2) входят эллиптико-параболические уравнения, то как и в работе [5] можно построить пример, что без дополнительных ограничений решение задачи *B*, вообще говоря, большей гладкости, чем из пространства $W_2^1(D)$ иметь не будет. Поэтому в выделенных случаях, указанных в условии теоремы 1 при дополнительном предположении, что $(2a_1 + k_{1y})(x,y) > 0$ в $\overline{D}$, удается показать при помощи метода конечных разностей и продолжения уравнения (2) в область *D* [4], что существует регулярное решение $u(x,y) \in W_2^2(D)$ краевой задачи *B* с правой частью $f(x,y) \in W_2^1(D)$, $f|_{\Gamma_2} = 0$, причем выполнена следующая апостериорная оценка

$$\|f\|_1 \ge \alpha_2 \|u\|_2, \; f|_{\Gamma_4} = 0, \; \alpha_2 > 0. \quad (14)$$

Вследствие этого, краевая задача *C* с правой частью $v(x,y) \in W_2^1(D)$ имеет регулярное решение $u(x,y) \in W_2^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям (9). Отсюда, интегрируя по частям и используя (13), мы получим (11), то есть *u(x,y)* - слабое обобщенное решение задачи *A*.

В выделенных же случаях из существования регулярных решений и леммы 1 следуют [3] существование и единственность сильного решения $v(x,y) \in W_2^1(D)$ краевой задачи *B* для любой функции $f(x,y) \in L_2(D)$, то есть существует последовательность функций $v_n(x,y) \in C^4(\overline{D})$, удовлетворяющих (9), таких что

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n - v\|_1 = \lim_{n\to\infty}\|K_1 v_n - f\|_0 = 0.$$

Отсюда, имея последовательность функций *(uₙ(x,y))* и функцию *u(x,y)*, регулярные решения краевой задачи *C* с правыми частями *(vₙ(x,y))* и *v(x,y)* соответственно, мы получаем при помощи оценки (14) соотношение (12), означающее, что *u(x,y)*- полусильное решение задачи *A*, единственность которого следует по построению, что заканчивает доказательство теоремы 1. По схеме работы [6] можно доказать следующую лемму.

Лемма 2.

Пусть $f_2(x,y) \in W_2^2(D)$, $f_2|_{\Gamma_3} = 0$. *К условию (5) добавим условия:*

а) $(2a_2 + 3k_{2x})(x,y) > 0$, $(x,y) \in \overline{D}$;

б) $(2a_2 - 3k_{2x})(1,y) > 0$ *для* $y \in M$, *где* $M = \{y \in [0,1] : k_{2x}(1,y) > 0\}$.

Тогда регулярное решение u(x,y) краевой задачи C принадлежит весовому пространству $W_{2,\varphi}^3(D)$, *то есть* $\varphi u \in W_2^3(D)$, *где функция* $\varphi(x) = o((1-x)^2)$ *в некоторой окрестности точки x=1 и* $\varphi(x) \equiv 1$ *вне ее.*

Теорема 2.

Пусть $f(x,y) \in W_2^1(D), f|_{\Gamma_2} = 0$ *и выполнены условия: а), б) и* $(2\alpha_1 + k_{1y})(x,y) > 0$ *в* $\overline{D}$. *Тогда при* $k_1|_{\Gamma_2} > 0$ *или* $k_1|_{\Gamma_2} = 0$, *полусильное решение u(x,y) краевой задачи A будет принадлежать пространству* $W_{2,\varphi}^3(D) \cap W_2^2(D)$ *и удовлетворять краевым условиям (8) в среднем.*

Доказательство. Требуемая гладкость полусильного решения прямо следует из доказательства теоремы 1 и утверждения леммы 2, а из теорем вложения Соболева вытекает, что *u(x,y)* непрерывна в $\overline{D}$ и, так как $u|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0$, то

$$u_x|_{\Gamma_2} = 0, \; u_{xx}|_{\Gamma_2} = 0, \; u_{yy}|_{\Gamma_3} = 0$$

в среднем. Отсюда, из вида уравнения (3) и краевого условия для его правой части $K_2u\big|_{\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3}=0$, достигаемого из теорем вложения, так как $K_2u\in W^1_{2,\varphi}(D)$, следует, что $u_x\big|_{\Gamma_3}=0$, $u_{yy}\big|_{\Gamma_2}=0$, $K_2u\big|_{\Gamma_1}=0$ в среднем. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. *Аналогичным методом можно показать, что полусильное решение краевой задачи A при соответствующих ограничениях на правую часть и коэффициенты уравнения (1) принадлежит весовому пространству более высокой гладкости.*

2. Нелинейная постановка

Рассмотрим в области $D=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$ нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных 4-го порядка

$$Lu\equiv K_1K_2u+\varepsilon K_3u=f(x,y), \tag{15}$$

где дифференциальные операторы K_1 и K_2 имеют вид (2), (3) с достаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяющими условиям (4) – (7), а оператор K_3 – произвольный нелинейный дифференциальный оператор в частных производных 1-го порядка с произвольной степенной нелинейностью по функции и её производным; ε - достаточно малое число, зависящее от коэффициентов операторов K_1,K_2,K_3. Такого вида уравнения рассматривались, в частности, в работе [7], но условия разрешимости для них сформулированы в терминах компактности участвующих в них операторов, что трудно проверяемо, в отличие от указанных в данной работе.

Краевая задача D. *Найти решение уравнения (15) в области D, удовлетворяющее краевым условиям (8).*

Введем пространство H_+ как замыкание класса функций из $C^4(\bar{D})$, удовлетворяющих краевым условиям (8), по норме $\|u\|_+=\|K_2u\|_{W_2^1(D)}$. Из априорной оценки (10) леммы 1, неравенства Фридрихса и краевых условий (8) следует, что $\|u\|_+$ - действительно норма. С помощью же леммы 2, теоремы 2 и теорем вложения легко доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Для любой функции $u(x,y)\in H_+$ выполнены краевые условия (8).*

Определение 3. *Функцию $u(x,y)\in H_+$ будем называть полусильным обобщенным решением краевой задачи D, если существует последовательность функций $(u_n(x,y))\in H_+$, такая, что $(K_2u_n(x,y))\in C(D)$, $(L\,u_n(x,y))\in L_2(D)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|_2=\lim\limits_{n\to\infty}\|Lu_n-f\|_0=0$.*

Лемма 4. *Для любой функции $u(x,y)\in C^4(\overline{D})$, удовлетворяющей (8), имеет место априорная оценка*

$$\|Lu\|_0\geq\alpha_3\|u\|_+. \tag{16}$$

Доказательство. Интегрированием по частям, используя схему доказательства леммы 1, неравенство Юнга и краевые условия (8), при достаточно малых $\varepsilon>0$ и $\lambda>0$ получаем:

$$(Lu,(K_2u)_ye^{\lambda y})\geq\alpha_4\|K_2u\|_1^2-$$

$$(\frac{\alpha_4}{2})\|K_2u\|_1^2-\beta(\varepsilon)\|u\|^p_{W_p^1(D)},p<\infty,$$

где $\beta(\varepsilon)<(\alpha_4\alpha_5)/2$ и значение α_5 определяется из серии неравенств

$$\|K_2u\|_1^2\geq\alpha_6\|u\|_2^2\geq\alpha_5\|u\|^p_{W_p^1(D)},$$

справедливых в силу теорем вложения и работы [4]. Отсюда по неравенству Гельдера следует утверждение (16) леммы 4.

Замечание 2. *Аналогичный лемме 4 результат можно получить не только предположением достаточной малости ε, но и предположением, например, достаточно большого отрицательного $c_2(x)$.*

Рассмотрим далее семейство уравнений $L_\tau u=Lu$, $(0\leq\tau\leq1)$, где вместо ε взято $\varepsilon\tau$. Очевидно, что равномерно относительно τ имеет место для всего семейства $L_\tau u$ априорная оценка леммы 4. С другой стороны, при $\tau=0$, то есть в линейном случае, разрешимость нашей краевой задачи A доказана в теореме 1. Тогда на основании хорошо известного метода продолжения по параметру легко доказывается и разрешимость краевой задачи D в пространстве $H_+(D)$, то есть справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *При выполнении условий (4)-(7) в случаях $k_1|_{\Gamma_2}>0$ или $k_1|_{\Gamma_2}=0$, при дополнительном условии, что $(2\alpha_1+k_{1y})(x,y)>0$ в $\overline{D}$ для любой функции*

$f(x,y) \in L_2(D)$ *существует полусильное решение краевой задачи D из пространства* $H_+(D)$ [8].

Литература

1. Ханхасаев В.Н., Буянтуев С.Л. Численный расчет одной математической модели электрической дуги в потоке газа // Сб. матер. I Междунар. науч. практ. конф. «Энергосберегающие и природоохранные технологии на Байкале». – Улан-Удэ. 2001. – С. 168-172.

2. Ханхасаев В.Н., Буянтуев С.Л. Применение метода моментов и рядов Бурмана-Лагранжа к исследованию одной математической модели низкотемпературной плазмы // Сб. материалов II Междунар. науч. практ. конф. «Энергосберегающие и природоохранные технологии на Байкале». – Улан-Удэ. – 2003. – С. 79-86.

3. Ханхасаев В.Н. К теории нелинейных уравнений смешанного типа четвертого порядка // Сб. науч. тр. «Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики». – Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1988. – С. 154-165.

4. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск: НГУ, 1983. – 98 с.

5. Кон Д., Ниренберг Л. Некоэрцитивные краевые задачи // Сб. статей «Псевдодифференциальные операторы». – М.: Мир, 1967. – С. 7-115.

6. Ханхасаев В.Н. Об одной краевой задаче для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка // Сб. «Динамика сплошной среды». – № 53. – Новосибирск, 1981. – С. 144-150.

7. Агаев Г.Н. О разрешимости нелинейных операторных уравнений в пространстве Банаха // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 174. – № 6. – С. 1239-1242.

8. Ханхасаев В.Н. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка // Межвузовский сб. научн. трудов «Математический анализ и дифференциальные уравнения». – Новосибирск: НГУ, 1992. – С. 138-141.

Принята в печать 21.12.2006