© Г.А. Шишкин
Россия, Улан-Удэ, Бурятский государственный университет

Исследование возможностей решения в замкнутом виде задачи Коши для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом

Статья посвящена исследованию возможностей решения в замкнутом виде задачи Коши для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом.

© G.A. Shishkin

Investigation of solving in the close type capabilities for a Cauchy problem for linear integral differential Fredholm equations with time delay

The article is devoted to the investigation of solving in the close type capabilities for a Cauchy problem for linear integral differential Fredholm equations with time delay.

В работах [3]-[4] исследованы возможности преобразования начальных задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом к разрешающим интегральным уравнениям с обыкновенным аргументом. Используя одну из модификаций функций гибкой структуры показано, что задача Коши для всех уравнений запаздывающего типа преобразуется к разрешающим интегральным уравнениям смешанного типа Вольтерра-Фредгольма с обыкновенным аргументом. Для уравнений нейтрального и опережающего типов выявлены виды уравнений, для которых такое преобразование возможно.

Сравнивая все разрешающие уравнения, полученные в этих работах , видим, что начальные задачи для рассматриваемых типов и видов интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом сводятся к разрешающим интегральным уравнениям смешанного типа Вольтерра-Фредгольма фактически одного и того же вида

$$\mu(z)+\sum_{j=0}^{l}[\int_{x_0}^{V_j(z)} Q_j(z,t)\mu(t)dt +$$
$$+\lambda\int_{x_0}^{u_j(b)} N_j(z,t)\mu(t)dt\,]=B(z), \qquad (1)$$

где для ядер $Q_j(z,t)$, $N_j(z,t)$ и функции B(z), в упомянутых работах, получены определенные формулы. В работе [5] результаты исследований сведены в таблицу-схему, опираясь на которую рассмотрим возможные варианты решения таких уравнений в замкнутом виде.

Ядра $Q_j(z,t), N_j(z,t)$ и функция $B(z)$ в своей структуре содержат неопределенные параметры $r_i, i=\overline{1,n}$, за счет оптимального выбора которых можно пытаться получить решения в замкнутом виде.

Во-первых, решение в замкнутом виде получим, если в уравнении (1) параметры r_i, $i=\overline{1,n}$ таковы, что $B(z)\equiv 0$. Тогда разрешающее уравнение (1) будет однородным, его решение будет

$\mu(z)\equiv 0$ и решение первоначально поставленных начальных задач найдется по формуле функции гибкой структуры, откуда следует

$$y(z)=D^{-1}\sum_{s=1}^{n} y^{(s-1)}(x_0)\Delta_s(z-x_0), \qquad (2)$$

где определители D и $\Delta_s(z-x_0)$ вычисляются по формулам для функции гибкой структуры в работе [3].

Другой возможный вариант решения в замкнутом виде получим, если параметры $i=\overline{1,n}$ таковы что $Q_j(z,t)\equiv 0$

и $N_j(z,t) \equiv 0 \ \forall \ j=\overline{0,l}$. Тогда решение уравнения (1) будет $\mu(z) = B(z)$ и соответственно по формуле для функции гибкой структуры определятся решения начальных задач

$$y(z) = D^{-1}[\sum_{s=1}^{n} y^{(s-1)}(x_0)\Delta_s(z-x_0) + \\ + \int_{x_0}^{x} \Delta_n(z-t)\mu(t)dt]. \qquad (3)$$

Если за счет выбора параметров выполнить условия $B(z) \equiv 0$ или $Q_j\ (z,t) \equiv 0$ и $N_j(z,t) \equiv 0 \ \forall j=\overline{0,l}$ не удается, то можно попытаться при $N_j(z,t) \not\equiv 0$ сделать $Q_j\ (z,t) \equiv 0$.

В этом случае разрешающее уравнение будет интегральным уравнением Фредгольма и к нему применимы все известные методы решения в замкнутом виде интегральных уравнений Фредгольма (например, метод для вырожденных ядер).

Если же за счет выбора параметров удается сделать $N_j(z,t) \equiv 0 \ \forall j=\overline{0,l}$ при $Q_j\ (z,t) \not\equiv 0$, тогда получим разрешающее интегральное уравнение типа Вольтерра, для которых также в некоторых случаях известны возможные варианты решения в замкнутом виде.

Следует также заметить, что для некоторых частных видов разрешающих уравнений какие-то из вышеперечисленных условий могут выполняться автоматически.

Рассмотрим задачу Коши при начальном значении $x_0 = 0$ для уравнения запаздывающего типа

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x-1) - 2\int_0^1 e^x \eta y(\eta)dy = xe^{x-1}, \\ y(x) = x, y'(x) = 1 \text{ на } E_0^0 = [0], \\ y(x-1) = x-1, y'(x-1) = 1 \text{ на } E_0^1 = [-1,0] \end{cases}$$

Выпишем формулы функции гибкой структуры для *n*=2:

$$y(x) = \frac{1}{r_2 - r_1}\left[\sum_{s=1}^{2} y^{(s-1)}(x_0)\Delta_s(x-x_0) + \\ + \int_{x_0}^{x} \Delta_2(x-t)\mu(t)dt\right] = \frac{1}{r_2 - r_1} \times$$

$$\times\left[e^{r_2 x} - e^{r_1 x} + \int_0^x (e^{r_2(x-t)} - e^{r_1(x-t)})\mu(t)dt\right],$$

$$y'(x) =$$

$$\frac{1}{r_2 - r_1}[r_2 e^{r_2 x} - r_1 e^{r_1 x} + \int_0^x (r_2 e^{r_2(x-t)} - r_1 e^{r_1(x-t)})\mu(t)dt$$

$$],$$

$$y''(x) =$$

$$\frac{1}{r_2 - r_1}[r_2^2 e^{r_2 x} - r_1^2 e^{r_1 x} +$$

$$\int_0^x (r_2^2 e^{r_2(x-t)} - r_1^2 e^{r_1(x-t)})\mu(t)dt\ ] + \mu(x).$$

Для сокращения объема выкладок возьмем один из параметров равным нулю $r_1=0$ и по формулам таблицы-схемы, приведенной в работе [5], найдем

$$\Phi_0(x,t) = r_2^2 e^{r_2(x-t)},\ \Phi_1(x,t) = r_2 e^{r_2(x-1-t)},$$

$$H_0(x.t) = -\frac{2}{r_2}\int_t^1 e^x \eta(e^{r_2(\eta-t)} - 1)d\eta,$$

$$F(x) = xe^{x-1} - r_2^2 e^{r_2 x} -$$

$$x\, r_2 e^{r_2(x-1)} + 2\int_0^1 e^x \eta(e^{r_2\eta} - 1)d\eta =$$

$$= xe^{x-1} - r_2^2 e^{r_2 x} - x\, r_2 e^{r_2(x-1)} + 2e^x(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{2}).$$

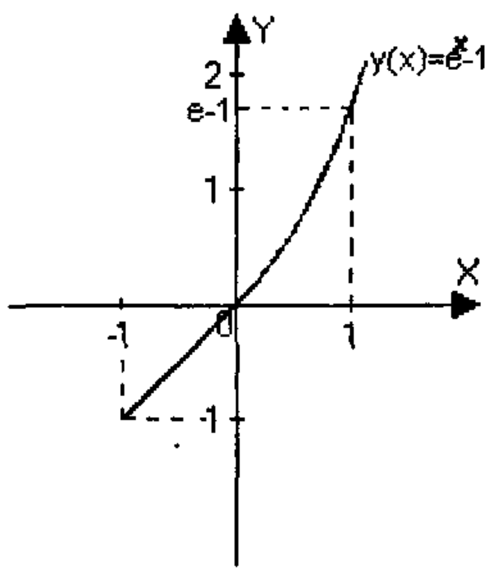

Рис. 1

Нетрудно увидеть, что оптимальное значение параметра $r_2=1$, при котором $F(x) \equiv 0$. Тогда разрешающее уравнение однородное, его решение $\mu(x)=0$. И решение поставленной задачи будет

$$y(x) = e^x - 1.$$

Найденная функция удовлетворяет всем условиям поставленной задачи, что хорошо видно из рис. 1.

Литература

1. Куликов Н.К. Элементы высшей математики на основе функций с гибкой структурой. – М., 1972.
2. Куликов Н.К. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой.// Тематический сб. МТИПП.-М.,1974.-267 с.
3. Шишкин Г.А. Исследования возможностей преобразования начальной задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа к уравнениям без отклонений аргумента // Сб. статей «Математика и методики ее преподавания». – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2002. – Вып. 3. – – С. 71-76.
4. Шишкин Г.А. Преобразование начальной задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с отклоняющимся аргументом нейтрального типа к уравнениям без отклонений аргумента // Материалы междунар. конф. «Математика, ее приложения и математическое образование». – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2002. – С. 139-145.
5. Шишкин Г.А. Таблица-схема результатов исследований преобразования задачи Коши для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом// Вестник Бурятского университета. – Математика и информатика. – Сер. 13, вып. 3. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2006.