© Д. Бользтогтох, Д. Халтар

Монголия, Улан-Батор, Национальный университет Монголии

Игровые модели коммерческой деятельности кредитных организаций на финансовом рынке олигополии

В этой работе исследуются две игровые модели максимизации доходности каждой кредитной организации, участвующей в конкурентной борьбе на финансовом рынке.

© D. Bolitogtokh, D. Haltar

Game models of commercial activity of credit organizations on finance market oligopoly

In this work we are investigated two game models maximizing the profit of each credit organization involving in competition on finance market oligopoly.

Введение

ой модели предлагается найти ıмальное количество кредита x_i, $i=1,\dots,N$, для i-го банка, когда максимальное значение кредитной ставки r задается Госбанком. Во второй модели основное внимание уделяется рекламе кредитной организации, которая должна привлечь деньги вкладчиков.

Эти две модели базируются на следующих аксиоматических предположениях о коммерческой деятельности кредитных организаций:

А) Каждая организация хочет максимизировать свою прибыль, но принятие решений зависит от поведения других.

Б) Они не вступают в договор друг с другом.

В) Каждый знает о стратегии других.

Следовательно, эти модели представляют собой некооперативные игры многих лиц, где оптимальные решения понимаются в смысле равновесия Нэша [3, 8,10].

§1. Кредитный рынок с государственной регуляризацией процентных ставок

Пусть на кредитном рынке олигополии ведут коммерческую деятельность N банков (кредитных организаций), где максимальное значение r кредитной ставки задается Государственным банком. Допустим, если i-й банк предлагает кредит в количестве x_i, то рыночная ставка его кредита зависит от r и $x=x_1+\dots+x_N$ следующим образом:

$$r_i=\min\left\{\frac{C}{x},r\right\}, \qquad (1)$$

где C-максимальный суммарный доход, который могут получить банки при достаточно большом количестве x предлагаемых кредитов. Как видим, в этой модели каждый банк не в состоянии установить свою ставку по процентам, она общая для всех и равна

$$r(x)=\min\left\{\frac{C}{x},r\right\} \text{ (см. рис.).}$$

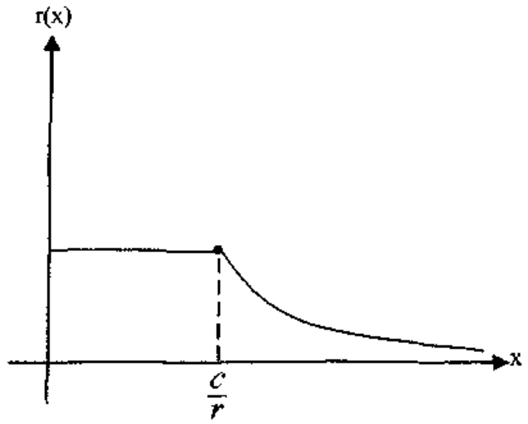
Пусть для каждого i-го банка процентная ставка r_{D_i} депозита D_i постоянна и выполняются соотношения

$$x_i+R_i=D_i,\ R_i=\alpha\cdot D_i, 0<\alpha<1, \qquad (2)$$

где R_i – необходимый резерв для i-го банка. Чистая прибыль i-го банка представим в виде

$$\Pi_i=r(x)\cdot x_i-r_{D_i}\cdot D_i-F_i. \qquad (3)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (совместный российско-монгольский проект 07-01-90101).



Здесь через F_i обозначен постоянный расход i-го банка, связанный с проведением финансовой операции. В силу (1)-(2) мы имеем

$$\Pi_i = \min\left(\frac{Cx_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i}, rx_i\right) - r_{D_i}\cdot\frac{x_i}{1-\alpha} - F_i. \quad (4)$$

Тогда задача максимизации чистой прибыли i-го банка выглядит как

$$\min\left(\frac{Cx_i}{\sum_{k=1}^{N} x_k}, rx_i\right) - r_{D_i}\cdot\frac{x_i}{1-\alpha} - F_i \to \max,$$

$$i = 1,\dots,N. \quad (5)$$

В силу теоремы 9 из [10] игра (5) имеет решение в смысле равновесия Нэша при выполнении некоторых естественных условий. Найдем это решение.

Введем следующие обозначения:

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i,$$

$$F_k(x_1,\dots,x_N) = F_k(x) = \left(p(\hat{x}) - \frac{r_D}{1-\alpha}\right)x_k,$$

$$p(\hat{x}) = \min\left[\frac{C}{\hat{x}}, r\right].$$

Можно считать, что $x_i \in X_i = \left[0, \frac{C(1-\alpha)}{r_D}\right]$. Действительно, при $x_i > \frac{C(1-\alpha)}{r_D}$ выполнены неравенства $\frac{r_D}{1-\alpha} > C/x_i \ge p(\hat{x})$ и прибыль i- го банка отрицательна.

Найдем ситуацию равновесия полученной игры при условии, что

$$r > \max\left[\max_{2\le i\le N}\frac{i\cdot\frac{r_D}{1-\alpha}}{i-1}, \frac{r_D}{1-\alpha}\right], \quad (6)$$

Утверждение. Функция наилучшего ответа i-го банка имеет вид

$$f_i(x_l, l\ne i) = \max\left[g_i(x_l, l\ne i), \frac{C}{r} - \sum_{l\ne i} x_l, 0\right],$$

где

$$g_i(x_l, l\ne i) = \sqrt{\frac{C(1-\alpha)}{r_D}\sum_{l\ne i} x_l} - \sum_{l\ne i} x_l.$$

Доказательство. Заметим, что для функции наилучшего ответа f_i выполнено неравенство

$$\sum_{l\ne i} x_l + f_i(x_l, l\ne i) \ge \frac{C}{r}. \quad (7)$$

Действительно, в противном случае $p(\sum_{l\ne i} x_l + f_i(x_l, l\ne i)) = r$ и, имея доход в количестве $f_i(x_l, l\ne i) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ мало, i-й банк увеличивает свою прибыль, что противоречит определению функции f_i.

Далее, всегда

$$\max\left[g_i(x_l, l\ne i), \frac{C}{r} - \sum_{l\ne i} x_l\right] < \frac{C(1-\alpha)}{r_D}.$$

Определим множество

$$X_i^1 = \left\{x_i \in X_i \,\middle|\, \frac{C}{r} - \sum_{l\ne i} x_l \le x_i\right\}.$$

Из равенства (6) вытекает, что

$$\max_{x_i\in X_i}\left(p(\hat{x}) - \frac{r_D}{1-\alpha}\right)x_i = \max_{x_i\in X_i^1}\left(\frac{C}{\hat{x}} - \frac{r_D}{1-\alpha}\right)x_i.$$

$$\max_{x_k\in X_k}(p(\hat{x}) - c_k)x_k = \max_{x_k\in X_k^1}\left(\frac{a}{\hat{x}} - c_k\right)x_k.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что функция $(C/\hat{x} - r_D/(1-\alpha))x_i$ строго вогнута по переменной x_i и на E^i достигает максимального значения в точке $g_i(x_l, l\ne i)$.

Для нахождения ситуации равновесия рассмотрим систему уравнений

$$f_i(x_l, l\ne i) = x_i,\ i = 1,\dots,N. \quad (8)$$

Будем искать ситуацию равновесия среди таких сиуаций x, для которых выполнены равенства:

$$f_i(x_l, l\ne i) = g_i(x_l, l\ne i),\ i = 1,\dots,N. \quad (9)$$

Тогда система (8) перепишется в виде

$$\sqrt{\frac{C(1-\alpha)}{r_D}\sum_{l\neq i} x_l} - \sum_{l\neq i} x_l = x_i,\ i=1,\dots,N,$$

или

$$\sqrt{\frac{C(1-\alpha)}{r_D}(\hat{x}-x_i)} = \hat{x},\ i=1,\dots,N.$$

Отсюда находим ее решение

$$x_i^0 = \hat{x}^0(1-c_i\hat{x}^0/C),\ i=1,\dots,N,$$

где $\hat{x}^0 = (N-1)\dfrac{NC(1-\alpha)}{r_D}$.

Чтобы x_i^0 были неотрицательны, достаточно, чтобы было выполнено только одно неравенство $x_N^0 \geq 0$, или

$$\frac{r_D}{1-\alpha} \leq \frac{\frac{Nr_D}{1-\alpha}}{N-1} \Leftrightarrow \frac{r_D}{1-\alpha} \leq \frac{\frac{(N-1)r_D}{1-\alpha}}{N-2}. \quad (10)$$

Из (6) следует неравенство

$$g_i(x_l^0, l\neq i) \geq \frac{C}{r} - \sum_{l\neq i} x_l^0$$

и, следовательно, равенство (9). Таким образом, при условии (10) ситуация равновесия найдена.

Пусть вместо (10) выполнены неравенства

$$\frac{r_D}{1-\alpha} \leq \frac{\frac{(N-2)r_D}{1-\alpha}}{N-3},\quad \frac{r_D}{1-\alpha} > \frac{\frac{(N-1)r_D}{1-\alpha}}{N-2}. \quad (11)$$

Покажем, что в этом случае ситуация равновесия имеет вид:

$$x_i^0 = \hat{x}^0(1-\frac{r_D}{1-\alpha}\hat{x}^0/C),$$

$$i=1,\dots N-1,\quad x_N^0 = 0,$$

где $\hat{x}^0 = (N-2)C\Big/\left(\dfrac{(N-1)r_D}{1-\alpha}\right)$.

Банком с номерами $i=1,\dots,N-1$, невыгодно отклоняться от своих стратегий x_i^0, образующих ситуацию равновесия игры $N-1$ лица. Покажем, что N-му банку невыгодно производить товар. Действительно, из условий (6) и (11) вытекают неравенства

$$\frac{r_D}{1-\alpha} \leq \frac{\frac{(N-3)r_D}{1-\alpha}}{N-4},\quad \frac{r_D}{1-\alpha} > \frac{\frac{(N-2)r_D}{1-\alpha}}{N-3}$$

и т.д.

§2. Роль рекламы в конкурентной борьбе банков на рынке сбережения

В предыдущих частях мы уже отмечали роль рекламы на рынке олигополии. Теперь рассмотрим также математическую модель максимизации чистых прибылей N коммерческих банков, только в отличие от предыдущего случая будем считать, что каждый банк проводит рекламную деятельность, чтобы привлекать к себе вкладчиков. Кроме того, будем считать, что каждый банк в состоянии установить ставку кредита через рекламы. Сделаем естественное предположение о том, что кто делает много реклам, тот привлекает много вкладчиков (т.е много денег) при равных депозитных ставках. Пусть $y_i\ (0\leq y_i \leq r)$ - процентная ставка депозита, которую предлагает i-й банк, a_i – число, характеризующее объем рекламы, который проводит i-й банк. Тогда оплату i-го банка по его ставке выразим формулой

$$\frac{a_k y_k C}{\sum_{k=1}^{N} a_k y_k + A}\cdot y_i,$$

где C – предложение рынка для депозита, $\dfrac{a_i y_i}{\sum_{k=1}^{N} a_k y_k + A}$ – вероятность привлечения денег i-м банком, $A>0$ – фактор, препятствующий привлечению вкладчиков. Через $d>0$ обозначим общую для всех цену рекламы. Это означает, если реклама идет через телевизор, то d выражает цену рекламы за единицу времени, а если через газету, то цену печатных листов и т.д. Мы предполагаем, что кредитная ставка r постоянна, а весь депозит D_i i-го банка зависит от предлагаемых ставок следующим образом:

$$D_i(y_1,\dots,y_N) = \frac{a_k y_k}{\sum_{k=1}^{N} a_k y_k + A}\cdot C.$$

Тогда задача максимизации чистой прибыли i-го банка выглядит как

$$\Pi_i(y_1,\dots,y_N) = r\cdot\frac{a_i y_i C(1-\mu)}{\sum_{k=1}^{N} a_k y_k + A} - \frac{a_i y_i^2 C}{\sum_{k=1}^{N} a_k y_k + A} - \tilde{F}_i - da_i \to \max, \quad (12)$$

$$0\leq y_i,\ i=1,\dots,N,$$

где da_i – затрата на рекламу, $\tilde{F}_i$ – другие расходы (постоянные), μ – установляемая госбанком доля депозита, которая не подлежит кредитованию. В этой модели неявно предполагается, что каждый банк через рекламу собирает деньги потенциальных вкладчиков в виде сбережения, а потом $(1-\mu_i)$-ю часть из них раздают потенциальным заемщикам в виде кредита с постоянной ставкой r. Согласно нашим предположениям, вероятность неотдачи своих денег этим банкам равна

$$\frac{A}{\sum_{k=1}^{N} a_k y_k + A},$$

а количество денег, находящееся вне этих банков, соответственно равно

$$\frac{AC}{\sum_{k=1}^{N} a_k y_k + A}.$$

При фиксированных $k \neq i$ функция (12) имеет унимодальный вид, т.е. строго квазивогнутый вид с единственным максимумом, и поэтому решения задач (12) в смысле равновесия Нэша находятся из условий:

$$\Pi'_{iy_i}(y_1,\ldots,y_N) = 0,$$

$$r\left(\sum_{k\neq i} a_k y_k + A\right)(1-\mu) - a_i y_i^2 -$$

$$-2y_i\left(\sum_{k\neq i} a_k y_k + A\right) - y_i(1-\mu)a_i = 0,$$

$$i = 1,\ldots,N.$$

Решая эту систему из N уравнений с N неизвестными, мы определяем единственную точку равновесия: $y^* = (y_1^*,\ldots,y_N^*)$.

Литература

1. Антонов А.В., Поманский А.Б. Рационирование кредитов и алгоритм эффективности распределения заемных средств // Экономика и математические методы. – 1994.
2. Annual Report, 2004, Bank of Mongolia. Ulaanbaatar
3. Воробъев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. – М.,1984.
4. Дашням Ц. Финансово-кредитные методы регулирования рыночных отношений в Монголии. – 2003.
5. Чулуунбаатар Н. Вопросы оптимизации управление финансовами средствами коммерческого банка. – Улан-Батор.
6. Синки Дж. Ф. Управление финансами в коммерческих банках. – М.: Catallaxy, 1994.
7. Sealey, C.W. and Linndley S.T. Inputs, Outputs, and Theory of Production and Cost at Depository Financial Institutions // Journal of Finance, 1977.
8. Петросян Л.А, Зенкевич Н.А, Семина Е.А. Теория игр. – М., 1998.
9. Чулуунбат О. Бюджетная и денежно-кредитная политика Монголии при переходе к рыночной экономики. – Улан-Батор, 2002.
10. Морозов Ю.М. Теории игр. – М.: Изд-во МГУ, 2000.