В.В. Кибирев

Россия, Улан-Удэ, Бурятский государственный университет

Гармонические функции и теория потенциала

В статье рассматривается связь гармонических функций с потенциалом распределения масс в некоторой области трехмерного пространства. Доказаны две теоремы о том, что если плотность масс ограничена и интегрируема в области, то потенциал и его первые производные равномерно непрерывны, а также если плотность потенциала удовлетворяет условию Гельдера, то этот потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона.

V.V. Kibirev

Harmonic functions and the potential's theory

В области D с границей Г пространства R^n переменных $x_1,\ldots, x_n$ рассмотрим функцию $U(x_1,\ldots, x_n)$=U(X) точки X = $(x_1,\ldots \ldots, x_n)$. Дифференциальное уравнение

$$\Delta u \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0 \qquad (1)$$

называется уравнением Лапласа, а его решения - гармоническими функциями. Соответствующее неоднородное уравнение, которое будем писать в виде

$$\Delta u = -\omega_n \mu(X), \qquad (2)$$

где $\omega_n = 2\left(\sqrt{\pi}\right)^n \left[\Gamma(n/2)\right]^{-1}$ – площадь единичной сферы пространства R^n, есть уравнение Пуассона, причем $\mu(X)$ – заданная функция точки $X\in D$. Если область D ограничена, то обладающее непрерывными вторыми производными в D решение уравнения Лапласа считается регулярной гармонической функцией. Аналогично, если $\mu(X)$ непрерывна в D, то решение уравнения Пуассона с непрерывными вторыми производными называется регулярным в D.

Пусть $n=3$, а $f(w,t)$ – аналитическая функция комплексного переменного w. Непосредственной подстановкой в уравнение Лапласа нетрудно проверить, что функция $u=f(z+ ix\cos t + iy\sin t,\ t)$ при любом t удовлетворяет этому уравнению, а отсюда следует, что при любых фиксированных a и b

$$u(x,y,z) = \int_a^b f(\mathrm{z} + \mathrm{ix}\cos \mathrm{t} + \mathrm{iy}\sin \mathrm{t}, \mathrm{t})\,dt \qquad (3)$$

является решением уравнения Лапласа. Если в этой формуле положим

$$f(w,t)=w^n \exp imt,\ a=-\pi,\ b=\pi,$$

то получим однородный гармонический полином $u(x,y,z) =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{z} + \mathrm{ix}\cos \mathrm{t} + \mathrm{iy}\sin \mathrm{t})^n \exp imtdt,$$

который в сферических координатах $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$ принимает вид

$$_{\pm}n = 2r^n \ell_{\pm}^{im\varphi} \int_0^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos t)^n \times$$

$$\times \cos mtdt = r^n P_n^m(\cos\theta)\exp im\varphi,$$

где $P_n^m(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра

$$P_n^m(\cos\theta) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{2^m (n-m)!m!}(\sin\theta)^m \times$$

$$\times F\left(m-n, m+n+1; m+1; (1-\cos\theta)/2\right).$$

Здесь $F(\alpha, \beta; \gamma; s)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, которая при $m \le n$ превращается в полином [2].

В сферических координатах при $n=3$ оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r \sin\theta\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(u_\theta \sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(u_\varphi / \sin\theta\right)\right].$$

Пусть $u(x, y, z)$ - регулярная в ограниченной области гармоническая функция, рассмотрим функцию

$$v(x,y,z) = r^{-1}u\left(x/r^2, y/r^2, z/r^2\right),$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Она определена в области D', получающейся из области D инверсией относительно единичной сферы S:$\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Непосредственным подсчетом проверяется соотношение

$$r^5 \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r \sin\theta\right) = = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 u_\rho \sin\theta\right),$$

где $\rho = r^{-1}$. Из этого равенства и вида оператора Лапласа *в сферических координатах* следует, что функция $v(x, y, z)$ гармонична во всех конечных точках области D'. В пространстве R^n, $n>3$, наряду с функцией $u(x_1, ..., x_n)$ гармонична функция

$$v(x_1, ..., x_n) = r^{2-n} u(x_1/r^2, ..., x_n/r^2), \quad (4)$$

что можно проверить подстановкой в уравнение.

Пусть гармоническая функция u регулярна в ограниченной области D. Возьмем некоторую внутреннюю точку области D и осуществим инверсию относительно единичной сферы с центром в этой точке, без ограничения общности считая эту точку началом координат. Область D переходит при этом в область D', лежащую во внешности образа Г', границы Г области D. Гармоническую функцию v, которая получается из u по формуле (4), будем называть регулярной в области D'. Следовательно, регулярность гармонической функции в области D, простирающейся до бесконечности, определим так: при помощи инверсии относительно сферы с центром во внешней для D точке область D переводим в ограниченную область D'. Гармоническая функция u называется регулярной в D, если соответствующая ей функция v регулярна в D'. В частности, если D содержит некоторую *окрестность бесконечно удаленной* точки, а u такова, что v регулярна в D', то u называется регулярной в бесконечности. В силу этого определения при $n \geq 3$ гармоническая функция $u(x_1, ..., x_n) \equiv const$ не регулярна на бесконечности.

Найдем решения уравнения Лапласа φ(r), зависящие только от $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$. Непосредственным подсчетом из уравнения Лапласа получаем для φ (r)

$$\varphi'' + (n-1) r^{-1} \varphi' = 0,$$

общее решение которого имеет вид $\varphi(r) = C_1 \ln r + C_2$, $n=2$, $\varphi(r) = C_1 r^{2-n} + C_2$, $n \geq 3$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Рассмотрим функции

$$\gamma(r) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n}, \quad n \geq 3,$$

$$\gamma(r) \frac{1}{2\pi} \ln\frac{1}{r}, \quad n = 2, \quad r^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \xi_k)^2.$$

Эти функции при $r=0$ имеют так называемую характеристическую особенность. Любое решение уравнения Лапласа, заданное в области D:

$$\psi(x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n) = \gamma(r) + w,$$

где $\Xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – внутренняя точка области D, а w – регулярная в области D гармоническая функция, называется фундаментальным решением с особенностью в точке Ξ.

Нетрудно построить решение с характеристической особенностью и для более общего уравнения $\Delta u + cu = 0$, где с – некоторая постоянная. Для решений вида

$$u = \psi(r), \quad r^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \xi_k)^2,$$

этого уравнения теперь получаем

$$\psi'' + \frac{n-1}{r} \psi' + c\psi = 0,$$

а в результате замены переменных $\rho = r\sqrt{c}, \psi(r) = r^{-(n-2)/2} \varphi(r\sqrt{c})$ приходим к уравнению Бесселя [3]:

$$\varphi'' + \frac{1}{\rho}\varphi' + \left[1 - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \frac{1}{\rho^2}\right]\varphi = 0.$$

Искомое решение с характеристической особенностью является неограниченным при ρ = 0 решением этого уравнения и имеет вид

$$\psi(r) = r^{-\frac{1}{2}(n-2)} J_{-\frac{1}{2}(n-2)}\left(r\sqrt{c}\right), \quad n = 2k+1,$$

$$\psi(r) = r^{-\frac{1}{2}(n-2)} N_{\frac{1}{2}(n-2)}\left(r\sqrt{c}\right), \quad n = 2k.$$

Здесь J_ν – функция Бесселя, N_ν - функция Неймана:

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^k k! \Gamma(\nu + k + 1)},$$

$$\pi N_\ell(z) = 2J_\ell(z)\left[\ln z/2 + C\right] -$$

$$-\sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(\ell - k - 1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\ell} -$$

$$-\left(\frac{z}{2}\right)^{\ell}\frac{1}{\ell!}\sum_{k=1}^{\ell}\frac{1}{k}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+\ell)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\ell+2k}\left[\sum_{m=1}^{\ell+k}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right],$$

где $\ell+1$ – натуральное число, а C – постоянная Эйлера.

При $n=3$ фундаментальное решение уравнения Лапласа можно взять в виде 1/4 πr. Физически функция

$$r^{-1}=\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-1/2}$$

является гравитационным потенциалом, который создается в точке $P=(x,y,z)$ единичной массой, сосредоточенной в точке $Q=(\xi,\eta,\zeta)$.

Пусть $\mu(\xi,\eta,\zeta)$ – функция, заданная в области D. Интеграл

$$u(x,y,z)=\int_D\frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\xi d\eta d\zeta \qquad (5)$$

называется потенциалом пространственного распределения масс с плотностью μ в области D. В общем случае интеграл

$$u(X)=\int_D\mu(Q)\gamma(r)\,d\xi_1...d\xi_n, \qquad (5a)$$

$$X=(x_1,...,x_n),\ Q=(\xi_1,...\xi_n)),$$

$$r^2=\sum_{R=1}^{n}(x_R-\xi_R)^2,$$

также называется потенциалом распределения масс в области D с плотностью μ. Если точка X лежит во внешности области D, то потенциал $u(X)$ в этой точке является гармонической функцией. Это легко показать, дифференцируя под знаком интеграла. Если же $X\in D$ и μ имеет непрерывные производные, то потенциал (5a) удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u=-\mu(X)$. Более подробно рассмотрим только случай $n=3$.

Теорема 1. *Если плотность $\mu(X)$ в (5) ограничена и интегрируема в области D, то потенциал (5) и его первые производные равномерно непрерывны, при чем эти производные можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$u_\delta(x,y,z)=\int_D\mu(\xi,\eta,\zeta)\,f_\delta(r)\,d\xi d\eta d\zeta,$$

$f_\delta(r)$ – вспомогательная положительная функция, совпадающая с $1/r$ при $r\geq\delta$, т.е.

$$f_\delta(r)=\begin{cases}\frac{1}{2\delta}\left(3-r^2/\delta^2\right), & r\leq\delta.\\ 1/r, & r>\delta.\end{cases}$$

Имеет место неравенство

$$|u_\delta-u|=$$

$$=\left|\int_{\Sigma(\delta)}\mu(\xi,\eta,\zeta)\left[f_\delta(r)-r^{-1}\right]d\xi d\eta d\zeta\right|\leq$$

$$\leq M\int_{\Sigma(\delta)}\left[f_\delta(r)+r^{-1}\right]d\xi d\eta d\zeta=$$

$$=4\pi M\int_0^\delta\left[f_\delta(r)+r^{-1}\right]r^2dr=\frac{18}{5}\pi M\delta^2,$$

где M – максимум $|\mu|$, а $\Sigma(\delta)$ – шар $r<\delta$. Из этого неравенства следует, что при $\delta\to0$ последовательнсть u_δ равномерно сходится к потенциалу u и u равномерно непрерывен в D.

Из дифференцируемости функции $f_\delta(r)=g(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)$ вытекает дифференцируемость u_δ, причем

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x}=\int_D\mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial x}f_\delta(r)\,d\xi d\eta d\zeta.$$

Рассмотрим сходящийся интеграл

$$w(x,y,z)=$$

$$=\int_D\mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta, \qquad (6)$$

который получается формальным дифференцированием выражения под знаком интеграла (5). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}u_\delta-w=\ .$$

$$=\int_{\Sigma(\delta)}\mu(\xi,\eta,\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial x}f_\delta(r)-\frac{\partial}{\partial x}r^{-1}\right]d\xi d\eta d\zeta,$$

\откуда следует неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}u_\delta-w\right|\leq$$

$$\leq4\pi M\int_0^\delta\left(\left|\frac{\partial}{\partial x}f_\delta(r)+r^{-2}\right|\right)r^2dr=5\pi M\delta.$$

Это значит, что последовательность $\frac{\partial}{\partial x}u_\delta$ равномерно сходится к w, поэтому $w=u_x$ и w равномерно непрерывна.

Определение 1. *Функцию μ будем называть непрерывной, по Гельдеру, в области D с показателем α, $0<\alpha\leq1$, и с коэффициентом K, если для любой пары точек P и Q области D справедливо неравенство*

$$|\mu(P)-\mu(Q)|\le K\left[L(P,Q)\right]^{\alpha},$$

где L(P,Q) – расстояние между точками P и Q.

Неравенство в этом определении называется условием Гельдера, а о функции μ иногда говорят, что она удовлетворяет условию Гельдера.

Теорема 2. *Если плотность μ(X) потенциала (5) удовлетворяет условию Гельдера в области D, то этот потенциал имеет непрерывные вторые производные и удовлетворяет уравнению Пуассона*

$$\Delta u = -4\pi\mu.$$

Доказательство проведем для случая, когда плотность $\mu(X)$ непрерывно дифференцируема. При таком предположении в формуле (6) можно проинтегрировать но частям. Имеем

$$u_x=\int_D \mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta =$$
$$=-\int_D \mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta =$$
$$=\int_D \mu_\xi \frac{1}{r}d\xi d\eta d\zeta-\int_\Gamma \mu r^{-1}\nu_1 dS,$$

где dS – элемент площади границы Г области D, а ν_1 – косинус угла между внешней нормалью к Г и осью $O\xi$. В равенстве для u_x можно дифференцировать выражение под знаком интеграла в силу тех же обстоятельств, что и в доказательстве теоремы 1. После дифференцирования получим

$$u_{xx}(P)=-\int_\Gamma \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\nu_1 dS+ \\ +\int_D \mu_\xi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta. \tag{7}$$

Так как точка $P=(x, y, z)$ не зависит от точки $Q=(\xi,\eta,\zeta)$, $\frac{\partial}{\partial\xi}\mu(P)=0$, последний интеграл в (7) можно записать так:

$$J=\int_D\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\mu(Q)-\mu(P)\right]\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta.$$

Из-за того, что функция

$$h(Q)=\mu(Q)-\mu(P)$$

в точке P имеет нуль первого порядка, в предыдущем интеграле можно осуществить интегрирование по частям, в результате чего находим

$$J=\iint_\Gamma\left[\mu(Q)-\mu(P)\right]\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\nu_1 dS-$$
$$-\iint_D\left[\mu(Q)-\mu(P)\right]\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta.$$

Подставив это выражение для J в (7) и воспользовавшись равенством

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x}r-1=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}r^{-1},$$

приведем (7) к виду

$$u_{xx}(P)=-\mu(P)\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\nu_1 dS+ \\ +\iint_D\left[\mu(Q)-\mu(P)\right]\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta. \tag{8}$$

Аналогичные формулы получаются и для u_{yy}, u_{zz}:

$$u_{yy}=-\mu(P)\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\nu_2 dS+$$
$$+\iint_D\left[\mu(Q)-\mu(P)\right]\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta,$$
$$u_{zz}(P)=-\mu(P)\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\nu_3 dS+ \\ +\iint_D\left[\mu(Q)-\mu(P)\right]\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta, \tag{9}$$

где ν_2 и ν_3 – косинусы углов, составленных внешней нормалью к Г с осями $O\eta$ и $O\zeta$ соответственно.

Из формул (8) и (9) следует непрерывность вторых производных функции u и равенство

$$\Delta u=-\mu\iint_\Gamma\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\nu_1+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\nu_2+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\nu_3\right]dS=-4\pi\mu.$$

При помощи формулы Гаусса–Остроградского [2] в силу гармоничности r^{-1} вычисление этого интеграла можно свести к вычислению аналогичного интеграла по сфере $L(P,Q)=\delta$, а этот последний интеграл вычисляется явно[1],[4],[5].

Литература

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 204с.

2. Гобсон Е.В. Теорема сферических и эллипсоидальных функций. – М.: ИЛ, 1952. – 476 с.

3. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

4. Якушаускас А. К задаче о наклонной производной для эллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. – 1975. – Т. 16. – № 2. – С. 405-408.

5. Якушаускас А. Аналитическая теория эллиптических уравнений. – Новосибирск: Наука, 1979. – 192 с.