© А.В. Бадеев
Россия, Улан-Удэ, Бурятский государственный университет

Топологический ранг многообразия n_3n_2 коммутативных альтернативных ниль-алгебр индекса 3 над полем характеристики 3

В статье доказана теорема о топологическом ранге многообразия n_3n_2 коммутативных альтернативных ниль-алгебр индекса 3 над полем характеристики 3.

© A.V. Badeev

Topological rank of manifold n_3n_2 of commutative alternative nil-algebras with index 3 under the field with characteristic 3

The theorem on topological rank of manifold n_3n_2 of commutative alternative nil-algebras with index 3 under the filed with characteristic 3 is proved in the article.

Положим, $\boldsymbol{D}$ – многообразие коммутативных альтернативных ниль-алгебр индекса 3 над полем Φ характеристики 3 с тождествами

$$x^3 = 0,$$
$$[(x_1x_2)(x_3x_4)](x_5x_6) = 0.$$

В работе приведен базис пространства полилинейных многочленов свободной алгебры $F(\boldsymbol{D})$ и найден топологический ранг $r_t(\boldsymbol{D}_n)$ многообразий

$$\boldsymbol{D}_n = \boldsymbol{D} \cap Var((xy \cdot zt)x_1 \ldots x_n).$$

Вспомогательная алгебра

Построение вспомогательной алгебры A проведем с помощью конечномерной супералгебры B.

Положим,

$$E_0 = \{ a, a^2 \}, E_1 = \{ x, ax, a^2x \},$$
$$E = E_0 \cup E_1 , B = \Phi(E_0) + \Phi(E_1).$$

Назовем *четными* элементы пространства $\Phi(E_0)$, *нечетными* – элементы пространства $\Phi(E_1)$.

Положим, что умножение суперкоммутативно, т.е. выполняется супертождество

$$x_i \cdot y_j = (-1)^{ij} y_j \cdot x_i ,$$

где $x_i , y_i \in E_i$.

Определим суперкоммутативное умножение на базисных элементах следующим образом:

$$a \cdot a = a^2 ,$$
$$a \cdot x = ax , a^2 \cdot x = ax \cdot a = a^2x ,$$
$$ax \cdot x = a , a^2x \cdot x = - a^2.$$

Остальные произведения полагаем нулевыми.

Легко видеть, что

$$B \backslash B^2 = \Phi\{x\}, B^2 \backslash B^{(2)} = \Phi\{a, ax \},$$
$$B^{(2)} = \Phi\{a^2, a^2x \}, (B^2)^3 = 0.$$

Покажем, что в супералгебре B выполняется супертождество

$$(z \cdot x_i)y_j + (-1)^{ij}(z \cdot y_j)x_i + z \cdot (x_i \cdot y_j) = 0,$$

где $x_i , y_i \in E_i$. Это супертождество соответствует линеаризованному тождеству альтернативности.

Достаточно проверить это супертождество на базисных элементах, причем в силу суперкоммутативности при проверке порядок подстановки базисных элементов вместо переменных в супертождестве не имеет значения. Как легко заметить, для $x_i = y_j = x, ax \in E_1$ супертождество тривиально. Таким образом, учитывая соотношение $(B^2)^3 = 0$, остается проверить супертождество для следующих троек базисных элементов:

$$\{a, a, x\}, \{ ax, a, x\}.$$

В первом случае получим

$$(a \cdot a) \cdot x + (a \cdot x) \cdot a + a \cdot (a \cdot x) = 3a^2x = 0.$$

Во втором случае

$$(ax \cdot a) \cdot x + (ax \cdot x) \cdot a + ax \cdot (a \cdot x) =$$
$$= -a^2 + a^2 = 0.$$

Супертождество проверено. Таким образом, B – альтернативная супералгебра.

Теперь можем заключить, что грассманова оболочка $A = G(B)$ - коммутативная альтернативная алгебра с соотношениями $x^3 = 0$, $(A^2)^3 = 0$, т.е.

$$A\in \mathbf{D},\ A\notin \mathbf{D}_n,\ c^3d \neq 0.$$

Центрально-метабелево многообразие

Лемма 1.

1. *Базис пространства $P_n(F^{(2)}(\mathbf{C}))$ при $n = 4t$ или $n = 4t + 3$ составляют полилинейные одночлены вида:*

а) $x_1x_i\,\varphi_{i,j}(x_2x_j)$, $2 < i < j$;

б) $x_1x_i\,\varphi_{i,3}(x_2x_3)$, $i > 3$.

2. *При $n = 4t + 1$ или $n = 4t + 2$ базис пространства $P_n(F^{(2)}(\mathbf{C}))$ составляют элементы типа а) и б) и полилинейный одночлен:*

в) $x_1x_5\,\varphi_{5,4}(x_2x_4)$.

Базис свободной алгебры $F(\mathbf{D})$

Построим базис каждого из пространств $P(F_p^{(2)}/F_{p+1}^{(2)})$. Ясно, что $F_0^{(2)}/F_1^{(2)} = F^{(2)}(C)$, где $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{D}$ многообразие центрально-метабелевых алгебр.

Положим, H_n – система базисных элементов пространства $P_n(F_0^{(2)}/F_1^{(2)})$.

Обозначим, $\xi_{n,p} = x_{n-p+1}' \ldots x_n'$ – операторное слово длины p,

$e_n = x_1x_5\,\varphi_{5,4}\cdot x_2x_4\in H_n$,

$e_{n,p} = e_{n-p}\,\xi_{n,p}$,

$H_n' = \{ x_1x_4\,\varphi_{4,j}\cdot x_2x_j\in H_n \}$.

Действие перестановок симметрической группы на пространстве многочленов длины n определим стандартным образом.

Лемма 2. Базис пространства $P_n(F_p^{(2)}/F_{p+1}^{(2)})$, где $1\leq p \leq n-4$, составляют элементы следующей системы (обозначим эту систему $E_{n,p}$):

1) $H_{n,p} = \{b\xi_{n,p} \mid b\in H_{n-p}\}$;

2) $H_{n,p}'(1k)=\{b\,(1k) \mid b\in H_{n,p}'\}$, где $k = n-p+1$;

3) $e_{n,p}\,(1i)(2j)$ для всех $i, j\in\{1,2\}\cup Z_{n,p}$, $i<j$, $\{ i, j \}\neq\{1,2\}$.

Найдем топологический ранг многообразий $\mathbf{D}_n$. Для этого понадобятся следующие утверждения.

Лемма 3. *Пусть $\mathbf{M}$ – шпехтово многообразие, $V\subset \mathbf{W}\subset\beta(\mathbf{M})$ и для любого $\mathbf{\Omega} \subset \mathbf{W}$ существует n такое, что $U_n(\Omega) \subset \mathbf{W}$.*

Тогда

$$r_t(\mathbf{W}) \leq r_t(V)+1.$$

Лемма 4. *Пусть $f_t\in F_t^{(2)}/F_{t+1}^{(2)}$ – ненулевой многочлен длины r, тогда существует полилинейный многочлен $g_t\in F_t^{(2)}/F_{t+1}^{(2)}$ той же длины, такой, что*

$$T(f_t)/F_{t+1}^{(2)} = T(g_t)/F_{t+1}^{(2)}.$$

$$T(f_t)=T(f_t'\psi_t)=T(e_{m-t,0}\xi_{m,t})=T(e_{m,t}).$$

Лемма 5. *Для любого $\mathbf{M} \in \Delta_p$ существует s такое, что*

а) *для* $p = 0$ $U_s(M) \subseteq Nilp$;

б) *для* $p \neq 0$ $U_s(M) \subseteq \Delta_{p-1}$.

Теорема. *Топологический ранг $r_t(\mathbf{D}_n) = n+2$.*

Доказательство. Ясно, что $Nilp \subset \Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \ldots \subset \Delta_{n-1} \subset \Delta_n = \mathbf{D}_n$.

Из леммы 3 и леммы 5

$$r_t(\Delta_0) \leq r_t(Nilp) + 1,$$

$$r_t(\Delta_p) \leq r_t(\Delta_{p-1}) + 1 \text{ для } 1\leq p \leq n.$$

Отсюда

$$r_t(\mathbf{D}_n) \leq n+2.$$

Осталось показать, что

$$r_t(\mathbf{D}_n) \geq n+2.$$

Положим, $\sum_p$ – множество всех подмногообразий $\mathbf{D}_p$. Пример вспомогательной алгебры $A\in\mathbf{D}$, в которой $e_{m,k} \notin T(A)$ показывает, что $\mathbf{D}_p\in(\sum_p\setminus\sum_{p-1})'$. Следовательно,

$$r_t(\mathbf{D}_n) = r_t(\textstyle\sum_n) > r_t(\sum_{n-1}) > \ldots > r_t(\sum_2) > > r_t(\mathbf{C}) > r_t(\mathbf{B}) \geq 2,$$

где $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{D}$ – центрально-метабелево многообразие. Тогда $r_t(\mathbf{D}_n) \geq n+2$.

Литература

1. Жевлаков К.А., Слинько К.А., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. – М., Наука, 1978.

2. Пчелинцев С.В. Разрешимые индекса 2 многообразия алгебр // Матем. сб. – 1981. – Т. 115, – С. 179-203.

3. Шестаков И.П. Супералгебры и контрпримеры // Сибирский математический журнал. – 1991. – Т. 32, № 6.