© Т.Г. Дармаев
Россия, Улан-Удэ, Бурятский государственный университет

Учет непараллельности в течении Блазиуса

В данной работе непараллельность основного потока в пограничном слое учитывается использованием оптимальных параболических координат предложенных Каплан. Для малых возмущений получено уравнение, подобное уравнению Орра-Зоммерфельда.

© T.G. Darmaev

The account of the nonparallelity in the Blasius flow

In this work nonparallelity of the main flow in the boundary layer is taken into consideration by using of the Kaplun's optimal parabolic coordinates. For the small disturbances the equation similar to the Orr-Sommerfeld is obtained.

Рассмотрим плоское течение вязкой несжимаемой жидкости над полубесконечной пластиной. Пусть u и v обозначают компоненты скорости в x и y направлениях соответственно; Φ и $f=\Phi/\nu$ обозначают соответственно размерные и безразмерные функции тока и ν – вязкость. Оптимальные параболические координаты, позволяющие учесть непараллельность основного потока, вводятся как в [2]:

$$x+iy=(\sigma+i\eta)^2\frac{\nu}{2U}, \qquad (1)$$

где i – мнимая единица, U – скорость основного потока на бесконечности.

Уравнение для функции тока преобразуется к виду:

$$(f_{\sigma\sigma}+f_{\eta\eta})_\tau+f_\eta P_\sigma-f_\sigma P_\eta=P_{\sigma\sigma}+P_{\eta\eta}, \qquad (2)$$

где $P=(f_{\sigma\sigma}+f_{\eta\eta})/(\sigma^2+\eta^2)$, $\tau=U^2t/\nu$ обозначает безразмерное время, а нижние индексы $\sigma,\eta,\sigma\sigma,\eta\eta$ и τ обозначают частные производные.

Рассмотрим функцию тока в виде

$$f(\sigma,\eta,\tau)=F(\sigma,\eta)+\phi(\sigma,\eta,\tau), \qquad (3)$$

где $F(\sigma,\eta)$ – функция тока основного потока, устойчивость которого анализируется и $\phi(\sigma,\eta,\tau)$ представляет возмущенную часть, такую, что $\phi\ll F$. Сохраняя только линейные члены для возмущенной части, получаем из (2) и (3) следующие уравнения для F и ϕ:

$$F_\eta R_\sigma-F_\sigma R_\eta=R_{\sigma\sigma}+R_{\eta\eta}, \qquad (4)$$

где $R=(F_{\sigma\sigma}+F_{\eta\eta})/(\sigma^2+\eta^2)$, и

$$\begin{aligned}(\phi_{\sigma\sigma}+\phi_{\eta\eta})_\tau+F_\eta T_\sigma-F_\sigma T_\eta+\\+\phi_\eta R_\sigma-\phi_\sigma R_\eta=T_{\sigma\sigma}+T_{\eta\eta},\end{aligned} \qquad (5)$$

где $T=(\phi_{\sigma\sigma}+\phi_{\eta\eta})/(\sigma^2+\eta^2)$.

Граничные условия для (4) и (5) ставятся следующим образом:

$F=F_\eta=0$ при $\eta=0$;

$$F\sim\sigma\eta,\quad F_\eta\sim\sigma \quad \text{при } \eta\to\infty \qquad (6a)$$

и

$$\phi=\phi_\eta=0 \text{ при } \eta=0 \text{ и } \eta\to\infty. \qquad (6b)$$

Разложим F в окрестности $\sigma_0=(2\mathrm{Re})^{1/2}$ (1) вблизи стенки $\eta=0$:

$$F=\sigma[G(\eta)+(\sigma-\sigma_0)G_1(\eta)+\ldots]. \qquad (7)$$

Используя (7) из (4) для основного потока, получаем

$$\begin{aligned}G^{IV}+G'''\left(G-\frac{4\eta}{\sigma_0^2+\eta^2}\right)+\\+\frac{[(\sigma_0^2-\eta^2)G'-2\eta G]G''}{\sigma_0^2+\eta^2}=0\end{aligned} \qquad (8)$$

и из граничных условий (6а):

$$G=G'=0 \quad \text{при} \quad \eta=0;$$

и

$$G\sim\eta,\quad G'\to1 \quad \text{при} \quad \eta\to\infty. \qquad (9)$$

Здесь и далее штрихи обозначают производные по η.

Для $\mathrm{Re}\to\infty$ уравнение (8) приводится к уравнению, подобному Блазиуса:

$$G^{IV}+G'''G+G''G'=0. \qquad (10)$$

Возмущенную часть рассмотрим в виде:

$$\phi(\sigma,\eta,\tau) = K(\eta)\exp[i(\alpha\sigma - \beta\tau)], \qquad (11)$$

где α обозначает безразмерное волновое число волны, β – безразмерная волновая частота.

Из (5) и (11), получаем уравнение для возмущений:

$$(K'' - \alpha^2 K)\left\{-i\beta + \frac{-2\sigma^2 G' + 2\eta G - 4}{(\sigma^2+\eta^2)^2} + \frac{i\alpha\sigma[G'(\sigma^2+\eta^2)+4]}{(\sigma^2+\eta^2)^4}\right\} +$$

$$+\left(K''' - \alpha^2 K'\right)\frac{-G(\sigma^2+\eta^2)+4\eta}{(\sigma^2+\eta^2)^2} +$$

$$+\frac{KG''(\eta^2-\sigma^2)}{(\sigma^2+\eta^2)^2} - \frac{i\alpha\sigma K[G'''(\sigma^2+\eta^2) - 2\eta G'']}{(\sigma^2+\eta^2)^2} =$$

$$= (K^{IV} - 2\alpha^2 K'' + \alpha^4 K)/(\sigma^2+\eta^2). \qquad (12)$$

Из (6b) соответствующие граничные условия:

$$K = K' = 0 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } \eta \to \infty. \qquad (13)$$

Обратим внимание, что это уравнение в переменных основного потока и для фиксированного $\sigma = \sigma_0$ становится задачей на собственное значение. При $\sigma = \sigma_0 \to \infty$ из уравнения (12), сохраняя члены порядка $0(1/Re)$ и $o(1/Re)^{3/2}$ получаем:

$$i\alpha\sqrt{2\mathrm{Re}}\left[(K'' - \alpha^2 K)(G' - c) - KG'''\right] -$$

$$-(K^{IV} - 2\alpha^2 K'' + \alpha^4 K) = \qquad (14)$$

$$= 2G'(K'' - \alpha^2 K) + K'G'' + G(K''' - \alpha^2 K')$$

Здесь $c = \dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{2\mathrm{Re}}$ обозначает волновую частоту.

Заметим полученное уравнение (14) подобно уравнению Орра-Зоммерфельда [3]. В правой части находятся члены, учитывающие непараллельность потока.

Литература

1. Kaplun S. The role of coordinates system in boundary layer theory // ZAMP, 1954, v.5, p.111-135
2. Afzal N., Banthiys N.K. Mixed convection over a semi-infinite vertical plate // ZAMP, 1977, № 28, p.993-1004.
3. Линь Цзяо-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

Принята в печать 10.12.2006.