© И.К. Шаранхаев

Россия, Улан-Удэ, Бурятский государственный университет

О представлении булевых функций бесповторными формулами в некоторых симметрических базисах[1]

Изучается представление булевых функций формулами. Найдены критерии бесповторности булевых функций в базисах $\{\vee, \cdot, -, 0, 1, x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \vee \overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_n\}$, где n – нечетное число, большее 1.

© I.K. Sharankhaev

On representation of Boolean functions by repetition-free formulas in some symmetric bases

We study representation of Boolean functions by formulas. We founded repetition-free criterions of Boolean functions in bases $\{\vee, \cdot, -, 0, 1, x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \vee \overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_n\}$, where n – uneven number is greater than 1.

Введение

Под *базисами* понимаем конечные полные множества булевых функций, содержащие константы.

Формула Ф над базисом B называется *бесповторной*, если каждая переменная входит в нее не более одного раза.

Функция f называется *бесповторной* в базисе B, если существует бесповторная формула Ф над B, представляющая функцию f. В противном случае f называется *повторной* в B.

В настоящей работе продолжены исследования по характеризации булевых функций, представимых бесповторными формулами над базисами первого уровня из частично упорядоченного множества базисов, введенного в [1]. Отметим, что данное частично упорядоченное множество базисов дуально изоморфно частично упорядоченному множеству базисов, рассматриваемому в [2].

В работах [3-7] получены критерии бесповторности булевых функций в бинарных базисах $\{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$ и $\{\vee, \cdot, -, 0, 1, \oplus\}$, а для трех небинарных базисов такие критерии найдены в [1]. Ниже представлено расширение результата, полученного в одном из небинарных базисов, для всех нечетных n.

Все неопределяемые понятия можно найти, например, в [8].

Будут использоваться следующие обозначения:

- символом $\tilde{x}$ обозначается набор $(x_1,\ldots,x_n)$;
- $\operatorname{rang} f$ – ранг функции f;
- $\rho(f)$ – множество всех существенных переменных функции f;
- $\delta(f)$ – множество всех фиктивных переменных функции f; $x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1; \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$

Функция, получаемая из $f(x_1,\ldots,x_n)$ подстановкой вместо некоторой переменной x_i константы σ, называется *остаточной* и обозначается $f^\sigma_{x_i}$. Индуктивно это определение распространяется на подмножество переменных.

Назовем переменную x_i функции f *фиктивной*, если $f^0_{x_i} = f^1_{x_i}$, и *существенной* в противном случае.

Рангом булевой функции f называется число ее существенных переменных.

Функция f называется *слабоповторной* в базисе B, если любая остаточная функция от функции f является бесповторной, а сама f повторна в базисе B.

[1] Работа выполнена при поддержке грантов Бурятского госуниверситета и Министерства образования и науки Республики Бурятия.

Базис $B_0=\{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$ называется *элементарным*, а базис $B_0 \cup \{f\}$, где f слабоповторна в B_0, называется *предэлементарным*.

Базис $B_{1,n}=B_0 \cup \{g\}$, где $g = x_1\cdot\ldots\cdot x_n \vee \bar{x}_1\cdot\ldots\cdot\bar{x}_n$ и $n \geq 3$, будем называть *предэлементарным симметрическим* базисом порядка n.

Будем говорить, что функции f и g *связаны отношением* $\prec$, и писать $f \prec g$, если для любого набора $\tilde{\sigma}$ выполняется $f(\tilde{\sigma}) \leq g(\tilde{\sigma})$.

Функция f называется *обобщенно монотонной по переменной* x, если выполняется либо $f_x^0 \prec f_x^1$, либо $f_x^0 \succ f_x^1$. Для краткости записи обобщенную монотонность функции f по переменной x будем обозначать так: $f \in M_x$.

Производной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ по переменной x_i называется функция $f_{x_i}' = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}^0 \oplus f_{x_i}^1$.

Понятие производной функции по переменной распространяется индуктивно на множество переменных следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_s}} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{s-1}}}\right)}{\partial x_{i_s}}.$$

Функция называется *нечетной*, если число наборов, на которых функция равна 1, является нечетным, и *четной* в противном случае.

Множество булевых функций P, содержащее тождественную функцию, называется *наследственным*, если для любой функции $f \in P$ любая остаточная функция $f_x^\sigma \in P$.

Множество булевых функций P называется *инвариантным*, если для любых функций $f(\tilde{u},y)$, $g(\tilde{v}) \in P$, где $\tilde{u} \cap \tilde{v} = \varnothing$, справедливо включение $f(\tilde{u},g(\tilde{v})) \in P$.

1. Вспомогательные утверждения

При получении основного результата будут использоваться следующие утверждения.

Предложение 1 [7]. Множество булевых функций P является наследственным и инвариантным тогда и только тогда, когда P есть множество всех бесповторных функций над некоторым базисом B.

Следствие 1. Если для наследственного и инвариантного множества булевых функций P и базиса B верно, что $B \subseteq P$ и $S_B \cap P = \varnothing$, то $P_B = P$.

Таким образом, для доказательства того, что некоторое множество булевых функций P совпадает с множеством всех бесповторных функций над некоторым базисом B, достаточно показать, что P обладает свойствами наследственности и инвариантности, и проверить, что все слабоповторные в B функции не входят в P.

Предложение 2 [9]. Следующая система булевых функций является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в предэлементарном базисе $B_{1,n}$, где n – нечетное число, большее 1:

$x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$;

$x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$;

$x_1(x_2 \vee \ldots \vee x_k) \vee x_2\cdot\ldots\cdot x_k$, $k \geq 3$;

$x_1(x_2 \vee x_3\cdot\ldots\cdot x_k) \vee x_2\bar{x}_3\cdot\ldots\cdot\bar{x}_k$, $k \geq 3$;

$x_1\cdot\ldots\cdot x_k \vee \bar{x}_1\cdot\ldots\cdot\bar{x}_k$, $k \geq 2$, $k \neq n$;

$\bar{x}_1 g(x_2,\ldots,x_{n+1}) \vee x_1\cdot\ldots\cdot x_{n+1}$;

$\bar{x}_1\cdot\ldots\cdot\bar{x}_{n-1}\,\bar{g}(x_n,\ldots,x_{2n-1}) \vee x_1\cdot\ldots\cdot x_{2n-1}$;

$\bar{x}_1\cdot\ldots\cdot\bar{x}_n\, g(x_{n+1},\ldots,x_{2n}) \vee x_1\cdot\ldots\cdot x_{2n}$.

2. Основной результат

В этом разделе будут получены критерии бесповторности булевых функций для некоторых предэлементарных симметрических базисов.

Функцию f будем называть *n-нетвердой*, где $n \geq 2$, если либо rang $f < 2$, либо для любого $x \in \rho(f)$ выполняется одно из условий 1, 2, 3:

1) $\delta(f) = \delta(f_x^0)$ и $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$;

2) $\delta(f) = \delta(f_x^1)$ и $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$;

3) $\delta(f) = \delta(f_x^0) = \delta(f_x^1)$, $f \notin M_x$ и найдутся $y_1,\ldots,y_{n-1} \in \rho(f_x')$ такие, что $\delta(f_x') \subset \delta\left(\frac{\partial f_x'}{\partial y_1,\ldots,\partial y_{n-1}}\right)$.

Функцию f будем называть *наследственно n-нетвердой*, если сама f и все ее остаточные функции являются n-нетвердыми.

Теорема. Булева функция f бесповторна в базисе $B_{1,n}$, где n – нечетное число, большее 1, тогда и только тогда, когда она является наследственно $(n-1)$-нетвердой.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся методом, основанным на предложении 1.

Обозначим через P_{n-1} множество всех наследственно (n-1)-нетвердых функций. Множество P_{n-1} является наследственным по определению, покажем его инвариантность.

Пусть $f(\tilde{u},\tilde{v})=g(\tilde{u},h(\tilde{v}))$, где $g(\tilde{u},y)$, $h(\tilde{v})\in P_{n-1}$. Если $\tilde{u}=\varnothing$ или $|\tilde{v}|=1$, то функция f обобщенно однотипна с g или h, поэтому является наследственно (n-1)-нетвердой. Далее считаем, что $\tilde{u}\neq\varnothing$ или $|\tilde{v}|>1$.

1. Пусть $x\in\tilde{v}$. Если выполняется одно из строгих включений $\delta(h)\subset\delta(h_x^0)$ или $\delta(h)\subset\delta(h_x^1)$, то соответственно либо $\delta(f)\subset\delta(f_x^0)$, либо $\delta(f)\subset\delta(f_x^1)$.

Пусть $\delta(h)=\delta(h_x^0)=\delta(h_x^1)$. Рассмотрим $f_x'=g_y'(\tilde{u},y)\cdot h_x'(\tilde{v})$. Очевидно, что существуют переменные $x_1,\ldots,x_{n-2}\in\rho(h_x')$ такие, что $\delta(h_x')\subset\delta\left(\dfrac{\partial h_x'}{\partial x_1,\ldots,\partial x_{n-2}}\right)$. Так как справедливо равенство

$$\frac{\partial f_x'}{\partial x_1,\ldots,\partial x_{n-2}}=g_y'(\tilde{u},y)\cdot\frac{\partial h_x'}{\partial x_1,\ldots,\partial x_{n-2}},$$

то $\delta(f_x')\subset\delta\left(\dfrac{\partial f_x'}{\partial x_1,\ldots,\partial x_{n-2}}\right)$. Докажем от противного, что $f\notin M_x$. Пусть для определенности $f_x^0\prec f_x^1$. Тогда при любых $\tilde{u},\tilde{v}_1,\tilde{v}_2$ выполняется

$$g(\tilde{u},h(\tilde{v}_1,0,\tilde{v}_2))\le g(\tilde{u},h(\tilde{v}_1,1,\tilde{v}_2)).$$

Так как $h\notin M_x$, для любого $\tilde{u}$ имеют место неравенства

$$g(\tilde{u},0)\le g(\tilde{u},1),\qquad g(\tilde{u},0)\ge g(\tilde{u},1).$$

Отсюда следует, что $g_y^0=g_y^1$, то есть переменная y фиктивна, что невозможно.

2. Пусть $x\in\tilde{u}$. В случае выполнения одного из строгих включений $\delta(g)\subset\delta(g_x^0)$ или $\delta(g)\subset\delta(g_x^1)$ справедливо ровно одно из строгих включений $\delta(f)\subset\delta(f_x^0)$ или $\delta(f)\subset\delta(f_x^1)$.

Пусть $\delta(g)=\delta(g_x^0)=\delta(g_x^1)$. Рассмотрим $f_x'=g_x'(\tilde{u},h(\tilde{v}))$. Если для $g_x'(\tilde{u},y)$ существуют $x_1,\ldots,x_{n-2}\in\rho(g_x'(\tilde{u},y))$, отличные от y такие, что $\delta(g_x')\subset\delta\left(\dfrac{\partial g_x'}{\partial x_1,\ldots,\partial x_{n-2}}\right)$, тогда справедливо $\delta(f_x')\subset\delta\left(\dfrac{\partial f_x'}{\partial x_1,\ldots,\partial x_{n-2}}\right)$. В противном случае существуют переменные $y_1,\ldots,y_{n-3}\in\rho(g_x'(\tilde{u},y))$, отличные от y такие, что справедливо $\delta(g_x')\subset\delta\left(\dfrac{\partial g_x'}{\partial y_1,\ldots,\partial y_{n-3}\partial y}\right)$. Выберем произвольно существенную $z\in\tilde{v}$ и рассмотрим $\dfrac{\partial f_x'}{\partial y_1\ldots\partial y_{n-3}\partial z}=\dfrac{\partial g_x'}{\partial y_1\ldots\partial y_{n-3}\partial y}\cdot h_z'(\tilde{v})$. В силу того, что $\delta(g_x')\subset\delta\left(\dfrac{\partial g_x'}{\partial y_1,\ldots,\partial y_{n-3}\partial y}\right)$ справедливо $\dfrac{\partial f_x'}{\partial y_1\ldots\partial y_{n-3}\partial z}=\dfrac{\partial f_x'}{\partial y_1\ldots\partial y_{n-3}\partial z}$.

Докажем от противного, что $f\notin M_x$. Пусть для определенности $f_x^0\prec f_x^1$. Тогда при любых $\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{v}$ выполняется

$$g(\tilde{u}_1,0,\tilde{u}_2,h(\tilde{v}))\le g(\tilde{u}_1,1,\tilde{u}_2,h(\tilde{v})).$$

Отсюда следует, что при любых $\tilde{u}_1,\tilde{u}_2$ выполняются неравенства

$$g(\tilde{u}_1,0,\tilde{u}_2,0)\le g(\tilde{u}_1,1,\tilde{u}_2,0),$$
$$g(\tilde{u}_1,0,\tilde{u}_2,1)\le g(\tilde{u}_1,1,\tilde{u}_2,1).$$

Тогда $g\in M_x$, получаем противоречие. Таким образом, инвариантность P_{n-1} доказана.

Осталось для наследственного инвариантного множества P_{n-1} найти порождающий его базис. Очевидно, что $B_{1,n}\subseteq P_{n-1}$. Покажем, что все слабоповторные функции в базисе $B_{1,n}$ при нечетном n не принадлежат P_{n-1}. Достаточно ограничиться проверкой функций из предложения 2, так как если свойство (n-1)-нетвердости не выполняется для некоторой функции, то оно не выполняется и для всех обобщенно однотипных с ней функций.

a) $f=x_1(x_2\vee x_3)\vee x_3x_4$. Тогда

$$f_{x_1}^0=x_3x_4,\qquad f_{x_1}^1=x_2\vee x_3.$$

Обе эти остаточные функции имеют фиктивную переменную существенную в f, поэтому $f\notin P_{n-1}$.

b) $f=x_1(x_2\vee x_3x_4)\vee x_5(x_3\vee x_2x_4)$. Тогда

$$f_{x_4}^0=x_1x_2\vee x_3x_5,\qquad f_{x_4}^1=(x_1\vee x_5)(x_2\vee x_3).$$

Функции $f^0_{x_4}$, $f^1_{x_4}$ существенны и $f\in M_{x_4}$, поэтому $f\notin P_{n-1}$.

c) $f=x_1(x_2\vee...\vee x_k)\vee x_2\cdot...\cdot x_k$, где $k\geq 3$. Функция $f\notin P_{n-1}$, так как $f^0_{x_1}, f^1_{x_1}$ существенны, а $f\in M_{x_1}$.

d) $f=x_1(x_2\vee x_3\cdot...\cdot x_k)\vee x_2\bar{x}_3\cdot...\cdot\bar{x}_k$, где $k\geq 3$. При $k=3$ $f^0_{x_1}=x_2$ и $f^1_{x_1}=x_1$. Обе эти остаточные функции имеют фиктивную переменную существенную в f, поэтому $f\notin P_{n-1}$. При $k>3$ ситуация аналогична c).

e) $f=x_1\cdot...\cdot x_k\vee\bar{x}_1\cdot...\cdot\bar{x}_k$, где $k\geq 2$ и $k\neq n$. При $k=2$ функция $f\notin P_{n-1}$, так как $f^0_{x_1}, f^1_{x_1}$ существенны и $f^l_{x_1}=1$. При $k\geq 3$

$$f^0_{x_1}=\bar{x}_2\cdot...\cdot\bar{x}_k,\quad f^1_{x_1}=x_2\cdot...\cdot x_k,$$

$$f^l_{x_1}=x_2\cdot...\cdot x_k\vee\bar{x}_2\cdot...\cdot\bar{x}_k.$$

Легко заметить, что функции $f^0_{x_1}$, $f^1_{x_1}$, $f^l_{x_1}$ существенны и найдутся ровно k-2 переменных $z_1,...,z_{k-2}$ таких, что справедливо строгое включение $\delta(f^l_{x_1})\subset\delta\left(\frac{\partial f^l_{x_1}}{\partial z_1,...,\partial z_{k-2}}\right)$. Но $k\neq n$, поэтому $f\notin P_{n-1}$.

f) $f=\bar{x}_1 g(x_2,...,x_{n+1})\vee x_1\cdot...\cdot x_{n+1}$. Тогда

$$f^0_{x_1}=g(x_2,...,x_{n+1}),\quad f^1_{x_1}=x_2\cdot...\cdot x_{n+1},$$

$$f^l_{x_1}=\bar{x}_2\cdot...\cdot\bar{x}_{n-1}.$$

Функции $f^0_{x_1}$, $f^1_{x_1}$, $f^l_{x_1}$ существенны и для любых $z_1,...,z_{n-2}\in\rho(f^l_{x_1})$ не выполняется строгое включение

$$\delta(f^l_{x_1})\subset\delta\left(\frac{\partial f^l_{x_1}}{\partial z_1,...,\partial z_{n-2}}\right),$$

поэтому $f\notin P_{n-1}$.

g) $f=\bar{x}_1\cdot...\cdot\bar{x}_{n-1}\bar{g}(x_n,...,x_{2n-1})\vee$ $\vee x_1\cdot...\cdot x_{2n-1}$. Тогда

$$f^0_{x_n}=\bar{x}_1\cdot...\cdot\bar{x}_{n-1}(x_{n+1}\vee...\vee x_{2n-1}),$$

$$f^1_{x_n}=\bar{x}_1\cdot...\cdot\bar{x}_{n-1}(\bar{x}_{n+1}\vee...\vee\bar{x}_{2n-1})\vee$$
$$\vee x_1\cdot...\cdot x_{n-1}\cdot x_{n+1}\cdot...\cdot x_{2n-1},$$

$$f^l_{x_n}=x_1\cdot...\cdot x_{n-1}\cdot x_{n+1}\cdot...\cdot x_{2n-1}\vee$$
$$\vee\bar{x}_1\cdot...\cdot\bar{x}_{n-1}\cdot x_{n+1}\cdot...\cdot x_{2n-1}\vee$$
$$\vee\bar{x}_1\cdot...\cdot\bar{x}_{n-1}\cdot\bar{x}_{n+1}\cdot...\cdot\bar{x}_{2n-1}.$$

Остаточные функции $f^0_{x_n}$ и $f^1_{x_n}$ существенны. В силу того, что представление $f^l_{x_n}$ является совершенной дизъюнктивной нормальной формой, нетрудно заметить, что функция $f^l_{x_n}$ нечетная, то есть существенная. Очевидно, что производная нечетной функции по любой переменной есть нечетная функция, поэтому имеем ситуацию, аналогичную f).

h) $f=\bar{x}_1\cdot...\cdot\bar{x}_n g(x_{n+1},...,x_{2n})\vee x_1\cdot...\cdot x_{2n}$. Тогда

$$f^0_{x_1}=\bar{x}_2\cdot...\cdot\bar{x}_n g(x_{n+1},...,x_{2n}),\quad f^1_{x_1}=x_2\cdot...\cdot x_{2n},$$

$$f^l_{x_1}=x_2\cdot...\cdot x_{2n}\vee\bar{x}_2\cdot...\cdot\bar{x}_n x_{n+1}\cdot...\cdot x_{2n}\vee$$
$$\vee\bar{x}_2\cdot...\cdot\bar{x}_n\cdot\bar{x}_{n+1}\cdot...\cdot\bar{x}_{2n}.$$

Ситуация аналогична g).

Таким образом, $S_{B_{1,n}}\cap P_{n-1}=\varnothing$ и $B_{1,n}\subseteq P_{n-1}$. Теорема доказана.

Литература

1. Перязев Н. А., Шаранхаев И. К. Критерии бесповторности булевых функций в предэлементарных базисах ранга 3 // Дискретная математика. – 2005. – Т. 17. Вып.2. – С. 127-138.
2. Черухин Д. Ю. Алгоритмический критерий сравнения булевых базисов // Математические вопросы кибернетики. Вып.8. - М.: Наука, 1999. - С. 77-122.
3. Субботовская Б. А. О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 149, №4. – С. 784-787.
4. Гурвич В. А. Критерии бесповторности функций алгебры логики // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 318, №3. – С. 532-537.
5. Перязев Н. А. Реализация булевых функций бесповторными формулами в некоторых базисах // Сб. Алгебра, логика и приложения. – Иркутск, 1994. – С. 143-154.
6. Перязев Н. А. Реализация булевых функций бесповторными формулами // Дискретная математика. – 1995. – Т. 7, №3. – С. 61-68.
7. Кириченко К. Д. О критериях бесповторности булевых функций в различных базисах // Оптимизация, управление, интеллект. – Иркутск, 2000. – Вып. 4. – С. 93-101.
8. Перязев Н. А. Основы теории булевых функций. – М.: Физматлит, 1999. – 112 с.
9. Кириченко К. Д. Слабоповторные булевые функции в некоторых предэлементарных базисах // Иркутский университет. Сер.: Дискретная математика и информатика. Вып. 13. – Иркутск, 2000. – 60 с.