© *Г.А. Шишкин, О.Ц. Ринчинова*
Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия

Решение интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом с помощью системы символьной (аналитической) математики Maple

© *G.A. Shishkin, O.Ts. Rinchinova*

Solving of a Fredholm's integral differential equations with time delay using the system of symbolic (analytical) mathematics Maple

В работе [2] рассматривается начальная задача:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}[f_{ij}(x)y^{(i)}(u_j(x))+ \\ +\lambda\int_a^b K_{ij}(x,\eta)y^{(i)}(u_j(\eta))d\eta]=f(x), & (1) \\ y^{(i)}(u_j(x))=\varphi_i(u_j(x)), i=\overline{0,n-1}, x\in E_{x_0}, & (2) \end{cases}$$

где $u_0(x)\equiv x$, $u_j(x)\le x$, функции $u_j(x)$, $f_{ij}(x)$ и $f(x)$ - непрерывны, ядра $K_{ij}(x,\eta)$ - регулярны в квадрате $a\le x,\eta\le b$, $E_{x_0}=\bigcup_{j=0}^{l}E_{x_0}^j$, $E_{x_0}^j$ – множество точек, для которых соответствующие $u_j(x)\le x$ при $x\ge x_0$ $\forall j=\overline{1,l}$, а $E_{x_0}^0=[a,x_0]$, функции $\varphi_i(x)$ – заданы.

В этой работе с опорой на одну из модификаций функции гибкой структуры было показано, что задача (1)-(2) для уравнений запаздывающего типа (если $f_{nj}(x)\equiv 0$ и $K_{nj}(x,\eta)\equiv 0$ $\forall j=\overline{1,l}$, а $f_{n0}(x)\equiv 1$) всегда сводится к разрешающему интегральному уравнению смешанного типа Вольтерра-Фредгольма с обыкновенным аргументом

$$\mu(x)+\sum_{j=0}^{l}\left[\int_{x_0}^{u_j(x)}Q_j(x,t)\mu(t)dt+\right. \\ \left.+\int_{x_0}^{u_j(b)}N_j(x,t)\mu(t)dt\right]=B(x), \quad (3)$$

где ядра $Q_j(x,t)$, $N_j(x,t)$ и функция $B(x)$ находятся по следующим формулам:

$$Q_j(x,t)=D^{-1}\cdot\sum_{i=0}^{n}f_{ij}(x)\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i},$$

$$N_j(x,t)= \\ =D^{-1}\cdot\int_{u_j^{-1}(x)}^{b}\sum_{i=0}^{n}K_{ij}(x,\eta)\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial\eta^i}+ \\ +K_{n0}(x,t),$$

$$B(x)=f(x)- \\ -\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\{D^{-1}\sum_{s=1}^{n}y^{(s-1)}(x_0)\times \\ \times[f_{ij}(x)\frac{d^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i}+ \\ +\lambda\int_{c_j}^{b}K_{ij}(x,\eta)\frac{d^i\Delta_s(u_j(\eta)-x_0)}{d\eta^i}d\eta]+ \\ +\lambda\int_a^{c_j}K_{ij}(x,\eta)\varphi_i(\eta)d\eta\}.$$

Задачу (1)-(2) преобразуем к разрешающему уравнению (3), используя математический пакет Maple, который имеет собственный язык программирования, позволяющий создавать пользовательские программы, и отличается от других языков программирования тем, что в нем уже реализованы многие алгоритмы. Например, команды diff(F,x), int(F,x), которые дифференцируют и интегрируют функцию F по переменной x.

В Maple имеется довольно широкий набор команд и конструкций, аналогичный существующим в известных языках программирования (например, в языках Pascal или C): операторы присваивания, ветвления, цикла for, while, операторы прерывания и обработки ошибок. Также предусмотрены способы объявления процедур и модулей.

Для решения интегро-дифференциального уравнения Фредгольма создадим модуль, из которого будут экспортироваться ядра $Q_j(x,t)$, $N_j(x,t)$ и функция $B(x)$, с опцией «пакет». Локальные процедуры: MatrD, MatrDelta, C, считывают, соответственно, матрицы D, Δs и корни c_j, которые определяются из уравнения $u_j(x) = x_0$ на отрезке $[x_0, b]$, если же таковых нет, то выбираются соответствующие $c_j = b$.

Процедуры, используемые в модуле:

```
> idyf:=module()
export QNucleus,NNucleus,BNucleus;
option package;
local MatrD,MatrDelta,c;
MatrD:=proc(R,n)
...
end proc:
MatrDelta:= proc(MD,R,SStr,Variable,n)
...
end proc:
c:= proc(u,x0,b)
...
end proc:
QNucleus:= proc(R,U,F,n,l)
local Q,i,j;
  Q:=array(1..l+1);
  for j from 1 to l+1 do
    for i from 1 to n+1 do
     if i>1 then
      Q[j]:=Q[j]+F[i,j]*diff(det(MatrDelta(MatrD(R,n),R,n,U[j]-t,n)),x$(i-1));
     else
      Q[j]:=F[i,j]*det(MatrDelta(MatrD(R,n),R,n,U[j]-t,n));
     fi;
    od;
    Q[j]:=det(MatrD(R,n)^(-1))*Q[j];
  od;
  eval(Q);
end proc:
NNucleus:= proc(R,U,K,n,l)
...
end proc:
BNucleus:= proc(R,U,K,F,f,x0,b,lambda,Phi,n,l)
...
end proc:
save idyf,"idyf.m";
end module;
```

Программа позволяет пользователю получить из начальной задачи (1)-(2) разрешающее интегральное уравнение смешанного типа Вольтерра-Фредгольма с обыкновенным аргументом (3).

Рассмотрим задачу Коши при начальном значении $x_0 = 0$ для уравнения запаздывающего типа:

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x-1) - 2\int\limits_0^1 e^x \eta\, y(\eta)d\eta = xe^{x-1}, \\ y(x) = x, y'(x) = 1 \text{ на } E_0^0 = [0], \\ y(x-1) = x-1, y'(x-1) = 1 \text{ на } E_0^1 = [-1,0]. \end{cases}$$

Для получения доступа к процедурам пакета его необходимо подключить командой (with(idyf);). Зададим исходные данные:

```
> n:=2:
l:=1:
a:=0:
b:=1:
F:=matrix([[0,0],[0,x],[1,0]]):
K:=matrix([[eta*exp(x),0],[0,0],[0,0]]):
U:=vector([x,x-1]):
Phi:=matrix([[x,1],[x-1,1]]):
R:=vector([0,1]):
x0:=0:
f:=x*exp(x-1):
lambda:=2:
```

R – определитель Вандермонда, составленный из неопределенных параметров $r_j, j=\overline{1,n}$, которые определяются в ходе решения задачи, исходя из оптимальности ее решения. В данном примере взято (0, 1).

Обратимся к процедурам QNucleus, NNucleus, BNucleus

```
QNucleus(R,U,F,n,l);
NNucleus(R,U,K,n,l);
BNucleus(R,U,K,F,f,x0,b,lambda,Phi,n,l);
```

Первая процедура вычислила ядра $Q_j(x,t)$ и результаты выводятся на рабочий лист

$$[e^{(x-t)}, x\, e^{(x-1-t)}].$$

Соответственно, ядра N_0 и N_1

$$\left[\frac{1}{2}\frac{e^x\left(e^t t^2 + 2\,t\,e^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 2\,t^2 e^{\left(\frac{1}{t}\right)} - e^t\right)}{e^t t^2}, 0\right]$$

и функция $B(x)$

$$-2\,e^x.$$

Таким образом, мы имеем разрешающее интегральное уравнение смешанного типа Вольтерра-Фредгольма с обыкновенным аргументом вида (3).

Литература

1. Сдвижков О.А. Математика на компьютере: MAPLE. – М.: СОЛОН-Пресс, 2003. – 176 с.
2. Шишкин Г.А. Линейные интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма с запаздывающим аргументом. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2006. – 52 с.