© *С.Г. Баргуев*
Россия, Улан-Удэ, Бурятский филиал Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики

© *А.Д. Мижидон*
Россия, Улан-Удэ, Восточно-Сибирский государственный технологический университет

О фундаментальном решении бигармонического уравнения с дельта-функцией в правой части[1]

Рассматривается фундаментальное решение бигармонического уравнения с дельта-функцией в правой части. Это решение важно для получения обобщенного решения бигармонического уравнения с правой частью, зависящей от граничных условий.

© *S.G. Barguev, A.D. Mishidon*

On the fundamental solution of the biharmonical equation with the delta-function in the right-hand side

The fundamental solution of the biharmonical equation with the delta-function in the right-hand side is considered. This solution is important for obtaining the generalized solution biharmonical equation with the delta-function in the right-hand side depended from egde conditions.

Бигармоническое уравнение с дельта-функцией в правой части приходится рассматривать при исследовании колебаний механической системы – тела, прикрепленного с помощью упругого элемента к упругой пластине с закрепленными краями [1]. Данная механическая система лежит в основе виброзащитной системы, где тело называется объектом защиты, пластина – основанием, а упругий элемент – виброизолятором. Запишем бигармоническое уравнение с дельта-функцией в правой части в виде:

$$-\omega^2\overline{V}(x,y)+d\nabla^2\nabla^2\overline{V}(x,y)=\delta(x)\delta(y)\,, \quad (1)$$

где ω - частота, d - некоторая положительная постоянная, $\nabla^2\nabla^2$ - бигармонический оператор, $\delta(x)$ и $\delta(y)$-дельта- функции.

Фундаментальное решение уравнения (1) будем находить с помощью прямого преобразования Фурье этого уравнения, выделением выражения для прямого преобразования неизвестного решения, а затем применением операции обратного преобразования Фурье к полученному выражению, получение искомого решения.

Установим предварительно некоторые результаты.

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{J_0(b\sqrt{x})}{x^2-a^2}dx = \\ =\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\int_0^\infty \frac{\cos(b\sqrt{x}\sin t)dx}{x^2-a^2}\right)dt, \quad (2)$$

где a и b - постоянные, J_0 - функция Бесселя нулевого порядка [2], представимая в виде

$$J_0(b\sqrt{x})=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(b\sqrt{x}\sin t)dt\,.$$

Вычислим несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos(b\sqrt{x}\sin t)dx}{x^2-a^2} \quad (3)$$

Для этого вычислим несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(ib\sqrt{x}\sin t)dx}{x^2-a^2}\,, \quad (4)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00659).

воспользовавшись тем, что комплексная функция $\dfrac{\exp(ib\sqrt{z}\sin t)}{z^2-a^2}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана [3] в верхней полуплоскости комплексной плоскости и совпадает с подынтегральной функцией в (4) на действительной оси. Согласно [3] имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ib\sqrt{x}\sin t)dx}{x^2-a^2}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\exp(ib\sqrt{x}\sin t)}{x^2-a^2}(x-a)+$$

$$+\lim_{x\to -a}\frac{\exp(ib\sqrt{x}\sin t)}{x^2-a^2}(x+a)=$$

$$=\pi i\left(\lim_{x\to a}\frac{\exp(ib\sqrt{x}\sin t)}{x+a}+\right.$$

$$\left.+\lim_{x\to -a}\frac{\exp(ib\sqrt{x}\sin t)}{x-a}\right)=$$

$$=\pi i\left(\frac{\exp(ib\sqrt{a}\sin t)}{2a}-\frac{\exp(-b\sqrt{a}\sin t)}{2a}\right)=$$

$$=\pi i\frac{\cos(b\sqrt{a}\sin t)+i\sin(b\sqrt{a}\sin t)}{2a}-$$

$$-\pi i\frac{\exp(-b\sqrt{a}\sin t)}{2a}=$$

$$=-\frac{\pi}{2a}\sin(b\sqrt{a}\sin t)+i\frac{\pi}{2a}(\cos(b\sqrt{a}\sin t)-$$

$$-\exp(-b\sqrt{a}\sin t)).$$

Далее, учитывая, что

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(b\sqrt{x}\sin t)dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(b\sqrt{a}\sin t)dx}{x^2-a^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ib\sqrt{a}\sin t)dx}{x^2-a^2}\right)$$

Получаем

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(b\sqrt{x}\sin t)dx}{x^2-a^2}=-\frac{\pi}{4a}\sin(b\sqrt{a}\sin t).\quad(5)$$

Преобразуем $J_0(b\sqrt{a})$:

$$J_0(b\sqrt{a})=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(b\sqrt{a}\sin t)dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sin t=u\\ \cos t dt=du\\ dt=\dfrac{du}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\cos(b\sqrt{a}u)du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Продифференцировав предыдущее равенство по параметру $b\sqrt{a}$, получим

$$(J_0(b\sqrt{a}))'=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{(\cos(b\sqrt{a}u))'du}{\sqrt{1-u^2}}=$$

$$=-\frac{2b\sqrt{a}}{\pi}\int_0^1\frac{\sin(b\sqrt{a}u)du}{\sqrt{1-u^2}}=-J_1(b\sqrt{a}).$$

Отсюда

$$\int_0^1\frac{\sin(b\sqrt{a}u)du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\pi}{2b\sqrt{a}}J_1(b\sqrt{a}).\quad(6)$$

Далее, используя (5) и (6), получаем

$$\int_0^{\infty}\frac{J_0(b\sqrt{x})}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\infty}\frac{\cos(b\sqrt{x}\sin t)dx}{x^2-a^2}\right)dt=$$

$$-\frac{1}{4a}\int_0^{\pi}\sin(b\sqrt{a}\sin t)dt=$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(b\sqrt{a}\sin t)dt=$$

$$\left|\begin{array}{l}\sin t=u\\ \cos t dt=du\\ dt=\dfrac{du}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_0^1\frac{\sin(b\sqrt{a}u)du}{\sqrt{1-u^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2a}\frac{\pi}{2b\sqrt{a}}J_1(b\sqrt{a})=-\frac{\pi}{4ab\sqrt{a}}J_1(b\sqrt{a}).$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty}\frac{J_0(b\sqrt{x})}{x^2-a^2}dx=-\frac{\pi}{4ab\sqrt{a}}J_1(b\sqrt{a}).\quad(7)$$

Найдем фундаментальное решение дифференциального уравнения в частных производных вида

$$-\omega^2\overline{V}(x,y)+d\nabla^2\nabla^2\overline{V}(x,y)=\delta(x)\delta(y).$$

Для этого запишем преобразование Фурье данного уравнения:

$$-\omega^2 F(\bar{V}(x,y)) + \\ +dF(\nabla^2\nabla^2\bar{V}(x,y)) = F(\delta(x)\delta(y)). \quad (8)$$

Обозначим $\bar{V}(x,y) = f$. Тогда

$$F(\nabla^2\nabla^2 f) = F\left[\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4}\right] + \\ +2F\left[\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\right] + F\left[\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4}\right] =$$

$$= (-i\xi_1)^4 F[f] + 2(-i\xi_1)^2(-i\xi_2)^2 F[f] + \\ +(-i\xi_2)^4 F[f] = \xi_1^4 F[f] + 2\xi_1^2\xi_2^2 F[f] + \\ +\xi_2^4 F[f] = (\xi_1^2+\xi_2^2)^2 F[f],$$

$$F(\delta(x)\delta(y)) = 1.$$

Подставляя в (8), получаем $(-\omega^2 + d(\xi_1^2+\xi_2^2)^2)F[f] = 1$. Отсюда

$$F[f] = \frac{1}{-\omega^2 + d(\xi_1^2+\xi_2^2)^2}.$$

По определению

$$f = F^{-1}[F[f]] = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{R_2}\frac{\exp(-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2))}{-\omega^2 + d(\xi_1^2+\xi_2^2)^2}d\xi_1 d\xi_2.$$

Для простоты фиксированный вектор $\bar{x} = (x_1, x_2)$ направим вдоль полярной оси. Тогда угол между вектором $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ и вектором $\bar{x} = (x_1, x_2)$ будет равен φ и $\exp(-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)) = \exp(-i|\bar{x}||\bar{\xi}|\cos\varphi)$. Перейдя к полярным координатам, получим

$$f = F^{-1}[F[f]] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{R_2}\frac{\exp(-i|\bar{x}||\bar{\xi}|\cos\varphi)}{-\omega^2 + d|\bar{\xi}|^4}d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \xi_1 = \rho\cos\varphi \\ \xi_2 = \rho\sin\varphi \\ |\bar{\xi}|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 \\ |\bar{\xi}| = \rho \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \rho\frac{\exp(-i|\bar{x}|\rho\cos\varphi)}{-\omega^2 + d\rho^4}d\rho =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{\rho}{-\omega^2 + d\rho^4}\times \\ \times\left(\int\limits_0^{2\pi}\exp(-i|\bar{x}|\rho\cos\varphi)d\varphi\right)d\rho. \quad (9)$$

Можно показать, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\exp(-i|\bar{x}|\rho\cos\varphi)d\varphi = 2\pi J_0(|\bar{x}|\rho),$$ где

$$J_0(|\bar{x}|\rho) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(|\bar{x}|\rho\sin\varphi)d\varphi.$$

Продолжая вычисление двумерного интеграла (9), получим

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{\rho}{-\omega^2 + d\rho^4}2\pi J_0(|\bar{x}|\rho)d\rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\rho}{-\omega^2 + d\rho^4}J_0(|\bar{x}|\rho)d\rho =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \rho^2 = t \\ 2\rho d\rho = dt \\ \rho = \sqrt{t} \end{array}\right| = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{J_0(|\bar{x}|\sqrt{t})}{-\omega^2 + dt^2}dt$$

$$= \frac{1}{4\pi d}\int\limits_0^{\infty}\frac{J_0(|\bar{x}|\sqrt{t})}{t^2 - a^2}dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi d}\left[-\frac{\pi}{4a|\bar{x}|\sqrt{a}}J_1(|\bar{x}|\sqrt{a})\right] =$$

$$= -\frac{J_1(|\bar{x}|\sqrt{a})}{16da|\bar{x}|\sqrt{a}}.$$

Таким образом, $f = -\dfrac{J_1(|\bar{x}|\sqrt{a})}{16da|\bar{x}|\sqrt{a}}$, где $a = \dfrac{\omega}{\sqrt{d}}$, $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{x^2+y^2}$ или $\bar{V}(x,y) = -\dfrac{J_1(\sqrt{(x^2+y^2)a})}{16da\sqrt{(x^2+y^2)a}}$. Здесь $J_0(y)$ и $J_1(y)$ - функции Бесселя нулевого и первого порядка некоторого аргумента y соответственно.

Литература

1. Мижидон А.Д., Архипов С.В. Математическая модель системы твердых тел на упругой пластине // Сб. науч. ст. ВСГТУ: Серия «Физико-математические науки». Вып. 4. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ,1999. – С. 34-45.
2. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984.
3. Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. – СПб.: Изд-во «Лань», 2002.