© *А.Э. Менчер, Ю.С. Токарева*
Чита, Россия

О дискретной арбитражной процедуре в четырех точках

© *A. E. Mencher, Yu.S. Tokareva*

On a discrete arbitration procedure at four points

Введение

Рассматривается бескоалиционная игра с нулевой суммой, связанная с моделью дискретной арбитражной процедуры. В этой игре два участника: L и M, именуемые, соответственно, как работник и работодатель. Они ведут переговоры об установлении заработной платы. Игрок L делает предложение x, а игрок M – предложение y. Мы будем предполагать, что x и y – произвольные действительные числа.

Для достижения соглашения между игроками используется арбитражная схема, предложенная Фарбером [1]. Если $x \le y$, то конфликта нет и игроки соглашаются на выплату жалованья, равного $\frac{x+y}{2}$. Если же, $x > y$, стороны апеллируют к арбитру A. Обозначим решение арбитра через α. Тогда из предложений x и y выбирается то, которое ближе к точке α. Предположим, что α - дискретная случайная величина. Если $\alpha = a$, то, очевидно, что точкой равновесия является пара чистых стратегий $(a;a)$. Для α, сосредоточенной в точках −1 и 1, решение установлено в [2], для α, сосредоточенной в точках −1, 0, 1, решение установлено в [3].

Мы рассматриваем случай, когда α принимает значения −2, −1, 1, 2.

1. Постановка задачи

Предположим, что α принимает значения −2, −1, 1, 2 с равными вероятностями $p = \frac{1}{4}$. Рассматривается бескоалиционная игра, в которой стратегии игроков являются произвольными действительными числами: $x, y \in R$.

Функция выигрыша в игре имеет вид $H(x,y) = EH_\alpha(x,y)$, где

$$H_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, \text{если} \quad x \le y, \\ x, \text{если} \quad x > y, |x-\alpha| < |y-\alpha|, \\ y, \text{если} \quad x > y, |x-\alpha| > |y-\alpha|, \\ \alpha, \text{если} \quad x > y, |x-\alpha| = |y-\alpha|. \end{cases} \quad (1)$$

Мы будем искать равновесие в игре среди смешанных стратегий. Обозначим через *f(x)* и *g(y)* смешанные стратегии игроков *L* и *M*, соответственно. Предположим, что носитель распределения *f(x)* (*g(y)*) лежит на положительной (отрицательной) полуоси, т.е.

$$x \in [0, +\infty), \quad f(x) \ge 0, \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1;$$

$$y \in (-\infty, 0], \quad g(y) \ge 0, \quad \int_{-\infty}^{0} g(y)dx = 1.$$

Благодаря симметрии, отсюда следует, что цена игры равна нулю, а оптимальные стратегии должны быть симметричны относительно оси ординат: *g(y) = f(−y)*. Следовательно, достаточно построить оптимальную стратегию только для одного из игроков, например, *L*.

2. Оптимальные стратегии

Теорема. *Для игрока L оптимальной является стратегия*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad 0 \le x < c, \\ \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{(x+1)^3}}, \quad c < x < c+2, \\ \frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(x-1)^3}}, \quad c+2 < x < c+4, \\ 0, \quad c+4 < x < +\infty, \end{cases} \quad (2)$$

где $c = \sqrt{17} - 2$.

Доказательство. Мы будем искать оптимальную стратегию игрока L в следующей форме:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<c,\\ \varphi(x), & c<x<c+2,\\ \phi(x), & c+2<x<c+4,\\ 0, & c+4<x<+\infty,\end{cases} \qquad (3)$$

где функции φ и ϕ положительны и непрерывно дифференцируемы. Обозначим через $H(f,y)$ функцию выигрыша игрока M. Эта функция непрерывна на всей полуоси $(-\infty,0]$. Стратегия (3) будет оптимальной, если $H(f,y)=0$ для $y\in[-(c+4),-c]$ и $H(f,y)\ge 0$ для $y\in(-\infty,-(c+4))\cup(-c,0]$.

Пусть $y\in[-(c+4),-(c+2)]$, тогда

$$4H(f,y)=y+\int_c^{-2-y}xf(x)dx+ \\ +\int_{-2-y}^{c+4}yf(x)dx+2\int_c^{c+4}xf(x)dx. \qquad (4)$$

Для оптимальности стратегии *f(x)* необходимо, чтобы $H'(f,y)=H''(f,y)=0$ на отрезке $[-(c+4),-(c+2)]$. Имеем,

$$4H'(f,y)= \\ =1+2(1+y)f(-2-y)+\int_{-2-y}^{c+4}f(x)dx, \qquad (5)$$

$$4H''(f,y)=3f(-2-y)- \\ -2(1+y)f'(-2-y). \qquad (6)$$

В результате получаем дифференциальное уравнение

$$3f(-2-y)-2(1+y)f'(-2-y)=0.$$

Положим $x=-2-y$, тогда $x\in[c,c+2]$, $f(x)=\varphi(x)$ и

$$3\varphi(x)+2(x+1)\varphi'(x)=0. \qquad (7)$$

Решение этого уравнения – функция

$$\varphi(x)=\frac{a}{\sqrt{(x+1)^3}}. \qquad (8)$$

Аналогично, при $y\in[-(c+2),-c]$, находим

$$4H(f,y)=2y+\int_c^{2-y}xf(x)dx+ \\ +\int_{2-y}^{c+4}yf(x)dx+\int_c^{c+4}xf(x)dx, \qquad (9)$$

$$4H'(f,y)=2+ \\ +2(-1+y)f(2-y)+\int_{2-y}^{c+4}f(x)dx, \qquad (10)$$

$$4H''(f,y)=3f(2-y)- \\ -2(-1+y)f'(2-y), \qquad (11)$$

откуда получаем уравнение

$$3f(2-y)-2(-1+y)f'(2-y)=0.$$

Положим $x=2-y$, тогда $x\in[c+2,c+4]$, $f(x)=\phi(x)$ и

$$3\phi(x)+2(x-1)\phi'(x)=0. \qquad (12)$$

Решение этого уравнения – функция

$$\phi(x)=\frac{b}{\sqrt{(x-1)^3}}. \qquad (13)$$

Определим константы a и b. Из (5) и (10), соответственно, получаем

$$0=4H'(f,-(c+2)-0)=1-\frac{2a(c+1)}{\sqrt{(c+1)^3}}+ \\ +\int_c^{c+4}f(x)dx=2-\frac{2a}{\sqrt{c+1}};$$

$$0=4H'(f,-(c+2)+0)=2-\frac{2b(c+3)}{\sqrt{(c+3)^3}}+ \\ +\int_{c+4}^{c+4}f(x)dx=2-\frac{2b}{\sqrt{c+3}}.$$

Таким образом,

$$a=\sqrt{c+1},\quad b=\sqrt{c+3} \qquad (14)$$

и функция *f(x)* принимает вид (2). Найдем константу c. Итак,

$$1=\int_c^{c+4}f(x)dx=\int_c^{c+2}\frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{(x+1)^3}}dx+ \\ +\int_{c+2}^{c+4}\frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(x-1)^3}}dx=2\left(\sqrt{\frac{c+3}{c+1}}-\sqrt{\frac{c+1}{c+3}}\right).$$

Положим, как и в [2], $\frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+3}}=z$, тогда получаем $2z^2+z-2=0$, $z=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$ и, наконец, $c=\sqrt{17}-2$.

Для дальнейшего найдем математическое ожидание стратегии *f(x)*. Имеем,

$$\int_c^{c+4}xf(x)dx= \\ =\int_c^{c+2}\frac{\sqrt{c+1}\cdot x}{\sqrt{(x+1)^3}}dx+\int_{c+2}^{c+4}\frac{\sqrt{c+3}\cdot x}{\sqrt{(x-1)^3}}dx=$$

$$= \int_c^{c+2} \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{x+1}} dx - \int_c^{c+2} \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{(x+1)^3}} dx +$$

$$+ \int_{c+2}^{c+4} \frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{x-1}} dx + \int_{c+2}^{c+4} \frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(x-1)^3}} dx =$$

$$= \frac{2(2c+4)}{\sqrt{c+1} \cdot \sqrt{c+3}} = c+2. \qquad (15)$$

Теперь займемся проверкой выполнения условий оптимальности для стратегии *f(x)*.

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$, тогда из (4) и (15) получаем

$$4H(f,y) = y + \int_c^{-2-y} \frac{\sqrt{c+1} \cdot x}{\sqrt{(x+1)^3}} dx +$$

$$+ \int_{-2-y}^{c+2} \frac{\sqrt{c+1} \cdot y}{\sqrt{(x+1)^3}} dx + \int_{c+2}^{c+4} \frac{\sqrt{c+3} \cdot y}{\sqrt{(x-1)^3}} dx + 2(c+2) =$$

$$= \frac{2\sqrt{c+1}}{\sqrt{-1-y}}(-1-y+1+y) +$$

$$+2y\left(\frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{c+1}} - \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+3}}\right) - y = y - y = 0. \qquad (16)$$

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$, тогда из (9) и (15) получаем

$$4H(f,y) = 2y + \int_c^{c+2} \frac{\sqrt{c+1} \cdot x}{\sqrt{(x+1)^3}} dx +$$

$$+ \int_{c+2}^{2-y} \frac{\sqrt{c+3} \cdot x}{\sqrt{(x-1)^3}} dx + \int_{2-y}^{c+4} \frac{\sqrt{c+3} \cdot y}{\sqrt{(x-1)^3}} dx + (c+2) =$$

$$= 2\frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{1-y}}(1-y-1+y) +$$

$$+2\left(\frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{c+1}} + \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+3}}\right) - (c+2) = \qquad (17)$$

$$= (c+2) - (c+2) = 0.$$

Таким образом, $H(f,y) = 0$ на отрезке $[-(c+4), -c]$.

Далее, пусть $y \in (-\infty, -(c+8)]$, тогда $4H(f,y) = 4\int_c^{c+4} xf(x)dx = 4(c+2)$, откуда

$$H(f,y) = c+2 = \sqrt{17}. \qquad (18)$$

Пусть $y \in [-(c+8), -(c+6)]$, тогда

$$4H(f,y) = \int_c^{-4-y} xf(x)dx +$$

$$+ \int_{-4-y}^{c+4} yf(x)dx + 3\int_c^{c+4} xf(x)dx, \qquad (19)$$

$$4H'(f,y) = (4+2y)f(-4-y) + \int_{-4-y}^{c+4} f(x)dx =$$

$$= \frac{2(2+y)\sqrt{c+3}}{\sqrt{(-5-y)^3}} +$$

$$+ \int_{-4-y}^{c+4} \frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(x-1)^3}} = -2 - \frac{6\sqrt{c+3}}{\sqrt{(-5-y)^3}} < 0. \qquad (20)$$

Пусть $y \in [-(c+6), -(c+4)]$, тогда

$$4H(f,y) = \int_c^{-4-y} xf(x)dx + \int_{-4-y}^{c+4} yf(x)dx +$$

$$+ \int_c^{-2-y} xf(x)dx + \int_{-2-y}^{c+4} yf(x)dx +$$

$$+2\int_c^{c+4} xf(x)dx, \qquad (21)$$

$$4H'(f,y) = (4+2y)f(-4-y) +$$

$$+ \int_{-4-y}^{c+4} f(x)dx + (2+2y)f(-2-y) +$$

$$+ \int_{-2-y}^{c+4} f(x)dx =$$

$$= \frac{(4+2y)\sqrt{c+1}}{\sqrt{(-3-y)^3}} + \int_{-4-y}^{c+2} \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{(x+1)^3}} dx +$$

$$+ \int_{c+2}^{c+4} \frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(x-1)^3}} dx + \frac{(2+2y)\sqrt{c+3}}{\sqrt{(-3-y)^3}} +$$

$$+ \int_{-2-y}^{c+4} \frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(x-1)^3}} dx =$$

$$= -\frac{2(\sqrt{c+1} + 2\sqrt{c+3})}{\sqrt{(-3-y)^3}} - 3 < 0. \qquad (22)$$

Пусть $y \in [-c, -(c-2)]$, тогда

$$4H(f,y) = 2y +$$

$$+ \int_c^{2-y} xf(x)dx + \int_{2-y}^{c+4} yf(x)dx +, \qquad (23)$$

$$+ \int_c^{4-y} xf(x)dx + \int_{4-y}^{c+4} yf(x)dx,$$

$$4H'(f,y) = 2 + (-2+2y)f(2-y) +$$

$$+ \int_{2-y}^{c+4} f(x)dx + (-4+2y)f(4-y) +$$

$$+ \int_{4-y}^{c+4} f(x)dx =$$

$$=2+\frac{(-2+2y)\sqrt{c+1}}{\sqrt{(3-y)^3}}+$$
$$+\int_{2-y}^{c+2}\frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{(x+1)^3}}dx+\int_{c+2}^{c+4}\frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(x-1)^3}}dx+$$
$$+\frac{(-4+2y)\sqrt{c+3}}{\sqrt{(3-y)^3}}+\int_{4-y}^{c+4}\frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(x-1)^3}}dx=$$
$$\frac{4\sqrt{c+1}+2\sqrt{c+3}}{\sqrt{(3-y)^3}}-1. \qquad (24)$$

Имеем

$$4H'(f,-c+0)=\frac{4\sqrt{c+1}+2\sqrt{c+3}}{\sqrt{(c+3)^3}}-1=$$
$$=\frac{\left(4\sqrt{c+1}+2\sqrt{c+3}\right)\left(\sqrt{c+1}\right)}{\sqrt{c+3}\cdot\sqrt{c+1}\cdot(c+3)}-1=$$
$$=\frac{4c+4+8}{4(c+3)}-1=0, \qquad (25)$$
$$4H''(f,y)=\frac{6\sqrt{c+1}+3\sqrt{c+3}}{\sqrt{(3-y)^3}}>0, \qquad (26)$$

откуда

$$H'(f,y)>0 \text{ в } \left(-c,-(c-2)\right]. \qquad (27)$$

Пусть, наконец, $y\in\left[-(c-2),0\right]$, тогда

$$4H(f,y)=3y+$$
$$+\int_{c}^{4-y}xf(x)dx+\int_{4-y}^{c+4}yf(x)dx, \qquad (28)$$
$$4H'(f,y)=3+(-4+2y)f(4-y)+$$
$$+\int_{4-y}^{c+4}f(x)dx=$$
$$=3+\frac{(-4+2y)\sqrt{c+3}}{\sqrt{(3-y)^3}}+\int_{4-y}^{c+4}\frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(x-1)^3}}dx=$$
$$=\frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(3-y)^3}}+1>0. \qquad (29)$$

Из формул (16), (17), (18), (20), (22), (25), (27) и (29) заключаем, что $H(f,y)>0$ для $y\in\left(-\infty,-(c+4)\right)\cup\left(-c,0\right]$, что и завершает доказательство теоремы.

Литература

1. Farber H. An analysis of final-offer arbitration // Journal of conflict resolution. – V. 35. – 1980. – Pp. 683-705.
2. Mazalov V.V., Zabelin A.A., Karpin A.S. Equilibrium in arbitration game // Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. – 2002. – Pp. 41-46.
3. Mazalov V.V., Mentcher A.E., Tokareva J.S. On a discrete arbitration procedure in three points // Game Theory and Applications 11, Nova Science Publishers. – N.Y., 2005. – Pp. 87-91.