МАТЕМАТИКА

© Г. Анхбаяр, Д. Халтар

Монголия, Улан-Батор, Национальный университет Монголии

Оптимизация в моделях однокогортной популяции с учетом сохранения ее потомства [1]

В данной работе получены явные формулы оптимальных процессов в моделях Фишера и Кларка, когда численность потомства однокогортной популяции ограничена снизу.

© G. Ankhbayar, D. Haltar

Optimization in models of single cohort population with constraint for number of descendants

In present work is written explicit formula for optimal process in Fisherian and Clark's models with bounded below number of descendants.

1. Модель Фишера с ограничением

Допустим, что одна особь возраста t рождает потомство в количестве $b(t)\geq 0$. Мы будем предполагать, что $b(t)$ является неотрицательной непрерывной функцией, такой, что множества

$$B_c=\{t\in[0,\infty)\,|\,b(t)\geq c>0\}$$

выпуклы и ограничены и $\exists t_b>0$ такая, что $\forall t>t_b, b(t)>0$.

Тогда все потомство популяции за время $[0,\infty)$ будет равняться

$$\int_0^\infty b(t)x(t)dt.$$

Наша оптимизационная модель без учета затраты на рыболовство имеет следующии вид:

$$\int_0^\infty e^{-rt}w(t)x(t)u(t)dt\to\max, \qquad (1)$$

$$\int_0^\infty b(t)x(t)dt-Q\geq 0, \qquad (2)$$

$$\dot{x}(t)=-(m+u(t))x(t), \qquad (3)$$

$$x(0)=R,\ u(t)\geq 0,$$

где $x(t)$ – численность особей возраста t, $m>0$ – коэффициент естественной смертности, $u(t)$ – интенсивность изъятия, $w(t)$ – живой вес особи возраста t.

Лемма. Необходимым и достаточным условием существования решения задачи $(1)-(3)$ является выполнение неравенства

$$R\int_0^\infty e^{-mt}b(t)dt\geq Q. \qquad (4)$$

Кроме того, при выполнении условия

$$R\int_0^{t_0} b(t)e^{-mt}dt\geq Q \qquad (5)$$

решение задачи $(1)-(3)$ совпадает с решением классической модели Фишера [1,3].

Доказательство. Действительно, при невыполнении неравенства (4) не существует никакого допустимого управления в задаче (1)-(3). С другой стороны, при выполнении этого неравенства управление

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<\theta,\\ \xi(t)\in[0,\infty), & t\geq\theta,\end{cases}$$

где $R\int_0^\theta b(t)e^{-mt}dt=Q$ является допустимым следовательно, решение задачи (1)-(3) существует. Первая часть леммы доказана.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (совместный российско-монгольский проект 07-01-90101).

Вторая часть очевидна, так как при выполнении неравенства (5)задача (1)-(3) эквивалентна задаче без ограничения [1, 3].

И так нам нужно исследовать случай, когда

$$R\int_0^{t_0} b(t)e^{-mt}dt < Q,\ R\int_0^{\infty} b(t)e^{-mt}dt \geq Q. \quad (6)$$

Рассматривая задачу (1)-(3) на достаточно большом промежутке [0,T], преобразуем её к следующему виду

$$\int_0^T e^{-rt}w(t)\upsilon(t)dt -> \max, \quad (7)$$

$$\dot{x}(t) = -mx(t) - \upsilon(t), \quad (8)$$

$$\int_0^T b(t)x(t)dt \geq Q, \quad (9)$$

$$x(0) = R,\ x(T) \geq 0,\ \upsilon(t) \geq 0. \quad (10)$$

Но нам удобно будет исследовать задачу с двумя фазовыми переменными, которая эквивалентна к проблеме (7)-(10)

$$\int_0^T e^{-rt}w(t)\upsilon(t)dt -> \max, \quad (11)$$

$$\dot{x}(t) = -mx(t) - \upsilon(t), \quad (12)$$

$$\dot{y}(t) = b(t)x(t), \quad (13)$$

$$x(0) = R, x(T) \geq 0,$$

$$\upsilon(t) \geq 0, y(0) = 0, y(T) \geq Q. \quad (14)$$

Теорема 1. При выполнении условий (6) оптимальное одноимпульсное управление имеет вид[5]

$$\upsilon(t) = \begin{cases} 0 & ,t \neq t_0^*, \\ \mathrm{Re}^{-mt_0^*}\cdot\delta(t - t_0^*) & ,t = t_0^*, \end{cases}$$

где t_0^* находится из условия

$$t_0^* = \{\theta \mid R\int_0^{\theta} b(t)e^{-rt}dt = Q\}.$$

Доказательство. Гамильтониан задачи (11)-(14) выглядит как

$$H(t,x(t),\psi_1(t),\psi_2(t),\upsilon(t)) =$$
$$= e^{-rt}w(t)\upsilon(t) - \psi_1(t)(mx(t) + \upsilon(t)) +$$
$$+\psi_2(t)b(t)x(t).$$

Отсюда имеем следующую сопряженную систему

$$\dot{\psi}_1(t) = m\psi_1(t) - b(t)\psi_2(t), \quad (15)$$

$$\dot{\psi}_2(t) = 0 \quad (16)$$

с граничными условиями

$$\psi_1(T) \geq 0, \psi_2(T) \geq 0,$$

$$\psi_1(T)x(T) + \psi_2(T)(y(T) - Q) = 0.$$

Нетрудно видеть, что функции $y(t),\psi_1(t),\psi_2(t)$ не имеют разрывов в точках импульсов, и поэтому из (16) следует, что $\psi_2(t) = const = \psi_2 \geq 0$.

Из непрерывности $b(t)$ и уравнения (15) следует гладкость функции $\psi_1(t)$. Кроме того, будем предполагать, что в задаче (11)-(14) существует оптимальное решение с импульсом в одной точке $t_0 < \theta \leq T$, т.е.

$$\upsilon(t) = c\delta(t - \theta) + u(t). \quad (17)$$

В силу принципа максимума[2] выполняется соотношение

$$H_\upsilon(t) = -\psi_1(t) + e^{-rt}w(t) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \psi_1(t) \geq e^{-rt}w(t)(t \neq \theta), \quad (18)$$
$$H_\upsilon(\theta) = -\psi_1(\theta) + e^{-r\theta}w(\theta) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \psi_1(\theta) = e^{-r\theta}w(\theta).$$

Из этих соотношений и гладкости функции $\psi_1(t)$ и унимодальности функции $e^{-rt}w(t)$ следует, что эти функции касаются в одной точке θ, причем при $t \neq \theta$ неравенство (18) будет строгим, следовательно, $u(t) \equiv 0$ для $t \neq \theta$ в левой части формулы (17). Отсюда также следует, что $c = \mathrm{Re}^{-m\theta}$. Допустим, что $\psi_2 = 0$. Тогда $\psi_1(t) = \psi_1(0)e^{mt} = w(\theta)e^{-(r+m)\theta}e^{mt}$ и $e^{-rt}w(t)$ касаются в единственной точке $\theta = t_0^*$. Следовательно, $x(t) = 0$ для $t \geq t_0^*$ и поэтому в силу первого неравенства (6)

$$R\int_0^{t_0} b(t)e^{-mt}dt = \int_0^{T} b(t)x(t)dt < Q,$$

что противоречит условию (10) задачи (7)-(10). И так $\psi_2 > 0$, следовательно, $y(T) = Q$ в силу второго граничного условия.

Напишем условие касания функции $\psi_1(t)$ и $e^{-rt}w(t)$ в точке θ

$$\begin{cases} \psi_1(\theta) = e^{-r\theta}w(\theta), \\ \dot{\psi}_1(\theta) = m\psi_1(\theta) - \psi_2 b(\theta) = \\ \qquad e^{-r\theta}(\dot{w}(\theta) - rw(\theta)). \end{cases}$$

Из первого равенства и первого уравнения сопряжённой системы (15) получим

$$\psi_1(t) = e^{mt}(w(\theta)e^{-(r+m)\theta} +$$
$$+\int_0^{\theta}\psi_2 b(\tau)e^{-m\tau}d\tau - \int_0^{t}\psi_2 b(\tau)e^{-m\tau}d\tau).$$

Подставив эту формулу во второе уравнение, окончательно получаем

$$r + m - \frac{\dot{w}(\theta)}{w(\theta)} = \frac{b(\theta)\psi_2 e^{r\theta}}{w(\theta)}. \quad (19)$$

Это уравнение имеет решение $\theta > t_0$, так как $b(\theta) > 0$ (если бы $b(\theta) = 0$, то $b(t) = 0\ \forall t \le \theta$). Так как $x(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [\theta, T]$ и $y(T) = Q$, то

$$R\int_0^\theta b(t)e^{-rt}dt = Q.$$

Наименьшее значение $t_0^* = \min\theta$, которое удовлетворяет этому уравнению, будет точкой импульса. Из (19) можно определить ψ_2 и функцию $\psi_1(t)$. Теорема доказана.

2. Модель Кларка с ограничением

Модель Кларка [1] с ограничением имеет следующий вид

$$\int_0^\infty e^{-rt}(w(t)x(t)u(t) - Cu(t))dt \to \max, \quad (20)$$

$$\int_0^\infty b(t)x(t)dt - Q \ge 0, \quad (21)$$

$$\dot{x}(t) = -(m + u(t))x(t), \quad (22)$$

$$x(0) = R,\ u(t) \ge 0.$$

Теорема 2. При $\int_0^\infty b(t)x^*(t)dt \ge Q$ оптимальный процесс в задаче (20)-(22) будет как в классической модели Кларка [3,5], а в противном случае оптимальная численность $\tilde{x}(t)$ и оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ выражаются соответственно формулами

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} Re^{-mt}, & 0 \le t < t_1^*, \\ \dfrac{Cr}{w(t)(m + r - \dfrac{\dot{w}(t)}{w(t)}) - \lambda b(t)e^{rt}}, & t_1^* \le t \le t_2^*, \\ \tilde{x}(t_2^*)e^{-mt}, & t_2^* < t, \end{cases}$$

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0 & , t \notin [t_1^*, t_2^*], \\ -m - \dfrac{\dot{\tilde{x}}(t)}{\tilde{x}(t)} & t \in [t_1^*, t_2^*], \end{cases}$$

где t_1^*, t_2^* и неопределенный множитель $\lambda > 0$ определяются из системы

$$\begin{cases} r = \dfrac{\mathrm{Re}^{-mt_1^*}\cdot(-mw(t_1^*) + \dot{w}(t_1^*) + \lambda b(t_1^*)e^{rt_1^*})}{w(t_1^*)\mathrm{Re}^{-mt_1^*} - C} \\ \lambda \cdot e^{rt_2^*}b(t_2^*) = mw(t_2^*) - \dot{w}(t_2^*), \\ \int_0^\infty b(t)\tilde{x}(t)dt = Q. \end{cases}$$

Доказательство. Гамильтониан и сопряженное уравнение для задачи (20)-(22) имеют виды

$$H(x(t), \psi(t), u(t), \lambda) =$$
$$= e^{-rt}\hat{H}(x(t), q(t), u(t), \lambda) =$$
$$= e^{-rt}(w(t)x(t)u(t) - Cu(t) + \lambda b(t)x(t)e^{rt} -$$
$$-q(t)(m + u(t))x(t)),$$
$$\dot{q}(t) = -w(t)u(t) - \lambda b(t)e^{rt} +$$
$$+q(t)(m + u(t)) + rq(t).$$

Из условия оптимальности мы получаем [4]

$$\frac{\partial\hat{H}}{\partial u} = w(t)x(t) - C - q(t)x(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{w}(t)x(t) + w(t)\dot{x}(t) - \dot{q}(t)x(t) - q(t)\dot{x}(t) = 0.$$

При $x(t) \ne 0$ мы для оптимальной численности во время вылова имеем

$$\tilde{x}(t) = \frac{Cr}{w(t)(m + r - \dfrac{\dot{w}(t)}{w(t)}) - \lambda b(t)e^{rt}}. \quad (23)$$

Оптимальное время t_1^* начала рыболовства определяется из формулы (23) при условиях $\dot{\tilde{x}}(t_1^*) = -m\tilde{x}(t_1^*), \tilde{x}(t_1^*) = R\cdot e^{-mt_1^*}$:

$$r = \frac{\mathrm{Re}^{-mt_1^*}\cdot(-mw(t_1^*) + \dot{w}(t_1^*) + \lambda b(t)e^{rt})}{w(t_1^*)\mathrm{Re}^{-mt_1^*} - C}. \quad (24)$$

Из условия $\lambda \ge 0$, мы видим, что момент начала вылова t_1^* не меньше чем начальный момент вылова t_1 в классической модели Кларка [3]. Вылов должен завершиться в тот момент, когда значение подынтегральной функции становится отрицательным, т.е. время завершения вылова t_2^* определяется равенством

$$\lambda\cdot e^{rt_2^*}b(t_2^*) = mw(t_2^*) - \dot{w}(t_2^*), \quad (25)$$

что означает $(t_2 \le t_2^*)$, где t_2 – время завершения вылова в классической модели Кларка [3]. Пусть $x^*(t)$ оптимальная численность в классической модели Кларка, которая выражается формулой

$$x^*(t) = \begin{cases} \mathrm{Re}^{-mt}, & 0 \le t < t_1, \\ \dfrac{Cr}{w(t)(r + m - \dfrac{\dot{w}(t)}{w(t)})}, & t_1 \le t \le t_2, \\ x^*(t_2)e^{-mt}, & t_2 < t. \end{cases}$$

Ясно, что при $\int_0^\infty b(t)x^*(t)dt \ge Q$ будут

$$t_1^* = t_1,\ t_2^* = t_2,\ u^*(t) = \tilde{u}(t),$$
$$x^*(t) = \tilde{x}(t),\ \lambda = 0,$$

где $u^*(t), \tilde{u}(t)$ – соответственно оптимальные управления в классической задаче Кларка и в нашей задаче, $x^*(t), \tilde{x}(t)$ – соответствующие численности популяции.

В случае $\int_0^\infty b(t)x^*(t)dt < Q$ неопределенный множитель λ и моменты времени $t_1^*(\lambda),\ t_2^*(\lambda)$ определяются из соотношений (24)-(25) и дополнительного уравнения $\int_0^\infty b(t)\tilde{x}(t)dt = Q$, где $\tilde{x}(t) =$

$$= \begin{cases} \mathrm{Re}^{-mt}, & 0 \le t < t_1^*, \\ \dfrac{Cr}{w(t)(m + r - \dfrac{\dot{w}(t)}{w(t)}) - \lambda b(t)e^{rt}}, & t_1^* \le t \le t_2^*, \\ \tilde{x}(t_2^*)e^{-mt}, & t_2^* < t. \end{cases}$$

Литература

1. Fisher I. The theory of interest.-New York: Macmillan,1930.
2. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 256 с.
3. Schott S. The significance of the Fisherian harvest rule in a single cohort model // Canadian Economics Association Meeting, University of British Columbia, Vanconver, 2000.
4. Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи: Учеб. пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 304 с.
5. Ankhbayar G., Haltar D., Baljinnyam Ts. Resource management in Fisherian and Clark's extended single cohort models // ICID 21st European Regional Conference, Germany, 2005.