© Д.О. Трунин
Улан-Удэ, Бурятский государственный университет

Метод фазовой линеаризации в задачах оптимального управления с терминальными ограничениями

В работе предлагается метод фазовой линеаризации для решения задач оптимального управления с дополнительными функциональными ограничениями. Процедуры последовательного улучшения доступных управлений разрабатываются на основе фазовых вариаций функционалов задачи с использованием техники игольчатого и слабого варьирования.

© D.O. Trunin

A phase linearization method in optimal control problems with terminal constrains

This work is devoted to phase linearization method in optimal control problem with terminal constrains. The procedures of consecutive improvement of accessible controls are developed on the basis of phase variations of a functionals with use of technics of a needle and weak variation.

Рассмотрим управляемый процесс

$$\dot{x} = f(x,u,t), t \in T = [t_0, t_1], \qquad (1)$$

$$x(t_0) = x^0. \qquad (2)$$

Здесь $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ – вектор фазового состояния, $u = u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t))$ – управление, $x^0 \in R^n$ – заданный вектор, интервал T фиксирован.

Определим множество доступных управлений

$$V = \{u \in L_\infty^r(T) : u(t) \in U, t \in T\},$$

где U – компактное множество в R^r.

Для $v \in V$ обозначим через $x(t,v)$ решение задачи Коши (1), (2) при $v = v(t)$.

На множестве V определим функционалы

$$\Phi_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) + \int_T F_i(x,u,t)dt, i = \overline{0,m}$$

и поставим задачу оптимального управления

$$\Phi_0(u) \to \min, \qquad (3)$$

$$\Phi_i(u) = 0, i = \overline{1,m}. \qquad (4)$$

Введем в рассмотрение функционал, характеризующий невязку выполнения функциональных ограничений в задаче (1) – (4)

$$\Phi(u) = \max_{1 \le i \le m} |\Phi_i(u)|. \qquad (5)$$

Определим множество допустимых управлений

$$W = \{u \in V : \Phi(u) = 0\}.$$

Для каждого функционала $\Phi_i, i = \overline{0,m}$ определим функцию Понтрягина

$$H^i(\psi^i, x, u, t) =$$

$$= \langle \psi^i, f(x,u,t) \rangle - F_i(x,u,t), i = \overline{0,m}.$$

Введем в рассмотрение сопряженные системы

$$\dot{\psi}^i = -H^i_x(\psi^i, x, u, t), \qquad (6)$$

$$\psi^i(t_1) = -\varphi_{ix}(x(t_1)), i = \overline{0,m}. \qquad (7)$$

Для управления $u \in V$ обозначим через $\psi^i(t,u), i = \overline{0,m}$, $t \in T$ решения задач Коши (6), (7) при $x = x(t,u), u = u(t)$.

Для управлений $u, v \in V$ обозначим через $p^i(t,u,v), i = \overline{0,m}$, $t \in T$ решения задач Коши (6), (7) при $\psi^i = p^i, i = \overline{0,m}$, $x = x(t,u), u = v(t)$.

Для фиксированного вектора множителей $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) \in R^{m+1}$ введем в рассмотрение функционал Лагранжа

$$L(u,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \Phi_i(u). \qquad (8)$$

Составим общую функцию Понтрягина

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 05-01-00659, 07-01-90101).

$$H(\lambda,\psi,x,u,t)=$$
$$=\langle\psi,f(x,u,t)\rangle-\sum_{i=0}^{m}\lambda_i F_i(x,u,t)$$

и общую сопряженную систему

$$\dot\psi=-H_x(\lambda,\psi,x,u,t),\qquad(9)$$

$$\psi(t_1)=-\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\varphi_{ix}(x(t_1)).\qquad(10)$$

Для управления $u\in V$ обозначим через $\psi(t,u,\lambda)$ решение задачи Коши (9), (10) при $x=x(t,u),u=u(t)$.

Для управлений $u,v\in V$ обозначим через $p(t,u,v,\lambda)$ решение задачи Коши (9), (10) при $\psi=p,x=x(t,u),u=v(t)$.

Поставим задачу одновременного улучшения функционалов (5), (8) на основе фазовых вариаций функционалов с использованием техники игольчатого варьирования.

Пусть $u^0\in V$. Определим процедуру его варьирования

$$u_{v,\chi}(t)=u^0(t)+\chi(t)(v(t)-u^0(t)),$$

где $v\in V$ – вспомогательное управление, $\chi\in X_\alpha$ – функция варьирования.

Множество X_α определяется следующим образом

$$X_\alpha=\left\{\begin{matrix}\chi\in L_\infty(T):\chi(t)=0\vee 1,\\ t\in T,\int_T\chi(t)dt=\alpha(t_1-t_0)\end{matrix}\right\}.$$

В соответствии с [3] формулы приращения функционалов задачи имеют вид:

$$\Delta_{u_{v,\chi}}\Phi_i(u^0)=-\int_T[\chi(t)\Delta_{u_{v,\chi}(t)}$$
$$H^i\left(p^i(t,u^0,u_{v,\chi}),x(t,u^0),u^0(t),t\right)]dt+\qquad(11)$$
$$+o(\alpha),i=\overline{0,m},$$

$$\Delta_{u_{v,\chi}}L(u^0,\lambda)=-\int_T[\chi(t)\Delta_{u_{v,\chi}(t)}$$
$$H\left(p(t,u^0,u_{v,\chi},\lambda),x(t,u^0),u^0(t),t\right)]dt+\qquad(12)$$
$$+o(\alpha).$$

Фиксируя $\alpha\in[0,1]$, рассмотрим следующую вспомогательную задачу на поиск параметров варьирования

$$\int_T\chi(t)\Delta_{v(t)}H^0\left(p^0(t),x(t,u^0),u^0(t),t\right)dt\to$$
$$\to\max,\qquad(13)$$

$$\int_T\chi(t)\Delta_{v(t)}H^i\left(p^i(t),x(t,u^0),u^0(t),t\right)dt=$$
$$=\alpha\Phi_i(u^0),i=\overline{1,m},\qquad(14)$$

$$\chi\in X_\alpha,v\in V,t\in T.\qquad(15)$$

Здесь $p^i(t),i=\overline{0,m}$ – непрерывные n-мерные вектор-функции, играющие роль функциональных параметров.

Пусть

$\bar u_\alpha(p^0(t),p^1(t),...,p^m(t),t)$,

$\chi_\alpha(p^0(t),p^1(t),...,p^m(t),t)$ – решение задачи (13) – (15).

Сформируем семейство варьированных управлений

$$w_\alpha(p^0(t),p^1(t),...,p^m(t),t)=$$
$$=u^0(t)+\chi_\alpha(p^0(t),p^1(t),...,p^m(t),t)\times\qquad(16)$$
$$\times\left(v^\alpha(p^0(t),p^1(t),...,p^m(t),t)-u^0(t)\right).$$

Найдем решения $p^i_\alpha(t),i=\overline{0,m}$ сопряженных систем

$$\dot p^i=-H^i{}_x(p^i,x(t,u^0),$$
$$w_\alpha(p^0(t),p^1(t),...,p^m(t),t),t),\qquad(17)$$
$$p^i(t_1)=-\varphi_{ix}(x(t_1,u^0)),i=\overline{0,m}$$

и сформируем управление

$$v_\alpha(t)=w_\alpha(p^0_\alpha(t),p^1_\alpha(t),...,p^m_\alpha(t),t).\qquad(18)$$

Аналогично строится процедура последовательного улучшения доступных управлений на основе фазовых вариаций функционалов с использованием техники слабого варьирования.

Метод фазовой линеаризации наиболее эффективен для линейных по состоянию задач оптимального управления с линейными функциональными ограничениями

$$\dot x=A(u,t)x+b(u,t),t\in T,$$
$$x(t_0)=x^0,u(t)\in U,\qquad(19)$$

$$\Phi_0(u)=\varphi_0(x(t_1))+\int_T F_0(x,u,t)dt\to\min,\qquad(20)$$

$$\Phi_i(u)=\left\langle c^i,x(t_1)\right\rangle+$$
$$+\int_T\left[\left\langle d^i(u,t),x\right\rangle+g^i(u,t)\right]dt=0,i=\overline{1,m}.\qquad(21)$$

В данном классе задач формулы приращения (11) являются точными при $i=\overline{1,m}$, что позволяет построить итерационную процедуру улучшения целевого функционала на множестве допустимых управлений.

Если функционал (20) является линейным относительно фазовых переменных, то метод фазовой линеаризации решает задачу (19) – (21) за одну итерацию при $\alpha=1$ для любого начального управления $u^0\in V$.

Исследуем проблему решения вспомогательной задачи (13) – (15).

Введем обозначения

$$a_0 = \alpha(t_1 - t_0), a_i = \alpha\Phi_i(u^0), i = \overline{1,m},$$

$$d^j = -\varphi_{jx}(x(t_1, u^0)), j = \overline{0,m}.$$

Введем в рассмотрение следующие объекты

$$y(t) = \int_{t_1}^{t} \chi(\tau)d\tau, \quad (22)$$

$$z_i(t) = \int_{t_1}^{t} [\chi(\tau)\times$$

$$\times\Delta_{v(\tau)}H^i\left(p^i(\tau), x(\tau,u^0), u^0(\tau), \tau\right)]d\tau, \quad (23)$$

$$i = \overline{0,m}.$$

Тогда с учетом (22), (23) и (6), (7) имеем

$$\dot{y} = \chi(t),$$

$$\dot{z}_i = \chi(t)\Delta_{v(t)}H^i\left(p^i, x(t,u^0), u^0(t), t\right), i = \overline{0,m},$$

$$\dot{p}^i = -H^i{}_x(p^i, x(t,u^0), w(t), t), i = \overline{0,m},$$

$$y(t_0) = 0, z_0(t_0) = 0, p^i(t_1) = d^i, i = \overline{0,m},$$

$$z_0(t_1) \to \min, y(t_1) = a_0, z_j(t_1) = a_j, j = \overline{1,m},$$

$$\chi(t) = 0 \vee 1, v(t) \in U, t \in T.$$

Здесь (y, z, p) – фазовое состояние, (χ, v) – управление, причем $w(t) = u^0(t) + \chi(t)\left(v(t) - u^0(t)\right)$.

С учетом того факта, что функция Понтрягина и ее частные производные по x линейны относительно сопряженных переменных, данная задача является линейной по состоянию задачей оптимального управления с частично закрепленным правым концом и к ее решению могут применяться процедуры нелокального улучшения, разработанные в [4].

Литература

1. Булдаев А.С. Процедуры нелокального улучшения в полиномиальных по состоянию системах управления. -- Иркутск: Изд-во ИГУ, 2002. – 46 с. (Сер. «Оптимизация и управление». Вып. 7.)

2. Васильев О.В. Лекции по методам оптимизации. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1994. – 340 с.

3. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.

4. Трунин Д.О. Метод нелокального улучшения управлений в линейных задачах оптимального управления с функциональными ограничениями // Материалы II Всероссийской конференции «Математика, ее приложения и математическое образование». – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2005. – С. 223-225.

Принята в печать 17.11.2006.