© Л.А. Бохоева
Россия, Улан-Удэ, Восточно-Сибирский государственный технологический университет

Исследование устойчивости пластин с дефектами типа круглых отслоений[1]

В данной работе рассматривается задача о нелинейном поведении пластины с круглым отслоением из слоистых материалов при потере устойчивости «смешанного» типа. Получены в явном виде характеристические уравнения для определения критической нагрузки пластины с дефектами типа отслоений в элементах конструкций, при одновременно локальной и глобальной потери устойчивости.

© L.A. Bohoeva

Research of stability of plates with defects such as circular delamination

In the paper presents an nonlinear analysis of a plate with circular delamination from layered materials. The characteristic equations for definition of critical loading of a plate with defects of type circular delamination in elements of designs are received in an obvious kind, at simultaneously local and global loss of stability.

При проектировании конструкций из слоистых композиционных материалов весьма важной задачей является задача прогнозирования поведения их под нагрузкой. Дефекты типа отслоения являются распространённым видом дефекта и часто считаются определяющим фактором при решении вопроса об использовании композиционных материалов. В зависимости от относительных величин толщины и длины отслоения под действием сжимающих нагрузок наблюдаются три вида потери устойчивости элементов конструкций: общая потеря устойчивости (глобальная); локальная потеря устойчивости в зоне дефекта; одновременно локальная и глобальная («смешанная»).

Для длинных отслоений деформирование начинается с локального выпучивания тонкого отслоившегося слоя, но при увеличении нагрузки изгибные деформации возникают и в остальных частях элемента конструкции. В данной работе рассматривается задача о нелинейном поведении пластины с круглым отслоением при потере устойчивости «смешанного» типа. Из анализа существующих подходов для решения этой задачи следует, что метод математически либо строг и слишком сложен, либо предполагает проведение трудоемких вычислений. Поэтому назрела необходимость получения приближенного расчета закритических деформаций, которые предшествуют распространению дефекта, удобного для практического использования инженерам-конструкторам.

В работе рассматривается упрощенная конфигурация круглой пластины с радиусом a, которая имеет дефект в виде круглой платины с радиусом R, причем для нее выполняются следующие предположения:

1) Существует единственное приповерхностное отслоение круглой формы;
2) Это отслоение отделяет тонкий изотропный слой толщиной h от основной платины толщиной H;
3) Размеры дефекта R малы по сравнению с основной пластиной, но велики по сравнению с толщиной отслоившегося слоя h.

В области дефекта пластина состоит из двух частей: отслоившаяся часть (верхняя) толщиной h с изменением радиуса $0 \le r \le R$ и нижняя часть, расположенная ниже отслоения, толщина которого равна *(H-h)* с изменением радиуса $0 \le r \le R$. Пластина разбивается на три участка (рис.1), и вводятся следующие обозначения:

$$\varsigma = \frac{r}{R}; \quad \bar{h} = \frac{h}{H}; \quad \bar{a} = \frac{R}{a},$$

где $u_i(r)$ - радиальное перемещение, $w_i(r)$ - функция поперечного прогиба, $(i=1,2)$,

[1] Работа выполнена в рамках целевой программы МОиН РФ «Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 гг.)» (проект № РНП.2.1.2.5517).

 $w_3(r)$ и $u_3(r)$ - функции перемещений, полученные в работе [1]. Пусть $P_1(r)$, $P_2(r)$, $P_3(r)$ соответственно нагрузка на *1,2,3* участках. Введем обозначения:

$$Q_i(\xi)=\frac{P_i(r)R^2}{D_i}\ (i=1,3),\ \ \lambda^2=Q_2=\frac{P_2R^2}{D_2},$$

$$\psi(\varsigma)=\frac{R^2w_3'(r)}{hr\sqrt{6(1-\mu^2)}}\ (0\le\varsigma\le1),$$

$w_1(r)=w_1(\varsigma)$, $w_2(r)=w_2(\varsigma)$, $w_2(\varsigma)=w_2(r)$, (1)

где $D_1=\dfrac{EH^3}{12(1-\mu^2)}$; $D_2=\dfrac{(H-h)^3E}{12(1-\mu^2)}$;

$$D_3=\frac{h^3E}{12(1-\mu^2)}$$

Рассмотрим второй участок. В полярной системе координат основное линеаризованное уравнение для круглой пластины, нагруженной контурными усилиями P_2, принимает вид

$$\left[\frac{R}{r}\left\{\frac{r}{R}w_2'(\varsigma)\right\}'\right]'=-\lambda^2w_2'(\varsigma),\ (0\le\varsigma\le1).$$

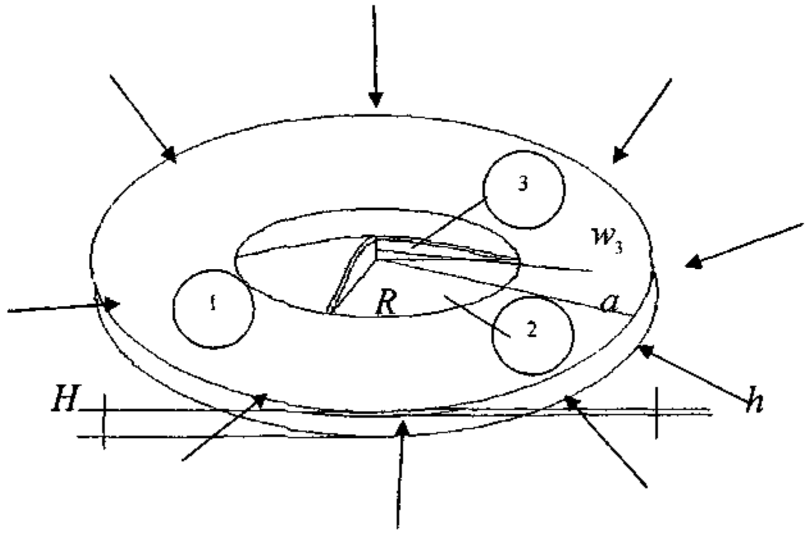

Рис.1

Не обращающееся в бесконечность при *r=0* решение для сплошной пластины как при осесимметричной, так и при неосесимметричной форме потери устойчивости определяется зависимостью

$$w_2(r)=B_1J_0(\lambda\varsigma)+B_2,$$

где $J_0(\lambda\varsigma)$ – функция Бесселя, первого рода $J_0'(\lambda\varsigma)=-\dfrac{\lambda}{R}J_1(\lambda\varsigma)$.

Следовательно,

$$\left.\frac{dw_2}{dr}\right/_{r=R}=\frac{1}{R}w_2'(r)=-(B_1\lambda/R)J_1(\lambda\varsigma).$$

При $r=R$ зависимость между перемещениями на 2 и 3 участках имеет вид

$$B_1=-\frac{h\psi(1)}{\sqrt{6(1-\mu^2)}\lambda Y_1(\lambda)}.$$

Так как при осесимметричной форме потери устойчивости напряжения и деформации на 2 участке равны $\sigma_r=\sigma_0=-\dfrac{P_2}{(H-h)}$, $\varepsilon_r=\varepsilon_0=-\dfrac{P_2(1-\mu)}{E(H-h)}$, то величина радикального перемещения при $r=R$

$$\left.u_2(r)\right/_{r=R}=-\frac{(1-\mu)RP_2}{E(H-h)}. \qquad (2)$$

При $r=R$ прогиб дефекта (3 участок) и дефектного участка (2 участок) должны быть геометрически совместимы, т.е. должно быть выполнено необходимое условие совместимости

$$u_3(R)=u_2(R)+\frac{H}{2}w_3'(R).$$

Используя зависимости (1) и (2), имеем

$$\frac{(1-\mu)R\lambda^2E(H-h)^3}{E(H-h)12R^2(1-\mu^2)}=$$

$$=-u_3(R)+\frac{Hh\psi(1)}{2R\sqrt{6(1-\mu^2)}}$$

Отсюда следует выражение для λ^2

$$\lambda^2 = -\frac{12R(1+\mu)}{(H-h)^2}u_3(R) + +\frac{Hh}{(H-h)^2}\sqrt{\frac{6(1+\mu)}{1-\mu}}\psi(1) \qquad (3)$$

На первом участке дифференциальное уравнение будет иметь вид:

$$\left[\frac{R}{r}\left\{\frac{r}{R}w_1'(\varsigma)\right\}'\right]' = -Q_1(\varsigma)w_1'(\varsigma),$$

$$1 \le \varsigma \le \frac{a}{R}.$$

Введем обозначение функции $f(\varsigma)$

$$f(\varsigma) = \frac{w_1'(\varsigma)\sqrt{6(1-\mu^2)}R}{h},$$

тогда дифференциальное уравнение можно представить в виде

$$\left[\frac{R}{r}\left\{\frac{r}{R}f(\varsigma)\right\}'\right]' = -Q_1(\varsigma)f(\varsigma), \quad 1 \le \varsigma \le \frac{a}{R},$$

при $r=R$ $f(1)=\psi(1)$.

Первый участок можно представить в виде толстостенной трубы, находящейся под действием внешнего давления, тогда напряжения и перемещения равны

$$\sigma_r(r) = A - Br^{-2};$$

$$\sigma_\theta(r) = A + Br^{-2};$$

$$u_1(r) = \frac{1}{E}\left[A(1-\mu)r + B(1+\mu)\frac{1}{r}\right].$$

Уравнение совместимости второго и первого участков при $r=R$, полученное из условия укорочения под действием сжимающей нагрузки и дополнительного сближения вызванного изгибом дефекта, можно записать в виде:

$$u_1(R) = u_2(R) + \frac{h}{2}w_3'(R). \qquad (4)$$

С учетом уравнений (1), (2), (3) уравнение (4) преобразуем следующим образом

$$A(1-\mu)R^2 + B(1+\mu) = = -\frac{(1-\mu)\lambda^2 D_2}{(H-h)} + \frac{h^2 E\psi(1)}{2\sqrt{6(1-\mu^2)}}, \qquad (5)$$

где $P_2R^2 = \lambda^2 D_2$.

Так как функцию $\psi(1)$ можно представить в виде

$$\psi(1) = \sqrt{\frac{1-\mu}{6(1+\mu)}\frac{(H-h)^2}{Hh}\lambda^2 + +\frac{12R(1+\mu)}{Hh}\sqrt{\frac{1-\mu}{6(1+\mu)}}u_3(R)},$$

тогда уравнение (5) имеет вид

$$A(1-\mu)R^2 + B(1+\mu) = -\frac{(1-\mu)\lambda^2 D_2}{H-h} + +\frac{h^2 E}{2\sqrt{6(1-\mu^2)}}\sqrt{\frac{1-\mu}{6(1+\mu)}}\frac{(H-h)^2}{Hh}\lambda^2 + +\frac{h^2 E}{2\sqrt{6(1-\mu^2)}}\frac{12R(1-\mu)}{Hh}\sqrt{\frac{1-\mu}{6(1+\mu)}}u_3(R) =$$

$$= -\frac{(1-\mu)\lambda^2 D_2}{H-h} + \frac{hE(H-h)^3}{2\cdot 6(H-h)H}\cdot \sqrt{\frac{1-\mu}{(1-\mu)(1+\mu)(1+\mu)}}\lambda^2 + +\frac{12REh}{12H}\sqrt{\frac{(1+\mu)(1+\mu)(1-\mu)}{(1+\mu)(1-\mu)(1+\mu)}}u_3(R) =$$

$$= -\frac{(1-\mu)\lambda^2 D_2(1-\bar{h})}{(H-h)} + RE\bar{h}u_3(R) =$$

$$= (1-\mu)\lambda^2 D_2\frac{1}{H} + RE\bar{h}u_3(R)$$

Сделав преобразования, получаем

$$A(1-\mu)R^2 + B(1+\mu) = = -\frac{1-\mu}{H}\lambda^2 D_2 + RE\bar{h}u_3(R) \qquad (6)$$

В сечении на границе дефекта должно выполняться уравнение равновесия сил (при $z=R$):

$$P_1 = P_2 + P_3,$$

где $P_1 = \dfrac{Q_1(1)D_2}{R^2}$; $P_2 = \dfrac{\lambda^2 D_2}{R^2}$; $P_3 = \dfrac{Q_3(1)D_3}{R^2}$

или

$$\frac{Q_1(1)D_1}{R^2} = \frac{Q_3(1)D_3}{R^2} + \frac{\lambda^2 D_2}{R^2}.$$

Так как при $r=R$ имеет место следующая зависимость

$$\sigma_r/_{r=R} = A - B/R^2 = -\frac{P_1(1)}{H^2}, \text{ тогда}$$

$$A - B/R^2 = -(Q_3(1)D_3 + \lambda^2 D_2)/HR^2.$$

Решая совместно систему уравнений (4), (6), при $r=R$ можно найти коэффициенты A и B, которые равны

$$B = \frac{1}{2}\left\{\frac{Q_3(1)D_3}{H} + RE\bar{h}u_3(R)\right\},$$

$$A = \frac{1}{2HR^2}\left[-Q_3(1)D_3 - 2\lambda^2 D_2 + REhu_3(R)\right].$$

Так как

$$\sigma_r = \frac{-q_1(r)}{H} = \frac{-Q_1(\varsigma)D_1}{HR^2} = A - B\frac{1}{r^2},$$

тогда

$$Q_1(\varsigma) = \frac{-AHR^2}{D_1} + \frac{BHR^2}{D_1 r^2} =$$

$$= \frac{-HR^2}{2HR^2 D_1}\left[-Q_3(1)D_3 - 2\lambda^2 D_2 + REhu_3(R)\right] +$$

$$+ \frac{HR^2}{H2D_1 r^2}\left[Q_3(1)D_3 + REhu_3(R)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\bar{h}^3 Q_3(1)\left(1 + \frac{1}{\varsigma^2}\right) +$$

$$+ \left(1-\bar{h}\right)^3 \lambda^2 + REhu_3(R)\cdot\frac{1}{2D_1}\left(\frac{1}{\varsigma^2} - 1\right)$$

При $r=R$ величина $Q_1(\varsigma)$ равна

$$Q_1\left(a/R\right) = \frac{1}{2}\bar{h}^3 Q_3(1)\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right) +$$

$$+ \left(1-\bar{h}\right)^3 \lambda^2 + REhu_3(R)\frac{1}{2D_1}\cdot\left(\frac{R^2}{a^2} - 1\right) \qquad (7)$$

Радиальное перемещение при $r=R$ равно

$$u_1(R) = \frac{1}{E}\left[A(1-\mu)a + B(1+\mu)\frac{1}{a}\right] =$$

$$= \frac{(1-\mu)a}{2EHR^2}\times$$

$$\times\left[-Q_3(1)D_3 - 2\lambda^2 D_2 + REhu_3(R)\right] +$$

$$+ \frac{1+\mu}{2aH}\left[Q_3(1)D_3 + REhu_3(R)\right]. \qquad (8)$$

При заданных геометрических параметрах и характеристиках материала по формулам (7) и (8) можно определить критическую нагрузку и перемещения круглой пластины с дефектом.

Уравнение равновесия моментов имеет вид

$$M_1(R) = M_2(R) +$$

$$+ M_3(R) + \frac{P_2 h}{2} - \frac{P_3(H-h)}{2}\cdot$$

При $r=R$ на первом участке

$$M_1(R) = \frac{D_1 h}{R\sqrt{6(1-\mu^2)}}\left[\frac{1}{R}f'(1)\right] +$$

$$+ \frac{\mu D_1}{R}\frac{\psi(1)\cdot h}{R\sqrt{(1-\mu^2)}} =$$

$$\frac{D_1 h}{R^2\sqrt{6(1-\mu^2)}}\left[f'(1) + \mu\psi(1)\right]$$

На втором участке при $r = R$

$$M_2(R) = D_2\left[\frac{h\psi(1)}{R^2\sqrt{6(1-\mu^2)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{h\psi(1)}{R^2\sqrt{6(1-\mu^2)}}\lambda\frac{J_2(\lambda)}{J_1(\lambda)} + \frac{M}{R}\frac{h\psi(1)}{R\sqrt{6(1-\mu^2)}}\right] =$$

$$= \frac{D_2 h\psi(1)}{R^2\sqrt{6(1-\mu^2)}}\left[1 + \mu - \lambda\frac{J_2(\lambda)}{J_1(\lambda)}\right].$$

На третьем участке:

$$M_3(R) =$$

$$= \frac{D_3 h}{R^2\sqrt{6(1-\mu^2)}}\left[\psi'(1) + (\mu+1)\psi(1)\right].$$

Из уравнения равновесия моментов получаем выражение для вычисления $f(1)$ при $\varsigma = 1$, т.е. при $r=R$

$$\frac{D_1\cdot h}{R^2\cdot\sqrt{6\cdot(1-\mu^2)}}\left[f'(1) + \mu\cdot\psi(1)\right] =$$

$$= \frac{D_2\cdot h\cdot\psi(1)}{R^2\cdot\sqrt{6\cdot(1-\mu^2)}}\left[1 + \mu - \lambda\frac{J_2(\lambda)}{J_1(\lambda)}\right] +$$

$$+ \frac{D_3\cdot h}{R^2\cdot\sqrt{6\cdot(1-\mu^2)}}\left[\psi'(1) + (1+\mu)\cdot\psi(1)\right] +$$

$$+ \frac{P_2\cdot h}{2} - \frac{P_3\cdot(H-h)}{2},$$

где $P_2 = \frac{\lambda^2\cdot D_2}{R^2}$, $P_3 = \frac{Q_3(\varsigma)\cdot D_3}{R^2} = \frac{Q_3(1)\cdot D_3}{R^2}$,

сделав преобразования, окончательно получаем:

$$f'(1) = -\mu\psi(1) +$$

$$+ \left(1-\bar{h}\right)^3\psi(1)\left[1 + \mu - \lambda\frac{J_2(\lambda)}{J_1(\lambda)}\right] +$$

$$+ \bar{h}^3\left[\psi'(1) + (1+\mu)\psi(1)\right] +$$

$$+ \frac{\sqrt{6\cdot(1-\mu^2)}}{2}\times$$

$$\times\left[\lambda^2\cdot\left(1-\bar{h}\right)^3 - \bar{h}^2\left(1-\bar{h}\right)\cdot Q_3(1)\right]$$

В работе получены в явном виде характеристические уравнения для определения критической нагрузки и закритического поведения пластины с дефектами типа круглых отслоений в элементах конструкций из слоистых материалов, при одновременно локальной и глобальной потере устойчивости.

Литература

1. Бохоева Л.А. Устойчивость круглых отслоений в слоистых элементах конструкций с учетом поперечного сдвига // Межвуз. сборник науч. трудов. – Чита, 1994. – С. 21-25.