

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФГБОУ ВПО «Восточно-Сибирский государственный университет  
технологий и управления»

На правах рукописи



Дабаева Мария Жалсановна

**МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ  
ТВЕРДЫХ ТЕЛ, УСТАНОВЛЕННЫХ НА УПРУГОМ СТЕРЖНЕ,  
НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук,  
профессор А.Д. Мижидон

Улан-Удэ  
2015

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |    |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ.....   | 4  |
| ГЛАВА 1. Принципы и методы математического моделирования механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами.....                  | 10 |
| 1.1 Обзор литературных источников.....  | 10 |
| 1.2 Математические основы моделирования механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами .....                                  | 13 |
| 1.2.1 Обобщенные функции.....   | 14 |
| 1.2.2 Обобщенное решение дифференциальных уравнений.....  | 17 |
| 1.3 Вариационные принципы механики.....   | 20 |
| 1.3.1 Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского для систем с сосредоточенными параметрами.....   | 21 |
| 1.3.2 Уравнения Лагранжа второго рода.....  | 25 |
| 1.3.3 Принцип Гамильтона-Остроградского для систем с распределенными параметрами.....   | 27 |
| 1.4 Иллюстрация метода исследования на примере простейшей механической системы с сосредоточенными и распределенными параметрами.....                | 30 |
| 1.4.1 Математическая модель.....  | 31 |
| 1.4.2 Исследование свободных колебаний.....   | 32 |
| 1.4.3 Применение метода расчета собственных колебаний.....  | 41 |
| Выводы по главе.....  | 49 |
| ГЛАВА 2. Системы твердых тел, установленных на балке Эйлера-Бернулли. Обобщенная математическая модель. Метод исследования свободных колебаний..... | 50 |
| 2.1 Математические модели типовых систем.....   | 50 |
| 2.1.1 Твердое тело с двумя степенями свободы на балке Эйлера-Бернулли.....  | 50 |
| 2.1.2 Математическая модель механической системы «балка Эйлера-Бернулли с горизонтально расположенными твердыми телами»..                           | 55 |
| 2.1.3 Математическая модель механической системы «балка Эйлера-Бернулли с вертикально расположенными твердыми телами»...                            | 60 |
| 2.2 Обобщенная математическая модель системы твердых тел, установленных на балке Эйлера-Бернулли.....   | 66 |
| 2.2.1 Гибридная система дифференциальных уравнений.....   | 67 |
| 2.2.2 Вспомогательная краевая задача.....   | 71 |

|   |     |
|---|-----|
| 2.2.3 Аналитико-численный метод построения уравнения частот....   | 75  |
| 2.3 Исследование собственных колебаний типовых систем.....  | 78  |
| 2.3.1 Исследование собственных колебаний механической системы «твердое тело с двумя степенями свободы на балке Эйлера-Бернулли».....                  | 78  |
| 2.3.2 Исследование собственных колебаний механической системы «балка Эйлера-Бернулли с горизонтально расположенными твердыми телами».....             | 82  |
| 2.3.3 Исследование собственных колебаний механической системы «балка Эйлера-Бернулли с вертикально расположенными твердыми телами».....               | 87  |
| Выводы по главе.....  | 91  |
| ГЛАВА 3. Развитие метода исследований.....  | 92  |
| 3.1 Учет демпфирующих свойств упругих связей в обобщенной математической модели.....  | 92  |
| 3.1.1 Обобщенная математическая модель с учетом демпфирующих свойств.....   | 92  |
| 3.1.2. Обобщения аналитико-численного метода.....   | 96  |
| 3.1.3 Исследование одной типовой системы. Сравнительный анализ.....   | 101 |
| 3.2 Обобщения метода исследования свободных колебаний на случай вынужденных колебаний.....  | 104 |
| 3.2.1 Гармоническое силовое возмущение, приложенное к системе твердых тел.....  | 104 |
| 3.2.2 Гармоническое силовое возмущение, приложенное к балке Эйлера-Бернулли.....  | 109 |
| 3.2.3 Исследование вынужденных колебаний механической системы «балка Эйлера-Бернулли с горизонтально расположенными упруго-соединенными массами»..... | 115 |
| 3.2.4 Исследование вынужденных колебаний механической системы «балка Эйлера-Бернулли с вертикально расположенными упруго-соединенными массами».....   | 119 |
| Выводы по главе.....  | 127 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....   | 128 |
| ЛИТЕРАТУРА.....   | 130 |

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** При исследовании механических колебаний элементов различных объектов современной техники во многих случаях расчетными схемами исследования может рассматриваться твердое тело (или система твердых тел), соединенное упругими связями со стержнем. В частности, такие расчетные схемы могут быть использованы при исследовании систем виброзащиты объектов, установленных на упругом основании (например, на балке Эйлера-Бернулли). Отметим, в настоящее время в рамках существующих теорий трудно строго исследовать вопросы динамики механических систем, содержащих как объекты с сосредоточенными параметрами, так и объекты с распределенными параметрами. С одной стороны, соответствующие теории для этих объектов изначально изложены на различных, порой трудно совместимых языках. С другой стороны, применение вариационного принципа Гамильтона для построения уравнений динамики общего для систем с сосредоточенными и распределенными параметрами приводит к рассмотрению гибридных систем дифференциальных уравнений, исследованию которых в настоящее время не уделено должное внимание. Под гибридными системами дифференциальных уравнений понимается система дифференциальных уравнений, состоящая из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Таким образом, разработка строгих научно-обоснованных методов исследования гибридных систем дифференциальных уравнений, описывающих колебания механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, является актуальной научной проблемой. В частности, актуальной представляется разработка обобщенных математических моделей, представляющих собой класс математических моделей систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к стержню, и методов исследования собственных колебаний на их основе. Под обобщенной математической моделью понимается система гибридных дифференциальных уравнений, заданной структуры,

описывающая динамику различных систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к стержню.

**Предметом исследований** является построение обобщенной математической модели, описывающей класс математических моделей систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к стержню, и на ее основе разработка теоретических основ исследования их собственных колебаний.

**Методика исследования.** Для построения математических моделей используется вариационный принцип Гамильтона. Анализ полученных уравнений движения для различных типовых схем позволил предложить обобщенную математическую модель балки Эйлера-Бернулли, с закрепленными краями и прикрепленной на ней, с помощью упругих связей, системой твердых тел, соединенных между собой упругими связями, в виде гибридной системы дифференциальных уравнений заданной структуры. Для исследования гибридной системы дифференциальных уравнений используется аппарат теории обобщенных функций и дифференциальных уравнений. Вместе с тем при исследовании собственных колебаний развивается единый подход к исследованию таких систем. Суть единого подхода заключается в следующем. С помощью гармонической подстановки, зависящей от скалярных и функциональных коэффициентов, исходная гибридная система дифференциальных уравнений сводится к алгебраическо-дифференциальной системе уравнений, относительно коэффициентов. Для нахождения функциональных коэффициентов вводится их представление в виде некоторых зависимостей от функций типа Грина, нахождение которых сводится к вспомогательным краевым задачам, которые решаются аналитически. Найденные функции позволяют получить систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно скалярных коэффициентов и значений функциональных коэффициентов, вычисленных в точках крепления упругих связей со стержнем. Условие нетривиальности решений системы линейных алгебраических уравнений определяет частотное уравнение. Достоверность предложенного подхода подтвер-

ждается проведенным сравнительным анализом собственных частот, найденных данным подходом, с решениями, полученными в литературе для некоторых частных расчетных схем.

### **Цель работы и задачи исследования.**

Целью работы является построение теоретических основ исследования собственных колебаний системы взаимосвязанных твердых тел, соединенных с помощью упругих связей со стержнем (балка Эйлера-Бернулли) на основе обобщенных математических моделей.

В соответствии с поставленной целью решаются следующие задачи:

- 1) построение обобщенной математической модели взаимосвязанной системы твердых тел, соединенных с балкой Эйлера-Бернулли;
- 2) разработка единого аналитико-численного метода построения частотного уравнения исследуемых систем;
- 3) обобщение аналитико-численного метода построения частотного уравнения на случай учета демпфирования в упругих связях в обобщенной математической модели;
- 4) развитие общего подхода исследований собственных колебаний на случай вынужденных колебаний при гармоническом возмущении.

**Научная новизна.** Впервые рассмотрена обобщенная математическая модель, описывающая систему взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера-Бернулли, на основе которой разработан единый аналитико-численный метод построения частотного уравнения для данного класса механических систем. В рамках развиваемого подхода проведен учет демпфирующих свойств упругих связей в обобщенной математической модели.

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности.** Диссертация соответствует паспорту специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и ее областям:

- п. 1.2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей»;

п. 1.3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»;

п. 1.5 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Впервые предложена обобщенная математическая модель, представляющая собой класс математических моделей различных систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера-Бернулли. Разработаны аналитико-численные методы исследования собственных колебаний систем, описываемых обобщенной математической моделью. Разработанный метод исследования собственных колебаний систем реализован в виде комплекса программ. В целом полученные результаты позволяют провести исследование собственных колебаний элементов различных машин и механизмов, расчетные модели, которых представимы в виде некоторой взаимосвязанной системы твердых тел, соединенной упругими связями с балкой Эйлера-Бернулли.

**Степень достоверности.** Все исследования диссертационной работы были проведены в рамках общепринятых допущений и предположений. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгим математическим обоснованием и подтверждается проведенным сравнительным анализом собственных частот, найденных данным подходом, с решениями конкретных задач из литературных источников, для некоторых частных расчетных схем.

**Апробация результатов работы.**

Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались:

- на Всероссийской научно-практической конференции «Авиационное строительство и транспорт Сибири», г. Иркутск, 2013г.;

- на Всероссийской научно-практической конференции «Информационно-телекоммуникационные системы и технологии», Кемерово, 2014г.;

- на IV и V Международных конференций «Математика, ее приложения и математическое образование», г. Улан-Удэ, 2011г., 2014г.;

- на V и VI Международных конференций «Проблемы механики современных машин», г. Улан-Удэ, 2012г., 2015г.;

- на ежегодных научно-практических конференциях Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, на научных семинарах кафедры «Прикладная математика» ВСГУТУ, г. Улан-Удэ (2010-2015).

**Публикации.** По тематике диссертации опубликовано 10 научных работ, включая статьи в журналах и трудах конференций, из которых 4 в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ для опубликования результатов диссертационных работ. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

**Работа выполнялась согласно** плану НИР ФГБОУ ВПО «Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления» в рамках научного направления университета «Методы математического моделирования, оптимизация и управление» (2010-2015); планам работ по грантам РФФИ «Алгоритмическое и программное обеспечение решения задач автоматизации проектирования виброзащитных систем», № 12-08-00309а; «Теоретические основы математического моделирования системы твердых тел и стержней», № 15-08-00973а.

Исследования диссертационной работы поддержаны: грантом по приоритетным направлениям науки для молодых ученых ВСГУТУ (2010г.); грантом «Молодые ученые ВСГУТУ» (2014г.).

**Общая характеристика работы.** Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы.

В первой главе дан обзор современного состояния исследуемой проблемы. Также приведены основные математические понятия и факты моделирования механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, положенные в методическую основу проведенных исследова-



ний. В качестве иллюстрации развиваемого в диссертационной работе общего подхода исследованию систем твердых тел, прикрепленных к стержню, проведено исследование простейшей механической системы с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Во второй главе рассматривается построение системы гибридных дифференциальных уравнений, описывающих динамику типовых механических систем. Вводится в рассмотрение обобщенная математическая модель балки Эйлера-Бернулли с прикрепленной на ней с помощью упругих связей произвольной системой твердых тел. Приведены необходимые теоретические исследования, связанные с разработкой аналитико-численного метода исследования колебательных процессов в системах, описываемых обобщенными математическими моделями.

В третьей главе рассматривается обобщенная математическая модель с учетом демпфирования в упругих связях. Также производится обобщение метода исследования на случай вынужденных колебаний при гармоническом возмущении.

В заключении приведены основные научные результаты, полученные в диссертационной работе.

Общий объем работы составляет 139 страниц, 4 таблицы, 19 рисунков. Список литературы содержит 104 наименования.

# ГЛАВА 1. Принципы и методы математического моделирования механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами

## 1.1 Обзор литературных источников

Исследованию механических колебаний упругих систем, в частности стержней, пластин и оболочек, посвящено достаточно большое количество работ. Математическая теория исследования таких систем изложена в фундаментальных трудах С.П. Тимошенко [80-85], А.Н. Крылова [53-56], Г.П. Пановко [73,74], А.С. Вольмира [34-35], В.В. Болотина [25-28], В.С. Гонткевич [40], Э.И. Григолюк [41] и др.

В настоящее время основная масса публикаций связана с исследованиями колебательных процессов, происходящих в упругих системах, при различных гипотезах и инженерных предположениях относительно математической модели, вызванных спецификой рассматриваемой задачи. Имеется ряд работ, посвященных исследованию динамического поведения стержней, пластин и оболочек с присоединенными сосредоточенными массами. При этом решаются задачи в самой разнообразной постановке. Например, группа ученых (А.М. Ахтямов и др.) [7-10], [87-88] решает задачи идентификации закрепления упругих тел по собственным частотам их изгибных колебаний. В работе Л.Д. Акуленко, Л.И. Коровина, С.В. Нестерова [3] проведено исследование собственных частот и форм поперечных колебаний стержня, вращающегося вокруг фиксированной на его конце оси. В диссертации М.И. Вольникова [36] разработаны математические модели стержневых конструкций с гасителями колебаний для исследования динамики консольных конструкций типа стержень. В работе А.Н. Кузьмина [57] рассматриваются изгибные колебания пакета тонких вязкоупругих пластин, шарнирно соединенных с упругими стержнями, концы которых жестко закреплены в торцевых стенках каркаса пакета. В диссертации М.В. Борисова [29] предложен метод построения математической модели движения составной упругой системы, основанный на разложении перемещений отдельных элементов конструкции на орто-

гональные формы, соответствующие собственным частотам изолированных движений. Интересным приложением теории упругих систем является использование стержневых систем при исследовании колебаний нанообъектов. Рассмотрению таких задач посвящена работа В.А. Еремеева, Е.А. Ивановой, Н.Ф. Морозова, А.Н. Соловьева [48]. В работе Ю.В. Троценко [86] разработан вариационный метод приближенного решения задачи о собственных поперечных колебаниях тонкостенной круговой цилиндрической оболочки, к торцам которой жестко прикреплены две упругие балки. Б.А. Антуфьевым и А.Б. Смяном [6] рассматривается приближенное определение собственных частот, нижней части спектра колебаний, тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки конечной длины с двумя консольно прикрепленными к ней пластинами. Ряд работ посвящен исследованию собственных колебаний неоднородных тонкостенных структур. В монографиях И.Я. Амиро, В.А. Заруцкого [4] и И.Н. Преображенского, В.З. Грищак [75] соответственно приведены результаты исследований ребристых оболочек вращения и конических оболочек. В работах А.Л. Дышко, И.Д. Павленко, Ю.М. Селиванова и А.С. Каирова [47], [51] проведены исследования колебаний цилиндрических оболочек, ослабленных отверстиями. В монографии Л.В. Андреева, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко [5] рассмотрены вопросы динамики пластин и оболочек с присоединенными массами. Наряду с аналитическими исследованиями развитие компьютерных вычислительных технологий позволило в расчетной практике все чаще применять численные методы. Наиболее популярным из них является метод конечных элементов (МКЭ) [50]. Для реализации МКЭ разработан ряд сертифицированных программных пакетов (ABAQUS, COSMOS, ANSYS, NASTRAN, DYNA, COMPASS и др.), отличающихся обилием и наглядностью получаемых результатов, что, несомненно, привлекает внимание инженеров и исследователей. Однако применительно к задачам исследования динамики механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами вопросы анализа конечно-элементных схем вызывают во многих случаях непреодолимые трудности. В целом использо-

вание МКЭ для расчета собственных характеристик НТС требует наличия у пользователя соответствующего опыта или предварительной качественной информации о характерных типах форм колебаний рассчитываемого объекта; в отсутствие таковых достоверность результатов остается сомнительной. В этой связи возрастает значение экспериментальных исследований с использованием высокоинформативных бесконтактных методов, наиболее эффективными из которых являются методы голографической интерферометрии [31]. В работах Ю.М. Селиванова, Д.В. Ключника [77-78] обобщаются результаты исследований по совместному использованию голографической интерферометрии и МКЭ в анализе собственных колебаний оболочек и пластин.

В монографии Ю.Н. Санкина, Н.А. Югановой [76] исследуются нестационарные колебания сложных стержневых систем при наличии неограниченного количества упруго-присоединенных масс, при произвольном силовом воздействии, приложенном на концах и по длине стержня. В статье Ю.П. Жигалко, С.И. Соловьева [49] рассмотрена задача о собственных колебаниях балки с присоединенным на конце гармоническим осциллятором. Отметив монографию Ю.Н. Санкина, Н.А. Югановой [76] и статью Ю.П. Жигалко, С.И. Соловьева [49], которые в целом несколько близки тематике диссертационной работы, можем сделать вывод. Проведенный обзор показал, что за исключением работ коллектива авторов под руководством А.Д. Мижидона [11-23], [42-45], [59-70], [94] в российских изданиях практически нет публикаций об исследованиях систем упруго взаимосвязанных твердых тел и стержней. При этом следует отметить, имеются близкие по тематике диссертации исследования, проводимые зарубежными учеными. Библиография, соответствующая этим исследованиям, достаточно обширна. Например, в работах D.Cha Philip [97] и J.-J. Wu, A.R. Whittaker [101] решается задача нахождения низших частот балки Эйлера Бернулли, с установленным с помощью двух пружин твердым телом.

Следующие статьи посвящены исследованию собственных колебаний, для различных конкретных расчетных схем балки с упруго прикрепленными твердыми телами: J.S. Wu, H.M. Chou [103], J.S. Wu [102], S. Naguleswaran [95], S. Naguleswaran [96], S. Kukla, B. Posiadala [90], H. Su, J.R. Banerjee [100]. В статье H.Y. Lin, Y.C. Tsai [91] рассмотрена задача исследования собственных колебаний балки Эйлера-Бернулли, установленной на опоры с упруго прикрепленными твердыми телами. Учет демпфирования в упругих связях при исследовании собственных колебаний, для одной расчетной схемы – балка с упруго прикрепленными твердыми телами – произведен в работе J.-J. Wu, A.R. Whittaker [101].

В приведенных работах рассматриваются математические модели тех или иных конкретных типовых расчетных схем, для исследования свободных колебаний которых разрабатываются специальные, ориентированные на них аналитические, численно-аналитические методы, или используется МКЭ. При этом многие рассмотренные математические модели типовых расчетных схем являются частными случаями обобщенной математической модели – балки Эйлера-Бернулли с прикрепленной на ней системой твердых тел, предложенной в диссертационной работе.

## **1.2 Математические основы моделирования механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами**

При совместном изучении механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, в частности при рассмотрении систем твердых тел, соединенных упругими связями со стержнями, возникают значительные затруднения, которые связаны, прежде всего, с многообразием вариантов закрепления абсолютно твердых тел к упругим стержням. Для преодоления подобных затруднений обычно производится разбиение стержней на участки с последующим сшиванием решений в точках крепления упругих связей. Однако такой подход сопряжен со значительным увеличением объема вычислений при отыскании аналитического решения, а при численном реше-

нии требует большой подготовительной работы. Другой, более продуктивный путь состоит в привлечении относительно простого и достаточно наглядного математического аппарата обобщённых функций, который широко применяется в математической физике, квантовой механике и других дисциплинах для описания точечных масс и зарядов, точечных источников теплоты, сосредоточенных сил и моментов.

В 1926 г. П. Дирак [46], [89] при проведении исследований по квантовой механике впервые ввел понятие  $\delta$ -функции, которая не являлась функцией в классическом смысле. Под  $\delta$ -функцией им понимался некоторый функционал, ставящий в соответствие каждой непрерывной функции  $\varphi(x)$  число  $\varphi(0)$  (ее значение в нуле). Впоследствии усилиями многих математиков, в частности Ж. Адамара [1], С. Бохнера [30], М. Рисса [95] было найдено корректное определение  $\delta$ -функции, как обобщенной функции. Основы математической теории обобщенных функций были заложены С.Л. Соболевым в 1936 г. в работе [99] при изучении задачи Коши для гиперболического уравнения. Систематическому построению теории обобщенных функций была посвящена монография Л. Шварца [98]. В дальнейшем теория обобщенных функций интенсивно развивалась в работах многих математиков. В качестве фундаментальных трудов по теории обобщенных функций следует отметить работы И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова [37-39], С.Л. Соболева [79], В.С. Владимирова [32-33].

### 1.2.1 Обобщенные функции

Введение понятия обобщенной функции вызвано необходимостью дать строгое описание сосредоточенной в точке силы. Обобщенная функция определяется как функционал, ставящий в соответствие некоторой основной функции  $\varphi(x)$  число [39],[52], [72].

*Определение 1.2.1.* Функции  $\varphi(x)$ , имеющие производные всех порядков, финитные ( $\varphi(x) \equiv 0$  вне некоторого интервала  $[a, b]$ ) называют основ-

ными. Отметим, интервал, вне которого функция  $\varphi(x)$  обращается в ноль, может быть различным для различных основных функций. Множество всех таких функций  $K$  назовем пространством основных функций. Это пространство является линейным пространством со всеми линейными операциями.

*Определение 1.2.2.* Обобщенной функцией называется всякий линейный функционал на пространстве основных функций  $K$ .

Значение обобщенной функции  $f$  на основной функции  $\varphi(x)$  будем обозначать  $(f, \varphi)$ . Пространство обобщенных функций над пространством основных функций  $K$  будем обозначать  $K'$ .

*Определение 1.2.3.* Регулярной обобщенной функцией, порождаемой локально-интегрируемой функцией  $f(x)$  называют интеграл:

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx. \quad (1.2.1)$$

Сходимость данного интеграла обеспечивается на любом конечном интервале за счет локальной интегрируемости функции  $f(x)$ , а при бесконечном интервале за счет финитности основной функции  $\varphi(x)$ .

Заметим, что классическая функция Хэвисайда (функция единичного скачка) [52]

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

порождает функционал

$$(\theta, \varphi) = \int_0^{\infty} \theta(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx. \quad (1.2.3)$$

*Определение 1.2.4.* Линейные непрерывные функционалы, не являющиеся регулярными обобщенными функциями, называются сингулярными обобщенными функциями.

Наиболее типичным примером сингулярной обобщенной функции является  $\delta$  - функция Дирака. С физической точки зрения  $\delta$  - функция пред-

ставлялась Дираком как плотность единичного заряда, находящегося в начале координат.

Функцию Дирака можно определить соотношением:

$$\int_{-\infty}^x \delta(x)\varphi(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \varphi(0) & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Из соотношения (1.2.4) следует, что при сдвиге координаты  $x$  выполняется

$$\int_{-\infty}^x \delta(x-a)\varphi(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \varphi(a) & \text{при } x \geq a. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Отметим, что функции, порождающие линейные функционалы (обобщенные функции) на пространстве основных функций, также часто называют обобщенными функциями.

Операция дифференцирования обобщенных функций вводится следующим образом [33], [37].

*Определение 1.2.5* Производной обобщенной функции  $f$ , порождаемой функцией  $f(x)$ , или коротко обобщенной производной функции  $f(x)$  называется функционал  $f'$  на пространстве основных функций  $K$ , определяемый следующим образом:

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'). \quad (1.2.6)$$

Из определения производной следует, что любая обобщенная функция имеет любое количество производных, при этом справедливо

$$(f^{(m)}, \varphi) = (-1)^m (f, \varphi^{(m)}). \quad (1.2.7)$$

*Утверждение 1.2.1.* Обобщенной производной функции Хэвисайда  $\theta(x)$  является функция Дирака  $\delta(x)$ :

$$(\theta', \varphi) = (\delta, \varphi). \quad (1.2.8)$$

Действительно,

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int_0^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(\infty) + \varphi(0) = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$



Используя  $\delta$ - функцию Дирака можно записать математическое представление распределенной нагрузки от действия сосредоточенной силы  $P$

$$q(x) = P\delta(x). \quad (1.2.9)$$

Если сила  $P$  приложена не в начале системы координат, а в другой точке с координатой  $x = a$ , то соответствующее распределение получается из (1.2.9) простым сдвигом

$$q(x) = P\delta(x - a).$$

### 1.2.2 Обобщенное решение дифференциальных уравнений

Теория обобщенных функций способствовала дальнейшему развитию теории линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x). \quad (1.2.10)$$

Отметим, под классическим решением понимаем функцию  $y(x)$ , имеющую  $n$  непрерывных производных и удовлетворяющую уравнению (1.2.10). Как известно, такое решение заведомо существует, если правая часть  $f(x)$  уравнения (1.2.10) непрерывно дифференцируемая функция.

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор  $L$ :

$$Ly(x) = a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y. \quad (1.2.11)$$

*Определение 1.2.6.* Сопряженным оператором к оператору  $L$  называется оператор  $L^*$  определяемый равенством

$$L^* y(x) = (-1)^n a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots - a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y. \quad (1.2.12)$$

*Утверждение 1.2.1.* Для обобщенной функции  $y(x) \in K'$  и любой основной функции  $\varphi \in K$  справедливо равенство (интегральное тождество)

$$(Ly, \varphi) = (y, L^* \varphi). \quad (1.2.13)$$

Справедливость (1.2.13) легко можно доказать, интегрируя левую часть (1.2.13) по частям и учитывая при этом финитность основных функций.

В соответствии с утверждением 1.2.1, считая, что  $f(x)$  обобщенная функция вводится понятие обобщенного решения дифференциального уравнения (1.2.10) [28].

*Определение 1.2.7.* Обобщенным решением дифференциального уравнения (1.2.10) называется такая обобщенная функция  $y(x)$ , что для любой основной функции  $\varphi \in K$  справедливо равенство

$$(y, L^* \varphi) = (f, \varphi). \quad (1.2.14)$$

*Замечание 1.2.1.* Классическое решение дифференциального уравнения (1.2.10) является обобщенным.

*Замечание 1.2.2.* Обобщенное решение дифференциального уравнения (1.2.10), имеющее  $n$  непрерывных производных является классическим.

Отметим, если правая часть дифференциального уравнения (1.2.10)  $f(x)$  есть непрерывно дифференцируемая функция, то уравнение имеет только классическое решение. Если правая часть уравнения  $f(x)$  является сингулярной обобщенной функцией, например  $f(x) = \delta(x)$ , то решение уравнения (1.2.1) следует понимать только в обобщенном смысле.

*Определение 1.2.8.* Фундаментальным решением оператора  $L$  называется обобщенное решение уравнения

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = \delta(x). \quad (1.2.15)$$

При дальнейших исследованиях будем иметь дело с фундаментальным решением  $y = g(x)$ , удовлетворяющим условию  $g(x) = 0$  при  $x < 0$ .

*Теорема 1.2.1.* Если  $y = \tilde{g}(x)$  частное решение однородного дифференциального уравнения

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \quad (1.2.16)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0, \dots, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}(0) = 0, \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(0) = \frac{1}{a_n}, \quad (1.2.17)$$

то фундаментальное решение оператора  $L$  запишется в виде

$$g(x) = \tilde{g}(x)\theta(x), \quad (1.2.18)$$

где  $\theta(x)$  – классическая функция Хэвисайда.

*Доказательство.* При любом  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  для любой основной функции справедливо соотношение

$$\int a_i \frac{d^i(\tilde{g}(x)\theta(x))}{dx^i} \varphi(x) dx = \int a_i \frac{d^i \tilde{g}(x)}{dx^i} \theta(x) \varphi(x) dx. \quad (1.2.19)$$

Справедливость (1.2.19) докажем методом математической индукции.

При  $i = 0$  очевидно

$$\int a_0 \frac{d^0(\tilde{g}(x)\theta(x))}{dx^0} \varphi(x) dx = \int a_0 \tilde{g}(x)\theta(x) \varphi(x) dx.$$

При  $i = 1$ , учитывая начальное условие  $\tilde{g}(0) = 0$  и утверждение 1.2.1,

имеем

$$\begin{aligned} \int a_1 \frac{d(\tilde{g}(x)\theta(x))}{dx} \varphi(x) dx &= \int a_1 \left( \frac{d\tilde{g}(x)}{dx} \theta(x) + \tilde{g}(x)\delta(x) \right) \varphi(x) dx = \\ &= \int a_1 \frac{d\tilde{g}(x)}{dx} \theta(x) \varphi(x) dx + a_1 \tilde{g}(0)\varphi(0) = \int a_1 \frac{d\tilde{g}(x)}{dx} \theta(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Пусть (1.2.19) выполняется при некотором номере  $i = 2, 3, \dots, n-2$ . Докажем справедливость при  $i+1$ .

Учитывая начальные условия (1.2.17)  $\frac{d^i \tilde{g}(0)}{dx^i} = 0$  и утверждение 1.2.1

получим

$$\begin{aligned} \int a_{i+1} \frac{d^{i+1}(\tilde{g}(x)\theta(x))}{dx^{i+1}} \varphi(x) dx &= \int a_{i+1} \frac{d}{dx} \frac{d^i(\tilde{g}(x)\theta(x))}{dx^i} \varphi(x) dx = \\ &= \int a_{i+1} \frac{d}{dx} \left( \frac{d^i \tilde{g}(x)}{dx^i} \theta(x) \right) \varphi(x) dx = \int a_{i+1} \left( \frac{d^{i+1} \tilde{g}(x)}{dx^{i+1}} \theta(x) + \frac{d^i \tilde{g}(x)}{dx^i} \delta(x) \right) \varphi(x) dx = \\ &= \int a_{i+1} \frac{d^{i+1} \tilde{g}(x)}{dx^{i+1}} \theta(x) \varphi(x) dx + a_{i+1} \frac{d^i \tilde{g}(0)}{dx^i} \varphi(0) = \int a_{i+1} \frac{d^{i+1} \tilde{g}(x)}{dx^{i+1}} \theta(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  выполняется (1.2.19).

Отметим, при  $i = n$  в силу начального условия  $\frac{d^{n-1}\tilde{g}}{dx^{n-1}}(0) = \frac{1}{a_n}$  из соотношения

ношения

$$\int a_n \frac{d^n(\tilde{g}(x)\theta(x))}{dx^n} \varphi(x) dx = \int a_n \frac{d^n \tilde{g}(x)}{dx^n} \theta(x) \varphi(x) dx + a_n \frac{d^{n-1}\tilde{g}(0)}{dx^{n-1}} \varphi(0),$$

будем иметь

$$\int a_n \frac{d^n(\tilde{g}(x)\theta(x))}{dx^n} \varphi(x) dx = \int a_n \frac{d^n \tilde{g}(x)}{dx^n} \theta(x) \varphi(x) dx + \varphi(0). \quad (1.2.20)$$

Функция  $g(x)$ , определяемая соотношением (1.2.18) будет фундаментальным решением, если для любой основной функции  $\varphi \in K$  справедливо равенство

$$\int \left( a_n \frac{d^n g(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} g(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dg(x)}{dx} + a_0 g(x) \right) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (1.2.21)$$

В силу доказанных тождеств (1.2.19) и (1.2.20), учитывая, что  $\tilde{g}(x)$  решение однородного уравнения (1.2.16), подставив  $g(x) = \tilde{g}(x)\theta(x)$  в левую часть (1.2.21), получим

$$\int \left( a_n \frac{d^n \tilde{g}(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} \tilde{g}(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d\tilde{g}(x)}{dx} + a_0 \tilde{g}(x) \right) \theta(x) \varphi(x) dx + \varphi(0) = \varphi(0),$$

что совпадает с правой частью (1.2.21). *Теорема доказана.*

### 1.3 Вариационные принципы механики

Построение математических моделей механических систем базируется на дифференциальных и интегральных вариационных принципах механики.

К дифференциальным вариационным принципам относятся [58]:

- 1) Принцип возможных перемещений Лагранжа.
- 2) Принцип Даламбера-Лагранжа.
- 3) Принцип Журдена.
- 4) Принцип наименьшего принуждения Гаусса.

Основоположниками важнейших интегральных принципов являются Гамильтон, Остроградский, Мопертюи, Лагранж.

В этом параграфе рассматривается вариационный интегральный принцип Гамильтона-Остроградского, применение которого дает наибольший эффект при построении уравнений движения механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами под действием приложенных к ним сил. Этот принцип был сформулирован Гамильтоном в 1836 году для механических систем со стационарными связями на базе разработанной им оптико-механической аналогии. Гамильтон показал, что уравнения распространения света и движения механических систем одинаковы по своей форме. В 1848 году М.В. Остроградским для механических систем с нестационарными связями, независимо от Гамильтона, тот же принцип был сформулирован в более общем виде. Не смотря на то, что принцип Гамильтона-Остроградского был сформулирован позднее других, он не утратил своего значения до настоящего времени. Этот принцип с полным основанием можно считать теоретической основой современной механики и физики.

### **1.3.1 Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского для систем с сосредоточенными параметрами**

Гамильтон при формулировке вариационного интегрального принципа ввел в рассмотрение функцию Лагранжа, назвав ее в честь своего великого предшественника, основателя теории вариационного исчисления.

Функцией Лагранжа, или кинетическим потенциалом  $L$  называют разность кинетической и потенциальной энергии механической системы [28]:

$$L = T - U, \quad (1.3.1)$$

где кинетическая энергия  $T$  – это обобщенный показатель движения механической системы, так как этот вид энергии зависит от обобщенных скоростей и инерционных характеристик (массы, моментов инерции) всех объектов, входящих в состав механической системы; потенциальная энергия  $U$  – скалярная величина, равная работе консервативных сил при перемещении мате-

риальной точки из некоторого нулевого положения в заданное. Отметим, что кинетическая энергия является функцией обобщенных скоростей  $\dot{q}$ , а потенциальная энергия являются функциями обобщенных координат  $q$ . Учитывая все вышесказанное о кинетической и потенциальной энергии, можно утверждать, что кинетический потенциал  $L$  для консервативной системы является функцией обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Заметим, в случае нестационарных связей функция Лагранжа явно зависит также от времени  $t$ .

Рассмотрим криволинейный интеграл вида [2]

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dx, \quad (1.3.2)$$

называемый действием по Гамильтону. Подынтегральной функцией этого выражения является кинетический потенциал Лагранжа (1.3.1), имеющий размерность работы. Таким образом, действие по Гамильтону выражает работу сил при истинном движении системы.

Дадим необходимые пояснения. Движение механической системы со многими степенями свободы можно представить как перемещение некоторой точки  $M$  в пространстве конфигураций.

*Определение 1.3.1.* Пространством конфигураций называется  $n$ -мерное пространство, элементами которого является совокупность обобщенных координат  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ .

Дополнив пространство конфигураций временной осью, получим  $n+1$ -мерное пространство переменных  $q_1, q_2, \dots, q_n, t$ , которое называют расширенным пространством конфигураций.

*Определение 1.3.2.* Истинным движением системы называют геометрическое место действительных положений точки в расширенном пространстве конфигураций.

Отметим, истинное движение в каждый момент времени удовлетворяет уравнениям движения и уравнениям связей. Наряду с истинным движением

рассмотрим совокупность бесконечно близких движений, для которых удовлетворены уравнения связей, а уравнения движения не удовлетворяются. Разность значений  $\delta q_i(t)$  обобщенных координат в момент времени  $t$  некоторого бесконечно близкого движения  $\tilde{q}_i(t)$  и истинного движения  $q_i(t)$

$$\tilde{q}_i(t) - q_i(t) = \delta q_i(t)$$

называется вариацией обобщенных координат  $q_i$ . На концах временного отрезка  $[t_0, t_1]$  истинное движение не варьируется, то есть справедливо

$$\delta q_i(t_1) = 0, \quad \delta q_i(t_2) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.3.3)$$

Вариации обобщенных координат  $q_i$ , удовлетворяющие (1.3.3) назовем допустимыми.

*Первая формулировка принципа стационарного действия Гамильтона-Остроградского.* Действие по Гамильтону (1.3.2) – это функционал, который в интервале времени  $[t_1, t_2]$  на истинном движении системы имеет стационарное значение.

Таким образом, на истинном движении должно выполняться условие стационарности. Поэтому стационарное движение системы возможно только в том случае, если вариация функционала (1.3.2) на истинном движении равна нулю.

*Вторая формулировка принципа Гамильтона-Остроградского.* Вариация функционала действия по Гамильтону на истинном движении механической системы при любых допустимых вариациях обобщенных координат равна нулю.

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dx = 0. \quad (1.3.4)$$

Известно, что если первая вариация функционала обращается в нуль, то функционал в соответствующей точке функционального пространства может иметь экстремум, то есть это условие является необходимым условием экстремума функционала. Характер этого экстремума определяет вторая вариация

ция функционала. Французский ученый Серре в 1871 году исследовал функционал действия по Гамильтону и показал, что при истинном движении системы с учетом некоторых ограничений, наложенных на пределы интегрирования, вторая вариация функционала больше нуля:  $\delta^2 I > 0$ . Это значит, что истинное движение системы удовлетворяет достаточному условию минимума функционала. В соответствии с этим можем сформулировать.

*Третья формулировка принципа Гамильтона-Остроградского.* Действие по Гамильтону на прямом пути минимально.

Вследствие такого утверждения идею Гамильтона-Остроградского называют также принципом наименьшего действия.

В общем случае, при относительно общих предположениях о характере действующих сил и о характере связей вариационный принцип Гамильтона-Остроградского можно сформулировать следующим образом.

*Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского.* Истинное движение механической системы происходит так, что при любых допустимых вариациях обобщенных координат выполняется условие [24].

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \Sigma A) dt = 0, \quad (1.3.5)$$

где  $\delta T$  – вариация кинетической энергии системы, то есть приращение кинетической энергии при вариации истинного движения;  $\Sigma A$  – сумма всех внешних и внутренних обобщенных сил системы на допустимых вариациях обобщенных координат.

Отметим, виртуальная работа, входящая в (1.3.5) имеет вид

$$\Sigma A = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (1.3.6)$$

а обобщенная сила в потенциальном поле (консервативная сила) определяется следующим образом

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (1.3.7)$$



### 1.3.2 Уравнения Лагранжа второго рода

Проиллюстрируем вывод уравнений движения на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского на примере вывода уравнений Лагранжа второго рода.

Рассмотрим механическую систему, состояние которой в каждый момент времени  $t$  определяется совокупностью  $n$  обобщенных координат  $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ . Для вывода уравнений движения, согласно вариационному принципу Гамильтона-Остроградского, рассматривается вариационная задача исследования на экстремум функционала

$$J(q(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \rightarrow \text{extr}. \quad (1.3.8)$$

Из общего необходимого условия экстремума функционалов следует, что на истинном движении вариация функционала (1.3.8) обращается в нуль

$$\delta J(q(\cdot)) = 0. \quad (1.3.9)$$

По определению, вариация функционала является линейным относительно вариаций обобщенных координат функционалом, входящим в приращение функционала (1.3.8). Непосредственно из определения вариация функционала может быть найдена в виде

$$\delta J(q(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}, t) \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) \delta \dot{q}(t) \right) dt. \quad (1.3.10)$$

Из теории вариационного исчисления известно, что вариацию функционала  $\delta J(q(\cdot))$  можно найти, как производную от функции  $\varphi(\alpha) = J(q(\cdot) + \alpha \delta q(\cdot))$  по параметру  $\alpha$  при  $\alpha=0$  [71].

Действительно, найдя производную от функции

$$\varphi(\alpha) = J(q(\cdot) + \alpha \delta q(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \alpha \delta q, \dot{q} + \alpha \delta \dot{q}, t) dt$$

по параметру  $\alpha$  при  $\alpha=0$  можем прийти к выражению (1.3.10).

Преобразуем вариацию функционала (1.3.10). Интегрируя второе слагаемое по частям, получим

$$\begin{aligned} \delta J(q(\cdot)) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \delta q(t_1) - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(q(t_0), \dot{q}(t_0), t_0) \delta q(t_0) - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial y}(q, \dot{q}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(q, \dot{q}, t) \right) \delta q(t) dt. \end{aligned}$$

Учитывая, что для допустимой вариации обобщенных координат  $\delta q(\cdot)$  справедливо (1.3.3), получим выражение вариации функционала в следующем виде

$$\delta J(q(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(q, \dot{q}, t) - \frac{\partial L}{\partial y}(q, \dot{q}, t) \right) \delta q(t) dt.$$

Таким образом, если совокупность значений обобщенных координат  $q(t)$  в моменты времени  $t$  определяет истинное движение, то в силу (1.3.9) справедливо

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial y}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) \delta q(t) dt = 0. \quad (1.3.11)$$

Отметим, при выводе необходимых условий для различных постановок вариационных задач используется следующая лемма [71].

*Лемма. (Основная лемма вариационного исчисления).* Пусть  $\mu(t)$  непрерывная на отрезке  $T = [t_1, t_2]$  функция. Если для любой произвольной непрерывной на отрезке  $T = [t_1, t_2]$  функции  $\eta(t)$  выполняется  $\int_{t_0}^{t_1} \mu(t) \eta(t) dt = 0$ , то

$$\mu(t) = 0 \text{ при любом } t \in T.$$

Отметим, утверждения основной леммы вариационного исчисления остаются справедливыми и не изменятся, если на функцию  $\eta(t)$  наложить следующие ограничения:  $\eta(t)$  - имеет непрерывные производные до  $k$  порядка включительно, обращающиеся в нуль на концах отрезка.

В силу основной леммы можем заключить, что истинное движение системы  $q(t)$  удовлетворяет системе уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial y}(q(t), \dot{q}(t), t) = 0. \quad (1.3.12)$$

### 1.3.3 Принцип Гамильтона-Остроградского для систем с распределенными параметрами

Сформулированный принцип Гамильтона-Остроградского для систем с конечным числом степеней свободы может быть распространен на системы с распределенными параметрами. Введя интеграл действия

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (T - U - \Pi) dx, \quad (1.3.13)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы;  $U$  – потенциальная энергия упругой деформации системы;  $\Pi$  – потенциал внешних сил, запишем вариационный принцип Гамильтона-Остроградского

$$\delta I = 0. \quad (1.3.14)$$

Проиллюстрируем вывод уравнений движения на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского на примере вывода уравнений Бернулли, описывающих изгибные колебания стержня. Под стержнем понимается одномерное упругое тело, у которого два размера малы по сравнению с третьим. Пусть со стержнем связана декартова система координат  $Oxyz$ . Ось стержня направлена вдоль оси координат  $Ox$  и проходит через центр тяжести сечений, перпендикулярной к оси стержня, а оси  $Oy$  и  $Oz$  являются главными. По гипотезе плоских сечений любые точки, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси стержня (параллельной координатной плоскости  $Oyz$ ), имеют одинаковые перемещения в направлении осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно  $u_1 = u_2 = 0$ ,  $u_3 = u(x)$ . При этом предполагается, что поперечные сечения при деформировании остаются плоскими и перпендикулярными к деформированной оси стержня. Согласно технической теории стержней, потенциальная

энергия деформации и кинетическая энергия связаны с прогибом стержня следующим образом [28]

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u(x)}{\partial t} \right)^2 dx, \quad U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (1.3.15)$$

где  $\rho$  – плотность материала стержня,  $F$  – площадь поперечного сечения,  $E$  – модуль упругости стержня,  $I$  – момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний.

Для вывода уравнений движения воспользуемся принципом Гамильтона-Остроградского, который для консервативной системы имеет вид (вариация интеграла действия обращается в нуль)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0, \quad (1.3.16)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы,  $U$  – потенциальная энергия системы.

Учитывая соотношения для потенциальной и кинетической энергии (1.3.15) запишем интеграл действия

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right)^2 dx \right] dt.$$

Для нахождения вариации функционала  $\delta J$  составим функцию  $\varphi(\alpha)$

$$\varphi(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right)^2 dx \right] dt.$$

Найдем производную от функции  $\varphi(\alpha)$  по параметру  $\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right)^2 dx \right] dt = \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right) \frac{\partial \delta u(x, t)}{\partial t} dx - \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right) \frac{\partial^2 \delta u(x, t)}{\partial x^2} dx \right] dt. \end{aligned}$$

Вариация функционала действия определится соотношением

$$\delta J = \frac{\partial \varphi(0)}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^l \rho F \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta u(x,t)}{\partial t} dx - \int_0^l EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u(x,t)}{\partial x^2} dx \right] dt. \quad (1.3.17)$$

Интегралы, входящие в выражение (1.3.17) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx dt = \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt dx = \\ & = \int_0^l \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \delta u(x,t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \delta u(x,t) dt \right] dx = - \int_0^{t_1} \int_0^l \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \delta u(x,t) dt dx \\ 2) \quad & \int_0^l \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx = \\ & = - \int_0^l \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx = - \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \delta u(x,t) \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} \delta u(x,t) dx = \int_0^l \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} \delta u(x,t) dx. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что на концах отрезков интегрирования допустимые вариации  $\delta u$ ,  $\delta \frac{\partial u}{\partial x}$  обращаются в нуль.

Таким образом, вариация функционала действия (1.3.17) примет вид

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left( \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u dx dt. \quad (1.3.18)$$

Согласно принципу Гамильтона-Остроградского приравняем вариацию функционала (1.3.18) к нулю

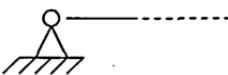
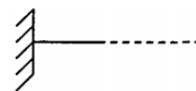


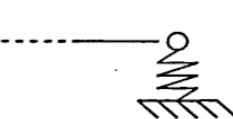


$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left( \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u dx dt = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности и независимости допустимой вариации  $\delta u(x,t)$ , согласно основной лемме вариационного исчисления получим уравнение, описывающее изгибные колебания призматического стержня (балки Эйлера-Бернулли):

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (1.3.19)$$

Граничные условия зависят от способов опирания или закрепления концов стержня. Обычно на каждом конце стержня имеется по два граничных условия, некоторые из которых приведены в таблице 1.3.1.

Таблица 1.3.1 – Граничные условия

| Способ закрепления стержня                  |   | Граничные условия   |
|---|---|---|
| Шарнирно-опертый                            | 1<br>    | $u = 0; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  |
| Закрепленный                                | 2<br>    | $x = 0; \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  |
| Свободный                                   | 3<br>    | $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$                |
| Упруго-опертый (жесткость опоры $c$ )       | 4а<br>  | $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = cu$            |
|   | 4б<br> | $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -cu$           |
| Свободный конец с присоединенной массой $M$ | 5а<br> | $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; M \omega^2 u = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  |
|   | 5б<br> | $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; M \omega^2 u = -EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ |

#### 1.4. Иллюстрация метода исследования на примере простейшей механической системы с сосредоточенными и распределенными параметрами

В данном параграфе рассматривается упругий стержень (балка Эйлера-Бернулли) с прикрепленным с помощью пружины твердым телом. Производится иллюстрация вывода уравнений движения системы и общего подхода к исследованию собственных колебаний, развиваемого в диссертационной работе.

### 1.4.1. Математическая модель

Рассмотрим механическую систему (рис. 1.1), состоящую из массы  $m$ , установленной с помощью пружины жесткости  $c$  на упругом стержне, концы которого жестко закреплены. Масса  $m$  может перемещаться только поступательно в направлении оси  $Oz$ . Колебания массы характеризуются функцией  $z(t)$ . Перемещение точек стержня описывается функцией  $u(x,t)$ , где  $u(x,t)$  удовлетворяет граничным условиям, накладываемым на правый и левый концы стержня. Так как концы стержня жестко закреплены, то граничные условия имеют вид:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \quad (1.4.1)$$

где  $l$  – длина стержня.

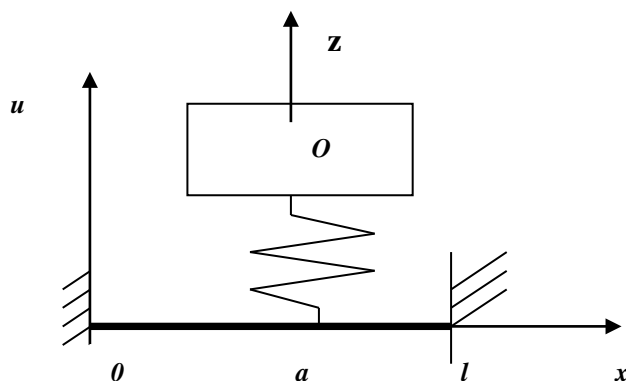


Рисунок 1.1 – Механическая система «упругий стержень с упруго-соединенной массой»

Для вывода уравнений движения данной механической системы воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского, который, как было сказано выше, справедлив, как для систем с сосредоточенными, так и для систем с распределенными параметрами. Принцип Гамильтона-Остроградского для консервативной системы принимает вид (вариация интеграла действия обращается в нуль)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0, \quad (1.4.2)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы,  $U$  – потенциальная энергия системы.

Потенциальная энергия системы складывается из суммы энергии пружины и стержня, а кинетическая энергия из суммы энергии массы и стержня

$$U = U_1 + U_2, \quad T = T_1 + T_2, \quad (1.4.3)$$

где  $U_1, T_1$  – соответственно потенциальная энергия пружины и кинетическая энергия массы;  $U_2, T_2$  – соответственно потенциальная и кинетическая энергии стержня.

Потенциальная энергия пружины пропорциональна квадрату ее линейной деформации

$$U_1 = \frac{c(z - u(a, t))^2}{2}, \quad (1.4.4)$$

а кинетическая энергия массы определяется соотношением

$$T_1 = \frac{m\dot{z}^2}{2}. \quad (1.4.5)$$

Выражения для кинетической и потенциальной энергии стержня, в соответствии с (1.3.15), имеют вид:

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx, \quad U_2 = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (1.4.6)$$

где  $\rho$  – плотность материала стержня,  $F$  – площадь поперечного сечения,  $E$  – модуль упругости стержня,  $I$  – момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний.

Учитывая соотношения для потенциальной и кинетической энергий (1.4.4)-(1.4.6) запишем интеграл действия

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{m\dot{z}^2}{2} - \frac{c(z - u(a, t))^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right)^2 dx \right] dt.$$

Для нахождения вариации функционала  $\delta J$  составим функцию  $\varphi(\alpha)$



$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) = & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m(\dot{z} + \alpha\delta\dot{z})^2}{2} - \frac{c(z + \alpha\delta z - u(a,t) - \alpha\delta u(a,t))^2}{2} \right] dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial}{\partial t} (u(x,t) + \alpha\delta u(x,t)) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x,t) + \alpha\delta u(x,t)) \right)^2 dx \right] dt. \end{aligned}$$

Найдем производную от функции  $\varphi(\alpha)$  по параметру  $\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial \alpha} = & \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m(\dot{z} + \alpha\delta\dot{z})^2}{2} - \frac{c(z + \alpha\delta z - u(a,t) - \alpha\delta u(a,t))^2}{2} \right] dt + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial}{\partial t} (u(x,t) + \alpha\delta u(x,t)) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x,t) + \alpha\delta u(x,t)) \right)^2 dx \right] dt = \\ = & \int_{t_1}^{t_2} [m(\dot{z} + \alpha\delta\dot{z})\delta\dot{z} - c(z + \alpha\delta z - u(a,t) - \alpha\delta u(a,t))\delta z + c(z + \alpha\delta z - u(a,t) - \alpha\delta u(a,t))\delta u(a,t)] dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial}{\partial t} (u(x,t) + \alpha\delta u(x,t)) \right) \frac{\partial \delta u(x,t)}{\partial t} dx - \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x,t) + \alpha\delta u(x,t)) \right) \frac{\partial^2 \delta u(x,t)}{\partial x^2} dx \right] dt. \end{aligned}$$

Вариация функционала действия определится соотношением

$$\begin{aligned} \delta J = \frac{\partial \varphi(0)}{\partial \alpha} = & \int_{t_1}^{t_2} [m\dot{z}\delta\dot{z} - c(z - u(a,t))\delta z + c(z - u(a,t))\delta u(a,t)] dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^l \rho F \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta u(x,t)}{\partial t} dx - \int_0^l EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u(x,t)}{\partial x^2} dx \right] dt. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Интегралы, входящие в выражение (1.4.7) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_{t_0}^{t_1} \dot{z}\delta\dot{z} dt = \dot{z}\delta z \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{z}\delta z dt = - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{z}\delta z dt; \\ 2) \quad & \int_{t_0}^{t_1} c(z - u(a,t))\delta u(a,t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l c(z - u(x,t))\delta u(x,t)\delta(x-a) dx dt; \\ 3) \quad & \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt dx = \\ = & \int_0^l \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \delta u(x,t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \delta u(x,t) dt \right] dx = - \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \delta u(x,t) dt dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad & \int_0^l \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx = \\
& = - \int_0^l \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx = - \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \delta u(x,t) \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} \delta u(x,t) dx = \int_0^l \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} \delta u(x,t) dx.
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что на концах отрезков интегрирования допустимые вариации  $\delta z$ ,  $\delta u$ ,  $\delta \frac{\partial u}{\partial x}$  обращаются в нуль.

Таким образом, вариация функционала действия (1.4.7) примет вид

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{t_0}^{t_1} \left( -m\ddot{z} - c(z - u(a,t)) \right) \delta z dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left( c(z - u(x,t)) \delta(x - a) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u dx dt.
\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

Согласно принципу Гамильтона-Остроградского приравняем вариацию функционала (1.4.8) к нулю

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{t_0}^{t_1} \left( -m\ddot{z} - c(z - u(a,t)) \right) \delta z dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left( c(z - u(x,t)) \delta(x - a) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u dx dt = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда, в силу произвольности и независимости допустимых вариаций в  $\delta z(t)$  и  $\delta u(x,t)$  подынтегральных выражениях, согласно основной лемме вариационного исчисления получим систему гибридных дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + c(z - u(a,t)) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c(z - u(x,t)) \delta(x - a). \end{cases} \tag{1.4.9}$$

*Замечание 1.3.1.* Для учета демпфирующих свойств пружины при нахождении уравнений движения можно воспользоваться вариационным принципом Гамильтона, который в данном случае может быть записан в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta(T - U) + \delta'W) dt = 0, \quad (1.4.10)$$

где  $\delta'W$  – виртуальная работа неконсервативных сил (сил трения).

Сила вязкого трения определяется по формуле

$$F = -b \left( \dot{z} - \frac{\partial u}{\partial t}(a, t) \right),$$

где  $b$  – коэффициент демпфирования пружины.

Следовательно, виртуальную работу сил трения можем записать в виде

$$\delta'W = -b \left( \dot{z} - \frac{\partial u}{\partial t}(a, t) \right) (\delta z - \delta u(a, t)).$$

Вариация функционала (1.4.8), учитывая (1.4.10), принимает вид

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_1} \left( -m\ddot{z} - c(z - u(a, t)) - b \left( \dot{z} - \frac{\partial u}{\partial t}(a, t) \right) \right) \delta z dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left( \left( c(z - u(x, t)) + b \left( \dot{z} - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right) \right) \delta(x - a) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u dx dt. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения движения системы, с учетом демпфирующих свойств, принимают вид

$$\begin{cases} m\ddot{z} + c(z - u(a, t)) + b \left( \dot{z} - \frac{\partial u}{\partial t}(a, t) \right) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \left( c(z - u(x, t)) + b \left( \dot{z} - b \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right) \right) \delta(x - a). \end{cases} \quad (1.4.11)$$

### 1.4.2. Исследование свободных колебаний

Движение системы описывается гибридной системой дифференциальных уравнений (1.4.10). Введя обозначения

$$p = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad b = \frac{EI}{\rho F}, \quad e = \frac{c}{\rho F},$$

перепишем систему (1.4.10) в виде

$$\begin{cases} \ddot{z} + p^2(z - u(a, t)) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = e(z - u(x, t))\delta(x - a). \end{cases} \quad (1.4.12)$$

На функцию  $u(x, t)$  наложены граничные условия, соответствующие жесткой заделке:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (1.4.13)$$

Решение системы (1.4.12) будем понимать в обобщенном смысле. Для этого введем класс основных функций. Рассмотрим 2-хмерное множество вектор-функций  $(\chi(t), \varphi(x, t))$ , первая компонента которой  $\chi(t)$  – функция одной переменной  $t$ , вторая  $\varphi(x, t)$  – функция двух переменных  $t$  и  $x$ .

Относительно функций  $\chi(t)$  и  $\varphi(x, t)$  считаем, что они имеют производные всех порядков по своим аргументам и обращаются в нуль соответственно вне некоторого интервала  $[0, T]$  и вне некоторого прямоугольника  $D = \{(x, t) \in R^2 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ .

Под обобщенным решением системы (1.4.12) будем понимать обобщенные функции  $z(t)$  и  $u(x, t)$ , удовлетворяющие краевым условиям (1.4.13) для которых при любой основной функции справедливо равенство

$$\int_0^T \left( -m\ddot{z}(t) - c(z(t) - u(a, t)) \right) \chi(t) dt + \int_0^T \int_0^l \left( c(z(t) - u(x, t))\delta(x - a) - \rho F \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \right) \varphi(x, t) dx dt = 0.$$

Выполнив замену в системе (1.4.12)

$$z(t) = A \sin \omega t, \quad u(x, t) = V(x) \sin \omega t,$$

получим алгебраическо-дифференциальную систему

$$\begin{cases} -\omega^2 A + p^2(A - V(a)) = 0, \\ -\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = e(A - V(x))\delta(x - a). \end{cases} \quad (1.4.14)$$

Здесь  $A$  и  $V(x)$ , соответственно, неизвестная величина и функция. От-

метим, что второе соотношение из (1.4.14) понимается в обобщенном смысле. Будем считать, что для любой функции  $\varphi(x, t)$  из класса основных функций при любом  $t \in [0, T]$  справедливо

$$\int_0^l \left( -\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} \right) \varphi(x, t) dx = e(A - V(a)) \varphi(a, t). \quad (1.4.15)$$

В силу граничных условий (1.4.13) получим условия, накладываемые на функцию  $V(x)$ :

$$V(0) = V(l) = 0, \quad \frac{dV}{dx}(0) = \frac{dV}{dx}(l) = 0. \quad (1.4.16)$$

*Теорема 1.4.1.* При любых значениях  $\omega$  и  $A$  для обобщенного решения  $V(x)$  дифференциального уравнения

$$-\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = e(A - V(x)) \delta(x - a), \quad (1.4.17)$$

удовлетворяющего граничным условиям (1.4.16) справедливо представление

$$V(x) = \frac{\bar{V}(x - a) A e}{1 + e \bar{V}(0)}, \quad (1.4.18)$$

где функция  $\bar{V}(x)$  является обобщенным решением уравнения

$$-\omega^2 \bar{V}(x) + b \frac{d^4 \bar{V}(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (1.4.19)$$

удовлетворяющим краевым условиям

$$\bar{V}(-a) = \bar{V}(l - a) = 0, \quad \frac{d\bar{V}}{dx}(-a) = \frac{d\bar{V}}{dx}(l - a) = 0. \quad (1.4.20)$$

*Доказательство.* Отметим, что из (1.4.18) следует

$$V(a) = \frac{\bar{V}(0) A e}{1 + e \bar{V}(0)}. \quad (1.4.21)$$

Поэтому (1.4.18) можем представить следующим образом

$$V(x) = \bar{V}(x - a) e(A - V(a)).$$

Последнее соотношение представим в виде:

$$V(x) = \int_0^{\ell} \bar{V}(x-\xi) e(A-V(\xi)) \delta(\xi-a) d\xi. \quad (1.4.22)$$

В этом случае, подставив (1.4.22) в левую часть уравнения (1.4.17), имеем

$$-\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \int_0^{\ell} \left( -\omega^2 \bar{V}(x-\xi) + b \frac{d^4 \bar{V}(x-\xi)}{dx^4} \right) e(A-V(\xi)) \delta(\xi-a) d\xi.$$

Следовательно, для любой основной функции  $\varphi(x,t)$  левая часть соотношения (1.4.15) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ell} \left( -\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} \right) \varphi(x,t) dx = \\ & = \int_0^{\ell} \varphi(x,t) \int_0^{\ell} \left( -\omega^2 \bar{V}(x-\xi) + b \frac{d^4 \bar{V}(x-\xi)}{dx^4} \right) e(A-V(\xi)) \delta(\xi-a) d\xi dx. \end{aligned}$$

Поменяв порядок интегрирования в последнем соотношении, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ell} \left( -\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} \right) \varphi(x,t) dx = \\ & = \int_0^{\ell} e(A-V(\xi)) \delta(\xi-a) \int_0^{\ell} \left( -\omega^2 \bar{V}(x-\xi) + b \frac{d^4 \bar{V}(x-\xi)}{dx^4} \right) \varphi(x,t) d\xi dx. \end{aligned}$$

Учитывая (1.4.19), получим:

$$\int_0^{\ell} \left( -\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} \right) \varphi(x,t) dx = \int_0^{\ell} e(A-V(\xi)) \delta(\xi-a) \int_0^{\ell} \varphi(x,t) \delta(x-\xi) dx d\xi.$$

Отсюда окончательно следует

$$\int_0^{\ell} \left( -\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} \right) \varphi(x,t) dx = e(A-V(a)) \varphi(a,t),$$

что совпадает с правой частью (1.4.15).

Учитывая соотношение (1.4.20), в справедливости того, что (1.4.18) удовлетворяет условиям (1.4.16), можно убедиться непосредственной проверкой. *Теорема доказана.*

Таким образом, задача свелась к нахождению решения уравнения (1.4.19) с краевыми условиями (1.4.20). Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\begin{cases} -\omega^2 \bar{V}(x) + b \frac{d^4 \bar{V}(x)}{dx^4} = \delta(x), \\ \bar{V}(-a) = \bar{V}(l-a) = 0, \quad \frac{d\bar{V}}{dx}(-a) = \frac{d\bar{V}}{dx}(l-a) = 0. \end{cases} \quad (1.4.23)$$

Общее обобщенное решение (1.4.19) может быть найдено как сумма общего решения однородного уравнения  $G_0(x)$

$$-\omega^2 G(x) + b \frac{d^4 G(x)}{dx^4} = 0 \quad (1.4.24)$$

и некоторого частного решения  $G(x)$  неоднородного уравнения (1.4.19)

$$\bar{V}(x) = G_0(x) + G(x).$$

Общее решение однородного уравнения  $G_0(x)$  запишем в виде

$$G_0(x) = c_1 S_1(\beta x) + c_2 S_2(\beta x) + c_3 S_3(\beta x) + c_4 S_4(\beta x).$$

где  $S_1(\beta x), S_2(\beta x), S_3(\beta x), S_4(\beta x)$  – функции Крылова,  $c_1, c_2, c_3, c_4$  – постоянные интегрирования,  $\beta = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt[4]{b}}$ . Функции Крылова определяются следующим

образом

$$\begin{aligned} S_1(\beta x) &= \frac{ch(\beta x) + \cos(\beta x)}{2}, & S_2(\beta x) &= \frac{sh(\beta x) + \sin(\beta x)}{2}, \\ S_3(\beta x) &= \frac{ch(\beta x) - \cos(\beta x)}{2}, & S_4(\beta x) &= \frac{sh(\beta x) - \sin(\beta x)}{2}. \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

Отметим, что выражение для обобщенного решения  $G_0(x)$  однородного уравнения совпадает с классическим решением.

В качестве частного решения  $G(x)$  неоднородного уравнения (1.4.19) выберем его фундаментальное решение. Фундаментальное решение найдем в соответствии со следующим утверждением, которое является следствием теоремы 1.2.1.

*Утверждение 1.4.1.* Если  $\tilde{g}(x)$  частное решение однородного дифференциального уравнения

$$-\omega^2 g(x) + b \frac{d^4 g(x)}{dx^4} = 0, \quad (1.4.26)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$g(0) = 0, \quad \frac{dg}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d^2g}{dx^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3g}{dx^3}(0) = \frac{1}{b}, \quad (1.4.27)$$

то фундаментальное решение уравнения

$$-\omega^2 g(x) + b \frac{d^4 g(x)}{dx^4} = \delta(x)$$

запишется в виде

$$g(x) = \tilde{g}(x)\theta(x), \quad (1.4.28)$$

где  $\theta(x)$  – классическая функция Хэвисайда.

Отметим, если выберем функцию  $\tilde{g}(x) = \frac{S_4(\beta x)}{b\beta^3}$ , где  $\beta = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt[4]{b}}$ , то в силу

свойств функций Крылова, она удовлетворяет всем условиям данного утверждения: является решением однородного уравнения (1.4.26), удовлетворяющим начальным условиям (1.4.27).

Таким образом, фундаментальное решение может быть представлено следующим образом

$$g(x) = \theta(x) \frac{S_4(\beta x)}{b\beta^3}.$$

В соответствии со сказанным выше выберем частное решение  $G(x)$  неоднородного уравнения (1.4.19) в виде

$$G(x) = g(x) = \theta(x) \frac{S_4(\beta x)}{b\beta^3}. \quad (1.4.29)$$

Таким образом, общее решение уравнения

$$-\omega^2 \bar{V}(x) + b \frac{d^4 \bar{V}(x)}{dx^4} = \delta(x)$$

определится в виде

$$\bar{V}(x) = G_0(x) = c_1 S_1(\beta x) + c_2 S_2(\beta x) + c_3 S_3(\beta x) + c_4 S_4(\beta x) + \theta(x) \frac{S_4(\beta x)}{b\beta^3}.$$

Для нахождения постоянных интегрирования  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , воспользуемся граничными условиями (1.4.20).



Найдем уравнение для собственных частот системы. Из первого уравнения системы (1.4.14) выразим

$$V(a) = \frac{p^2 - \omega^2}{p^2} A.$$

Приравнивая правые части полученного выражения и (1.4.21), сокращая на  $A$ , получим уравнение для собственных частот системы:

$$-\omega^2 + \frac{p^2}{1 + e\bar{V}(0)} = 0, \quad (1.4.30)$$

где  $\bar{V}(0) = c_1$ . Постоянную интегрирования  $c_1$  можно найти из граничных условий (1.4.20), решив систему линейных алгебраических уравнений относительно  $c_1, c_2, c_3, c_4$ .

### 1.4.3. Применение метода расчета собственных колебаний

Рассмотрим применение метода расчета собственных колебаний простейшей механической системы на упругом основании – точечное тело, присоединенное к упругому стержню с помощью пружины. Концы стержня закреплены жестко (см. рис.1.1) [18].

Движение указанной системы описывается гибридной системой дифференциальных уравнений (1.4.9) с граничными условиями (1.4.13).

Согласно пункту 1.4.2 уравнение для собственных частот системы (1.4.9) имеет вид (1.4.30):

$$-\omega^2 + \frac{p^2}{1 + e\bar{V}(0)} = 0,$$

где  $\bar{V}(0) = c_1$ . Постоянную интегрирования  $c_1$  можно найти из граничных условий (1.4.20), решив систему линейных алгебраических уравнений относительно  $c_1, c_2, c_3, c_4$  вида

$$\begin{cases} c_1 S_1 - c_2 S_2 + c_3 S_3 - c_4 S_4 = 0, \\ c_1 S_1 + c_2 S_2 + c_3 S_3 + c_4 S_4 = -a_0 S_4, \\ -c_1 S_4 + c_2 S_1 - c_3 S_2 + c_4 S_3 = 0, \\ c_1 S_4 + c_2 S_1 + c_3 S_2 + c_4 S_3 = -a_0 S_3. \end{cases} \quad (1.4.31)$$

Напомним, что  $S_1, S_2, S_3, S_4$  – функции Крылова имеющие вид (1.4.25) и зависят от частоты  $\omega$ ;  $a_0 = \frac{1}{b\beta^3}$ ;  $\beta = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt[4]{b}}$ .

Далее по методу Крамера составим определитель матрицы коэффициентов системы (1.4.31), получим определитель четвертого порядка (вычисления и преобразования проводим в MathCAD)

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_1 & -S_2 & S_3 & -S_4 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ -S_4 & S_1 & -S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = -4 \cdot S_1 \cdot S_2^2 \cdot S_3 + 4 \cdot S_1^2 \cdot S_4 \cdot S_2 + 4 \cdot S_4 \cdot S_2 \cdot S_3^2 - 4 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_4^2.$$

В определителе  $\Delta_1$  столбец коэффициентов при соответствующей неизвестной заменяем столбцом свободных членов системы (1.4.31):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -S_2 & S_3 & -S_4 \\ -a_0 S_4 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & S_1 & -S_2 & S_3 \\ -a_0 S_3 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = 2 \cdot a_0 \cdot S_4 \cdot S_2^2 \cdot S_3 - 2 \cdot a_0 \cdot S_4^2 \cdot S_1 \cdot S_2 - 2 \cdot a_0 \cdot S_3^3 \cdot S_2 + 2 \cdot a_0 \cdot S_1 \cdot S_4 \cdot S_3^2.$$

Таким образом, имеем:

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2 \cdot a_0 \cdot S_4 \cdot S_2^2 \cdot S_3 - 2 \cdot a_0 \cdot S_4^2 \cdot S_1 \cdot S_2 - 2 \cdot a_0 \cdot S_3^3 \cdot S_2 + 2 \cdot a_0 \cdot S_1 \cdot S_4 \cdot S_3^2}{-4 \cdot S_1 \cdot S_2^2 \cdot S_3 + 4 \cdot S_1^2 \cdot S_4 \cdot S_2 + 4 \cdot S_4 \cdot S_2 \cdot S_3^2 - 4 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_4^2},$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \cdot (S_4 \cdot S_2 - S_3^2) \cdot \frac{a_0}{S_3 \cdot S_4 - S_1 \cdot S_2}.$$

Данное выражение для  $c_1$  подставляем в (1.4.30), после преобразований получаем

$$16\lambda^3 (S_3 S_4 - S_1 S_2) = \eta (S_4 S_2 - S_3^2). \quad (1.4.32)$$

Учитывая, что

$$S_1 = \frac{ch\lambda + \cos \lambda}{2}, S_2 = \frac{sh\lambda + \sin \lambda}{2}, S_3 = \frac{ch\lambda - \cos \lambda}{2}, S_4 = \frac{sh\lambda - \sin \lambda}{2},$$

где  $\lambda = \beta \cdot a$ ,  $a = \frac{l}{2}$ , обозначая  $T = S_3 \cdot S_4 - S_1 \cdot S_2$  и  $T_1 = S_4 \cdot S_2 - S_3^2$  имеем

$$T = \left( \frac{ch\lambda - \cos \lambda}{2} \right) \cdot \left( \frac{sh\lambda - \sin \lambda}{2} \right) - \left( \frac{ch\lambda + \cos \lambda}{2} \right) \cdot \left( \frac{sh\lambda + \sin \lambda}{2} \right),$$

$$T = \frac{-1}{2} sh\lambda \cos \lambda - \frac{1}{2} \sin \lambda ch\lambda, \quad (1.4.33)$$

$$T_1 = \left( \frac{sh\lambda - \sin \lambda}{2} \right) \cdot \left( \frac{sh\lambda + \sin \lambda}{2} \right) - \left( \frac{ch\lambda - \cos \lambda}{2} \right)^2,$$

$$T_1 = \frac{1}{4} sh^2 \lambda - \frac{1}{4} \sin^2 \lambda - \frac{1}{4} ch^2 \lambda + \frac{1}{2} ch\lambda \cdot \cos \lambda - \frac{1}{4} \cos^2 \lambda. \quad (1.4.34)$$

Подставляя (1.4.33)-(1.4.34) в (1.4.32) получим частотное уравнение

$$16\lambda^3 (sh\lambda \cos \lambda + \sin \lambda ch\lambda) = \eta (1 - ch\lambda \cdot \cos \lambda). \quad (1.4.35)$$

Разделив обе части на  $sh\lambda \cos \lambda + \sin \lambda ch\lambda$  получим

$$16\lambda^3 = \frac{\eta (1 - ch\lambda \cdot \cos \lambda)}{sh\lambda \cos \lambda + \sin \lambda ch\lambda}, \quad (1.4.36)$$

$$\lambda = \frac{l\sqrt{\omega}}{2\sqrt[4]{b}}, \quad (1.4.37)$$

$$\eta = \frac{cl^3 \omega^2}{EI(p^2 - \omega^2)}, \quad p^2 = \frac{c}{m}. \quad (1.4.38)$$

Из (1.4.37) имеем  $\sqrt{\omega} = \frac{2 \cdot \lambda \cdot b^{\frac{1}{4}}}{l}$ ,  $\omega = \frac{4 \cdot \lambda^2 \cdot \sqrt{b}}{l^2}$ ,  $\omega^2 = \frac{16 \cdot \lambda^4 \cdot b}{l^4}$ .

Подставляя все в (1.4.38), получим:

$$\eta = \frac{c \cdot l^3 \cdot 16 \cdot \lambda^4 \cdot b}{l^4 EI \left( p^2 - \frac{16 \cdot \lambda^4 \cdot b}{l^4} \right)}, \quad \eta = \frac{c \cdot l^3 \cdot \lambda^4}{EI \left( \left( \frac{l}{2} \sqrt{\frac{p}{\sqrt{b}}} \right)^4 - \lambda^4 \right)}. \quad (1.4.39)$$

Обозначим  $\lambda_0 = \sqrt{\frac{pl^2}{4\sqrt{b}}}$ ,  $b_0 = \frac{cl^3}{EI}$ . Тогда,  $\eta = \frac{b_0\lambda^4}{(\lambda_0)^4 - \lambda^4}$  и уравнение (1.4.36)

запишем в виде:

$$16 \cdot \lambda^3 = \frac{b_0\lambda^4}{(\lambda_0)^4 - \lambda^4} \cdot \frac{1 - ch\lambda \cos \lambda}{sh\lambda \cos \lambda + \sin \lambda ch\lambda}. \quad (1.4.40)$$

Преобразовав частотное уравнение (1.4.40) придем к более удобному выражению для анализа и нахождения решения частотное уравнение:

$$\frac{16[(\lambda_0)^4 - \lambda^4]}{b_0\lambda} = \frac{1 - ch\lambda \cos \lambda}{sh\lambda \cos \lambda + \sin \lambda ch\lambda}. \quad (1.4.41)$$

Определим собственные частоты, решая уравнение (1.4.41) в среде MathCAD.

Параметры системы:

$$l=1, \quad m=10, \quad c=10^4, \quad F=25 \cdot 10^{-4}, \quad I=1, \quad \rho=8 \cdot 10^3, \quad E=1, \quad p=\sqrt{\frac{c}{m}},$$

$$p = \frac{E \cdot I}{\rho \cdot F}, \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{p \cdot l^2}{4\sqrt{b}}}, \quad b_0 = \frac{c \cdot l^3}{E \cdot I}, \quad \lambda_0 = 5.946, \quad p = 31.623, \quad b = 0.05, \quad b = 1 \cdot 10^4$$

$$f(\lambda) = \frac{16[(\lambda_0)^4 - \lambda^4]}{b_0\lambda}, \quad g(\lambda) = \frac{1 - ch\lambda \cos \lambda}{sh\lambda \cos \lambda + \sin \lambda ch\lambda}.$$

Далее строим графики функций  $f(\lambda)$ ,  $g(\lambda)$  и находим точки пересечения, т.е.  $\lambda$  (рис. 1.2)

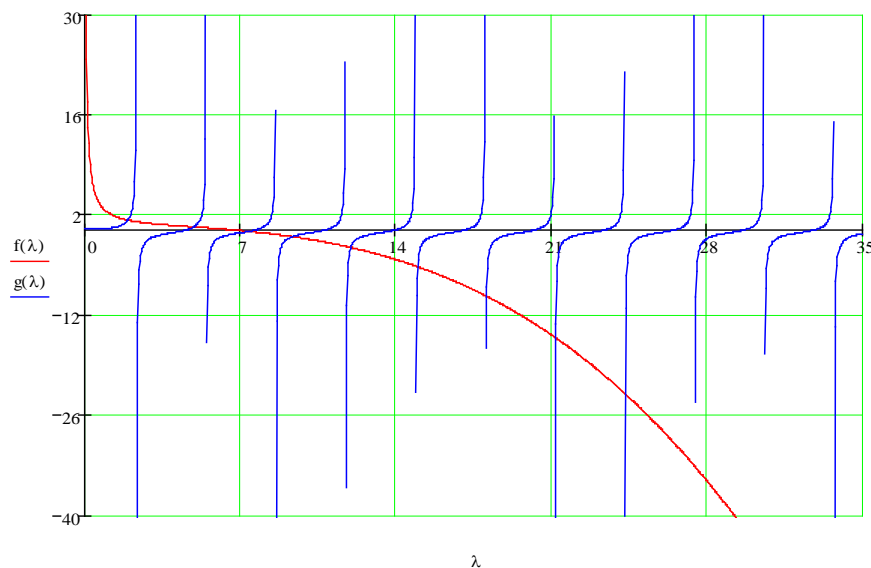


Рисунок 1.2 – График пересечения функций  $f(\lambda)$ ,  $g(\lambda)$

Значения  $\lambda$  задаем из расчета получения точки пересечения графиков в окрестности этой точки и уточняем с помощью встроенной в математическом пакете *MathCad* функции «Find( $\lambda$ )». Например, при задании окрестности 6, получаем результаты:

$$\lambda = 6$$

Given

$$f(\lambda) = g(\lambda)$$

$$\text{Find}(\lambda) = 7.34.$$

Определив  $\lambda$ , переходим к нахождению собственных частот по формуле  $\omega = \frac{4\lambda^2\sqrt{b}}{l^2}$ .

Например, при  $\lambda = 7,34$  собственная частота равняется:  $\omega = 48,188$ .

Таким образом, получаем дискретный набор из первых двенадцати собственных частот нашей механической системы, которые представлены в таблице 1.4.1

Таблица 1.4.1 – Собственные частоты

| № п\п | Параметр $\lambda$<br>(безразмерный) | Частота $\omega$<br>(1/сек.) |
|-------|--------------------------------------|------------------------------|
| 1     | 1,921                                | 3,301                        |
| 2     | 4,902                                | 21,493                       |
| 3     | 7,34                                 | 48,188                       |
| 4     | 9,342                                | 78,059                       |
| 5     | 12,014                               | 129,098                      |
| 6     | 15,026                               | 201,944                      |
| 7     | 18,12                                | 293,671                      |
| 8     | 21,24                                | 403,51                       |
| 9     | 24,369                               | 531,154                      |
| 10    | 27,489                               | 657,87                       |
| 11    | 30,609                               | 837,949                      |
| 12    | 33,729                               | 1018                         |

Вычислив собственные частоты простейшей механической системы на упругом основании, концы которого закреплены жестко (см. рис. 1.1), построим спектр частот и собственные формы.

Чтобы построить спектр собственных частот необходимо рассчитать амплитудные функции середины упругого стержня и построить графики зависимости квадрата амплитудных функций от собственных частот. В таблице 1.4.2 представлены конкретные значения квадрата амплитудных функций  $V^2(a)$  при разных собственных частотах  $\omega$ .

Таблица 1.4.2 – значения квадрата амплитудных функций  $V^2(a)$  при разных  $\omega$

| № п\п | Параметр $\omega$ (1/сек) | $V^2(a)$ |
|-------|---------------------------|----------|
| 1     | 3,301                     | 0,978    |
| 2     | 21,493                    | 0,289    |
| 3     | 48,188                    | 1,74     |
| 4     | 78,059                    | 26,027   |
| 5     | 129,098                   | 241,232  |
| 6     | 201,944                   | 2305     |
| 7     | 293,671                   | 16510    |
| 8     | 403,51                    | 3097     |
| 9     | 531,154                   | 3050     |
| 10    | 675,87                    | 1,012    |
| 11    | 837,999                   | 0,106    |
| 12    | 1018                      | 0,176    |

Получаем график спектра частот (рис. 1.3).

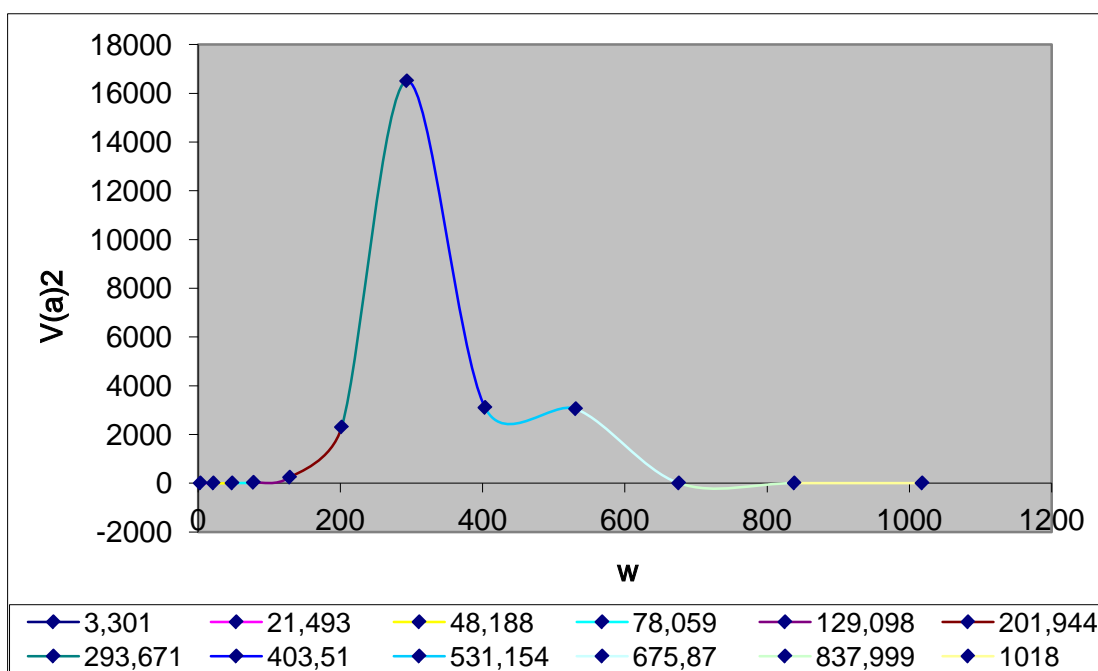
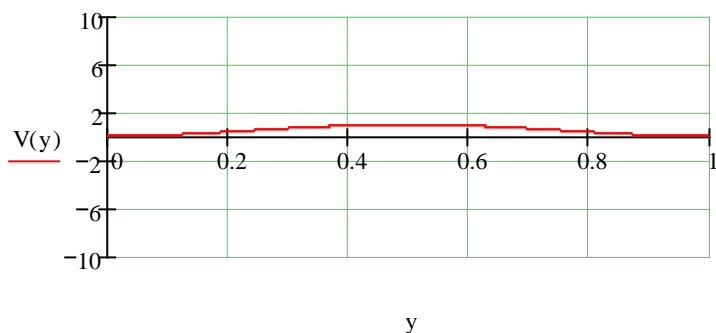


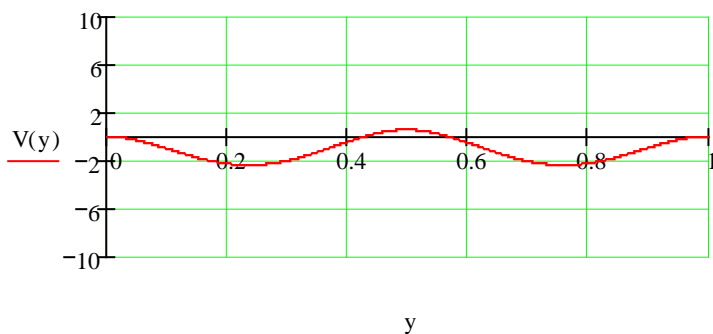
Рисунок 1.3 – Спектр частот

Графики для форм собственных колебаний упругого стержня в механической системе «твердое тело, установленное на пружине в середине упругого стержня с закрепленными краями». Жестко закрепленные края неподвижны (амплитудная функция равна нулю) и тангенс угла наклона на краях равен нулю (первая производная от амплитудной функции равна нулю).

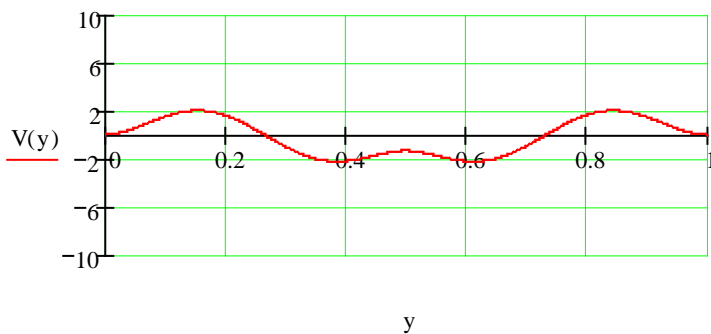
$$\omega_1 = 3,301$$



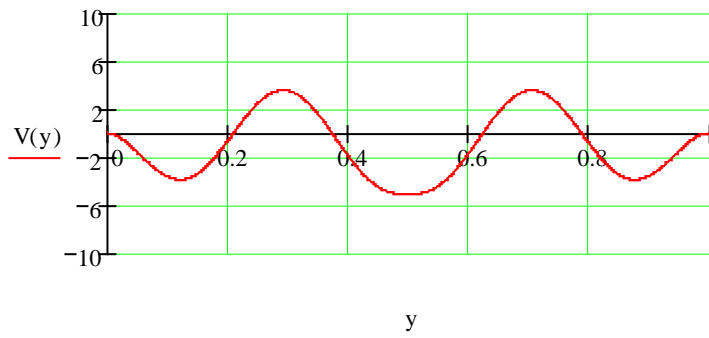
$$\omega_2 = 21,493$$



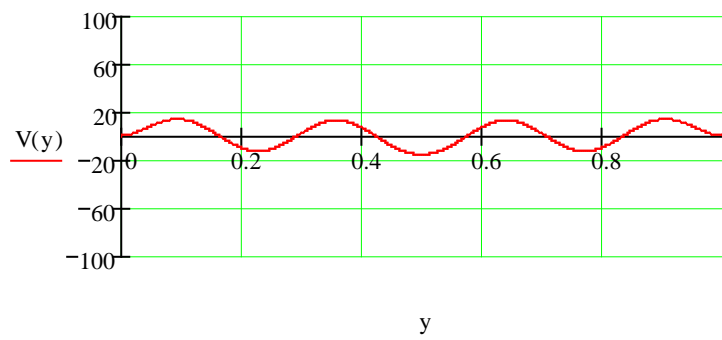
$$\omega_3 = 48,188$$



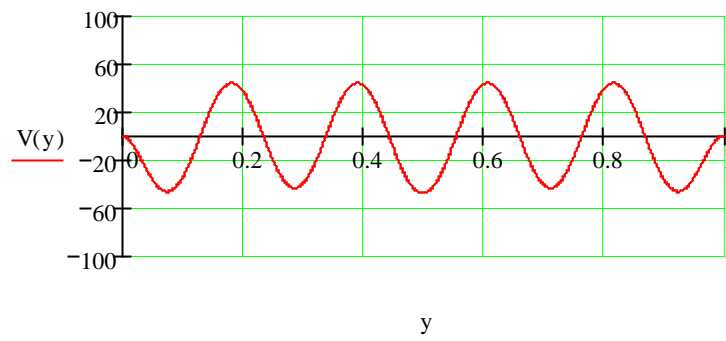
$$\omega_4 = 78,059$$



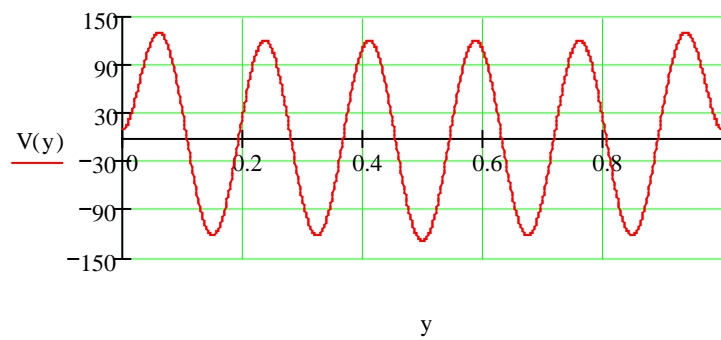
$$\omega_5 = 129,098$$



$$\omega_6 = 201,944$$



$$\omega_7 = 293,671$$





## **Выводы по главе**

Проведенный обзор современного состояния исследуемой проблемы показал, что в российских изданиях практически нет публикаций об исследованиях систем упруго взаимосвязанных твердых тел и стержней. При этом имеются близкие по тематике диссертации исследования, проводимые зарубежными учеными для конкретных типовых схем, использующие в основном метод конечных элементов или привлекающие для исследования, специально разработанные для конкретного случая методы. В связи с этим была поставлена цель: построение обобщенной математической модели системы взаимосвязанных твердых тел, установленных на упругом стержне и разработка на ее основе единого аналитико-численного метода исследования собственных колебаний, исследуемых систем.

Приведены математические основы моделирования механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, положенные в методическую основу проведенных исследований.

В заключительном параграфе иллюстрируются развиваемые в диссертационной работе подход и метод исследования свободных колебаний упруго взаимосвязанных твердых тел, установленных на упругом стержне, на примере простейшей механической системы с сосредоточенными и распределенными параметрами, входящей в класс механических систем описываемых обобщенной математической моделью, предложенной и исследуемой во второй главе диссертации.

**ГЛАВА 2. Системы твердых тел, установленных  
на балке Эйлера-Бернулли. Обобщенная математическая модель.  
Метод исследования свободных колебаний**

**2.1 Математические модели типовых систем**

Рассмотрим построение системы гибридных дифференциальных уравнений, описывающих динамику типовых механических систем: твердое тело с двумя степенями свободы на балке Эйлера-Бернулли; балка Эйлера-Бернулли с горизонтально расположенными твердыми телами; балка Эйлера-Бернулли с вертикально расположенными твердыми телами. Для вывода уравнений используется принцип Гамильтона-Остроградского для консервативной системы (1.4.2), в которой вариация интеграла действия обращается в нуль

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0, \quad (2.1.1)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы,  $U$  – потенциальная энергия системы.

**2.1.1 Твердое тело с двумя степенями свободы на балке Эйлера-Бернулли**

Рассмотрим консервативную механическую систему (рис. 2.1), состоящую из твердого тела массы  $m$ , совершающего плоское движение. Твердое тело прикреплено с помощью двух пружин жесткости  $c_1$  и  $c_2$  к упругому стержню, концы которого жестко закреплены. Введем две системы координат: неподвижную систему координат  $Oxz$ , центр которой совпадает с левым концом стержня, а ось  $Ox$  направлена вдоль оси стержня; подвижную систему координат  $O'x'z'$ , связанную с твердым телом. В состоянии равновесия соответствующие оси координат  $Oxz$  и  $O'x'z'$  параллельны. Масса  $m$  может перемещаться поступательно в направлении оси  $Oz$  и совершать угловые отклонения  $\varphi$ . Перемещение точек стержня в направлении оси  $Oz$  описывается функцией  $u(x, t)$ .

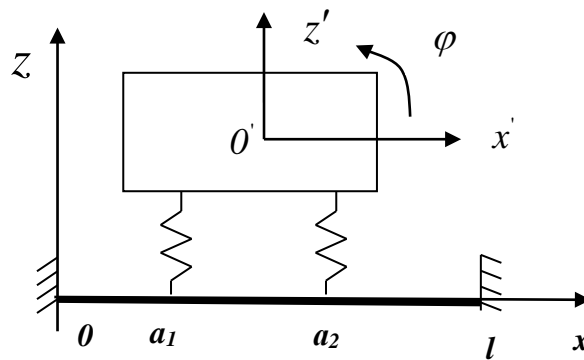


Рисунок 2.1 – Механическая система «упругий стержень с массой, установленной с помощью двух пружин»

Заметим, согласно теории плоского движения твердого тела [58], движение любой точки тела с координатами  $x', z'$  в системе координат  $O'x'z'$  в общем случае удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x' \cos \varphi - z' \sin \varphi, \\ z &= z_0 + x' \sin \varphi + z' \cos \varphi, \end{aligned}$$

где  $x, z$  – перемещение в неподвижной системе координат начала координат системы  $O'x'z'$ .

Принимая во внимание, что перемещение тела в направлении оси  $Ox$  отсутствует, а также предполагая малым углом поворота (заменяя синус его аргументом), можем перемещение в направлении оси  $Oz$  любой точки тела с координатами  $x', z'$  записать в виде

$$z = z_0 + z' + x' \varphi. \quad (2.1.2)$$

Таким образом, в соответствии с (2.1.2) перемещения в направлении оси  $Oz$  точек крепления упругих элементов к телу  $z_1, z_2$  запишутся в виде

$$z_1 = z_0 + z'_1 - d_1 \varphi, \quad z_2 = z_0 + z'_2 + d_2 \varphi, \quad (2.1.3)$$

где  $z'_1, z'_2$  – компоненты координат точек крепления упругих элементов к телу;  $d_1, d_2$  – соответственно расстояния от оси  $O'z'$  до осей пружин прикрепленных к стержню в точке  $a_1$  и точке  $a_2$ .

Учитывая, что потенциальная энергия пружины пропорциональна квадрату ее линейной деформации, а также соотношения (2.1.3), определяющие перемещения точек крепления упругих элементов, запишем потенциальную энергию пружин следующим образом

$$U_1 = \frac{c_1(z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(a_1, t))^2}{2} + \frac{c_2(z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(a_2, t))^2}{2}, \quad (2.1.4)$$

где  $c_1, c_2$  – жесткость упругих элементов.

Кинетическую энергию твердого тела можно записать в виде суммы кинетической энергии поступательного и вращательного движений:

$$T_1 = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{I_\varphi\dot{\varphi}^2}{2}, \quad (2.1.5)$$

где  $I_\varphi$  – момент инерции твердого тела относительно центра масс при повороте на угол  $\varphi$ .

Выражения для кинетической и потенциальной энергии стержня, в соответствии с (1.3.15), имеют вид:

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx, \quad U_2 = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (2.1.6)$$

Потенциальная энергия системы в целом складывается из суммы энергий пружин и стержня, а кинетическая энергия из суммы энергий массы и стержня

$$U = U_1 + U_2, \quad T = T_1 + T_2, \quad (2.1.7)$$

где  $U_1, T_1$  – соответственно потенциальная энергия пружины и кинетическая энергия твердого тела;  $U_2, T_2$  – соответственно потенциальная и кинетическая энергии стержня.

Учитывая соотношения для потенциальной и кинетической энергии (2.1.4)-(2.1.7) для нахождения вариации функционала  $\delta J$  составим функцию  $\varphi(\alpha)$ .

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) = & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m(\dot{z}_0 + \alpha \delta \dot{z}_0)^2}{2} + \frac{I_\varphi(\dot{\varphi} + \alpha \delta \dot{\varphi})^2}{2} \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{c_1(z_0 + \alpha \delta z_0 + z'_1 - d_1(\varphi + \alpha \delta \varphi) - u(a_1, t) - \alpha \delta u(a_1, t))^2}{2} \right] dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{c_2(z_0 + \alpha \delta z_0 + z'_2 + d_2(\varphi + \alpha \delta \varphi) - u(a_2, t) - \alpha \delta u(a_2, t))^2}{2} \right] dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right)^2 dx \right] dt. \end{aligned}$$

Вычислив производную от функции  $\varphi(\alpha)$  по параметру  $\alpha$  при  $\alpha=0$ , найдем вариацию функционала

$$\begin{aligned} \delta J = \frac{\partial \varphi(0)}{\partial \alpha} = & \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \dot{z}_0 \delta \dot{z}_0 + I_\varphi \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[ c_1(z_0 + z'_1 - d_1 \varphi - u(a_1, t)) (\delta z_0 - d_1 \delta \varphi - \delta u(a_1, t)) \right] dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left[ c_2(z_0 + z'_2 + d_2 \varphi - u(a_2, t)) (\delta z_0 + d_2 \delta \varphi - \delta u(a_2, t)) \right] dt + \quad (2.1.8) \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^l \rho F \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \delta u(x, t)}{\partial t} dx - \int_0^l EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u(x, t)}{\partial x^2} dx \right] dt. \end{aligned}$$

Интегралы, входящие в выражение (2.1.8) преобразуем методом интегрирования по частям и, учитывая, что на концах отрезков интегрирования допустимые вариации  $\delta z_0$ ,  $\delta u$ ,  $\delta \varphi$ ,  $\delta \frac{\partial u}{\partial x}$  обращаются в нуль, имеем:

- 1)  $\int_{t_0}^{t_1} \dot{z}_0 \delta \dot{z}_0 dt = \dot{z}_0 \delta z_0 \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{z}_0 \delta z_0 dt = - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{z}_0 \delta z_0 dt;$
- 2)  $\int_{t_0}^{t_1} I_\varphi \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} dt = I_\varphi \dot{\varphi} \delta \varphi \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} I_\varphi \ddot{\varphi} \delta \varphi dt = - \int_{t_0}^{t_1} I_\varphi \ddot{\varphi} \delta \varphi dt;$
- 3)  $\int_{t_0}^{t_1} c_1 [z_0 + z'_1 - d_1 \varphi - u(a_1, t)] \delta u(a_1, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l c_1 [z_0 + z'_1 - d_1 \varphi - u(x, t)] \delta u(x, t) \delta(x - a_1) dx dt;$
- 4)  $\int_{t_0}^{t_1} c_2 [z_0 + z'_2 + d_2 \varphi - u(a_2, t)] \delta u(a_2, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l c_2 [z_0 + z'_2 + d_2 \varphi - u(x, t)] \delta u(x, t) \delta(x - a_2) dx dt;$
- 5)  $\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} dt dx = - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dt dx;$

$$б) \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \int_0^l \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \delta u dx.$$

В последних двух выражениях (5 и 6) метод интегрирования по частям применяем дважды.

Таким образом, вариация функционала действия (1.4.7) примет вид

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_1} \left( -m\ddot{z} - c_1 [z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(a_1, t)] - c_2 [z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(a_2, t)] \right) \delta z_0 dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left( -I_\varphi \ddot{\varphi} + c_1 d_1 [z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(a_1, t)] + c_2 d_2 [z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(a_2, t)] \right) \delta \varphi dt + \\ & + \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \left( c_1 [z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(x, t)] + c_2 [z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(x, t)] - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u dx dt. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Согласно принципу Гамильтона-Остроградского приравняем вариацию функционала (2.1.9) к нулю

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_1} \left( -m\ddot{z} - c_1 [z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(a_1, t)] - c_2 [z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(a_2, t)] \right) \delta z_0 dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left( -I_\varphi \ddot{\varphi} + c_1 d_1 [z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(a_1, t)] + c_2 d_2 [z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(a_2, t)] \right) \delta \varphi dt + \\ & + \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \left( c_1 [z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(x, t)] + c_2 [z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(x, t)] - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u dx dt = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу произвольности и независимости допустимых вариаций  $\delta z_0(t)$  и  $\delta u(x, t)$  в подынтегральных выражениях, согласно основной лемме вариационного исчисления получим систему гибридных дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы:

$$\begin{cases} m\ddot{z}_0 + c_1 [z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(a_1, t)] + c_2 [z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(a_2, t)] = 0, \\ I_\varphi \ddot{\varphi} - c_1 d_1 [z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(a_1, t)] + c_2 d_2 [z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(a_2, t)] = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1 [z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(x, t)] \delta(x - a_1) + \\ \quad + c_2 [z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(x, t)] \delta(x - a_2). \end{cases} \quad (2.1.10)$$

### 2.1.2 Математическая модель механической системы «балка Эйлера-Бернулли с горизонтально расположенными твёрдыми телами»

Рассмотрим построение системы гибридных дифференциальных уравнений, описывающих динамику механических систем «балка Эйлера-Бернулли с горизонтально расположенными твёрдыми телами».

1. *Балка Эйлера-Бернулли с двумя горизонтально расположенными твёрдыми телами.* Рассмотрим механическую систему (рис. 2.2), состоящую из двух масс  $m_1, m_2$ , присоединённых горизонтально к упругому стержню с помощью пружин жёсткостей  $c_1, c_2$  соответственно. Массы  $m_1, m_2$  могут перемещаться только поступательно в направлении осей  $O_1z_1$  и  $O_2z_2$ . Здесь точки  $O_1$  и  $O_2$  совпадают с положениями равновесия масс. Колебания масс характеризуются функциями  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$ . Пружины присоединены к стержню на расстояниях  $a_1$  и  $a_2$  от левого конца стержня соответственно.

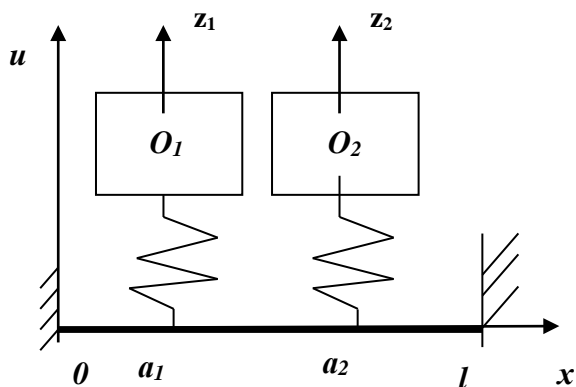


Рисунок 2.2 – Механическая система «упругий стержень с двумя горизонтально расположенными упруго-присоединёнными массами»

Для вывода уравнений движения механической системы (рис. 2.2), также используется вариационный принцип Гамильтона-Остроградского (2.1.1).

Кинетическая и потенциальная энергии запишутся в виде:

$$T = T_1 + T_2 + T_c, \quad U = U_1 + U_2 + U_c, \quad (2.1.11)$$

где

$$T_1 = \frac{m_1 \dot{z}_1^2}{2}, \quad T_2 = \frac{m_2 \dot{z}_2^2}{2}, \quad (2.1.12)$$

$$U_1 = \frac{c_1 (z_1 - u(a_1, t))^2}{2}, \quad U_2 = \frac{c_2 (z_2 - u(a_2, t))^2}{2}, \quad (2.1.13)$$

а  $T_c$  – кинетическая энергия стержня и  $U_c$  – потенциальная энергия стержня представляются в виде (1.4.6):

$$T_c = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx, \quad U_c = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (2.1.14)$$

Далее выполняем все те же действия, что и в пунктах 1.4.1 и 2.1.1, то есть, учитывая соотношения (2.1.11)-(2.1.14) запишем интеграл действия

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{m_1 \dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{z}_2^2}{2} - \frac{c(z - u(a, t))^2}{2} - \frac{c_2 (z_2 - u(a_2, t))^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right)^2 dx \right] dt.$$

Для нахождения вариации функционала  $\delta J$  составляем функцию  $\varphi(\alpha)$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) = & \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{m_1 (\dot{z}_1 + \alpha \delta \dot{z}_1)^2}{2} + \frac{m_2 (\dot{z}_2 + \alpha \delta \dot{z}_2)^2}{2} - \frac{c_1 (z_1 + \alpha \delta z_1 - u(a_1, t) - \alpha \delta u(a_1, t))^2}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{c_2 (z_2 + \alpha \delta z_2 - u(a_2, t) - \alpha \delta u(a_2, t))^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \delta \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \right) dt. \end{aligned}$$

Найдем производную от функции  $\varphi(\alpha)$  по параметру  $\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial \alpha} = & \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{m_1 (\dot{z}_1 + \alpha \delta \dot{z}_1)^2}{2} + \frac{m_2 (\dot{z}_2 + \alpha \delta \dot{z}_2)^2}{2} - \frac{c_1 (z_1 + \alpha \delta z_1 - u(a_1, t) - \alpha \delta u(a_1, t))^2}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{c_2 (z_2 + \alpha \delta z_2 - u(a_2, t) - \alpha \delta u(a_2, t))^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \delta \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \right) dt = \\ = & \int_{t_0}^{t_1} \left[ m_1 (\dot{z}_1 + \alpha \delta \dot{z}_1) \delta \dot{z}_1 + m_2 (\dot{z}_2 + \alpha \delta \dot{z}_2) \delta \dot{z}_2 - c_1 (z_1 + \alpha \delta z_1 - u(a_1, t) - \alpha \delta u(a_1, t)) \delta z_1 + \right. \\ & + c_1 (z_1 + \alpha \delta z_1 - u(a_1, t) - \alpha \delta u(a_1, t)) \delta u(a_1, t) - c_2 (z_2 + \alpha \delta z_2 - u(a_2, t) - \alpha \delta u(a_2, t)) \delta z_2 + \\ & \left. + c_2 (z_2 + \alpha \delta z_2 - u(a_2, t) - \alpha \delta u(a_2, t)) \delta u(a_2, t) \right] dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right) \frac{\partial \delta u(x, t)}{\partial t} dx - \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right) \frac{\partial^2 \delta u(x, t)}{\partial x^2} dx \right] dt. \end{aligned}$$



Вариация функционала действия определится соотношением

$$\begin{aligned} \delta J = \frac{\partial \varphi(0)}{\partial \alpha} = & \int_{t_0}^{t_1} \left( m_1 \dot{z}_1 \delta \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2 \delta \dot{z}_2 - c_1 (z_1 - u(a_1, t)) \delta z_1 - c_2 (z_2 - u(a_2, t)) \delta z_2 + \right. \\ & \left. + c_1 (z_1 - u(a_1, t)) \delta u(a_1, t) + c_2 (z_2 - u(a_2, t)) \delta u(a_2, t) + \int_0^l \rho F \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} dx - \int_0^l EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) dt. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Интегралы, входящие в последнее выражение (2.1.15) интегрируем по частям

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \dot{z}_1 \delta \dot{z}_1 dt &= - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{z}_1 \delta z_1 dt; & \int_{t_0}^{t_1} \dot{z}_2 \delta \dot{z}_2 dt &= - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{z}_2 \delta z_2 dt; \\ \int_{t_0}^{t_1} c_1 (z_1 - u(a_1, t)) \delta u(a_1, t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l c_1 (z_1 - u(x, t)) \delta u(x, t) \delta(x - a_1) dx dt; \\ \int_{t_0}^{t_1} c_2 (z_2 - u(a_2, t)) \delta u(a_2, t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l c_2 (z_2 - u(x, t)) \delta u(x, t) \delta(x - a_2) dx dt; \\ \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} dt dx = \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dt \right) dx = - \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dt dx; \\ \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \delta \frac{\partial u}{\partial x} dx = - \int_0^l \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \delta \frac{\partial u}{\partial x} dx = \\ &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \delta u \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \delta u dx = \int_0^l \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \delta u dx. \end{aligned}$$

Здесь учитывается, что на концах отрезков интегрирования допустимые вариации  $\delta z_1$ ,  $\delta z_2$ ,  $\delta u$ ,  $\delta \frac{\partial u}{\partial x}$  обращаются в нуль.

Таким образом, вариация функционала действия (2.1.15) запишется в виде

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( -m_1 \ddot{z}_1 - c_1 (z_1 - u(a_1, t)) \right) \delta z_1 + \left( -m_2 \ddot{z}_2 - c_2 (z_2 - u(a_2, t)) \right) \delta z_2 + \right. \\ & \left. \int_0^l \left( c_1 (z_1 - u(x, t)) \delta(x - a_1) + c_2 (z_2 - u(x, t)) \delta(x - a_2) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u dx \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Из (2.1.16) следует система гибридных дифференциальных уравнений, описывающая динамику системы (рис. 2.2):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 (z_1 - u(a_1, t)) = 0, \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2 (z_2 - u(a_2, t)) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1 (z_1 - u(x, t)) \delta(x - a_1) + c_2 (z_2 - u(x, t)) \delta(x - a_2). \end{cases} \quad (2.1.17)$$

2. Балка Эйлера-Бернулли с тремя горизонтально расположенными твердыми телами. Рассмотрим механическую систему (рис. 2.3), состоящую из трех масс  $m_1, m_2, m_3$ , установленных горизонтально с помощью пружин жесткостей  $c_1, c_2, c_3$  соответственно на упругом стержне. Массы  $m_1, m_2, m_3$  перемещаются только поступательно в направлении осей  $O_1 z_1, O_2 z_2$  и  $O_3 z_3$ . Точки  $O_1, O_2, O_3$  совпадают с положениями равновесия масс. Колебания масс характеризуются функциями  $z_1(t), z_2(t)$  и  $z_3(t)$ . Пружины присоединены к стержню на расстояниях  $a_1, a_2, a_3$  от левого конца стержня соответственно.

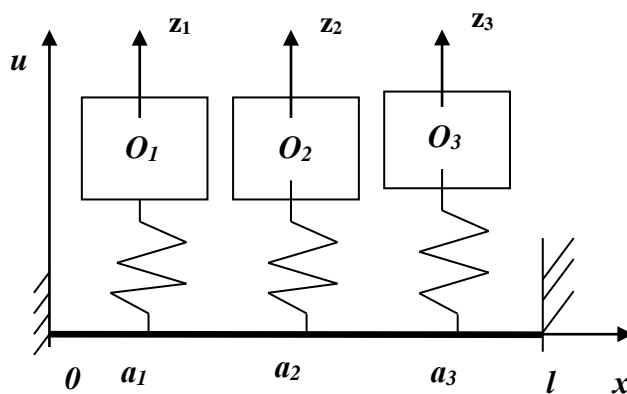


Рисунок 2.3 – Механические системы «упругий стержень с тремя горизонтально расположенными упруго-присоединенными массами»

Применяем вариационный принцип (2.1.1), кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_c, \quad U = U_1 + U_2 + U_3 + U_c, \quad (2.1.18)$$

где

$$T_1 = \frac{m_1 \dot{z}_1^2}{2}, \quad T_2 = \frac{m_2 \dot{z}_2^2}{2}, \quad T_3 = \frac{m_3 \dot{z}_3^2}{2}, \quad (2.1.19)$$

$$U_1 = \frac{c_1 (z_1 - u(a_1, t))^2}{2}, \quad U_2 = \frac{c_2 (z_2 - u(a_2, t))^2}{2}, \quad U_3 = \frac{c_3 (z_3 - u(a_3, t))^2}{2}, \quad (2.1.20)$$

а  $T_c$  – кинетическая энергия стержня и  $U_c$  – потенциальная энергия стержня выражаются соотношением (2.1.14).

Выполнив все те же действия, что и для механической системы, представленной на рисунке 2.2, т.е. вычислив вариацию (2.1.1) с учетом (2.1.18)–(2.1.20) и (2.1.14), преобразовав интегралы методом интегрирования по частям, получим уравнения движения механической системы «упругий стержень с тремя горизонтально расположенными упруго-присоединенными массами»

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 (z_1 - u(a_1, t)) = 0, \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2 (z_2 - u(a_2, t)) = 0, \\ m_3 \ddot{z}_3 + c_3 (z_3 - u(a_3, t)) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1 (z_1 - u(x, t)) \delta(x - a_1) + \\ + c_2 (z_2 - u(x, t)) \delta(x - a_2) + c_3 (z_3 - u(x, t)) \delta(x - a_3). \end{cases} \quad (2.1.21)$$

При этом функция  $u(x, t)$  описывает поперечные перемещения точек стержня. В соответствии с этим на функцию  $u(x, t)$  наложим граничные условия (1.4.1).

*3. Балка Эйлера-Бернулли с  $n$  горизонтально расположенными твердыми телами.*

Рассмотрим механическую систему (рис. 2.4), состоящую из  $n$  масс  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , установленных горизонтально с помощью пружин жесткостей  $c_1, c_2, \dots, c_n$  соответственно на упругом стержне. Массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$  перемещаются только поступательно в направлении осей  $O_1 z_1, O_2 z_2, \dots, O_n z_n$ . Точки  $O_1, O_2, \dots, O_n$  совпадают с положениями равновесия масс. Колебания масс

характеризуются функциями  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$ . Пружины присоединены к стержню на расстояниях  $a_1, a_2, \dots, a_n$  от левого конца стержня соответственно.

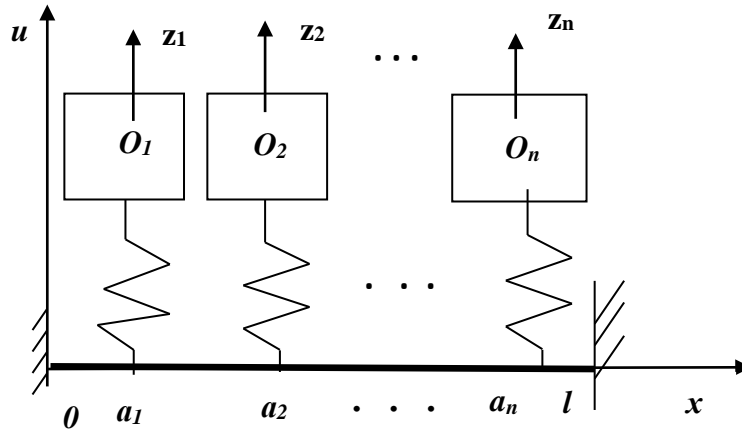


Рисунок 2.4 – Механическая система «упругий стержень с  $n$  горизонтально расположенными упруго-присоединенными массами»

Проведя анализ структур полученных уравнений (2.1.17) и (2.1.21), можем записать гибридную систему дифференциальных уравнений, описывающую систему  $n$  горизонтально расположенных твердых тел, прикрепленных с помощью пружин к балке Эйлера-Бернулли

$$\begin{cases} m_i \ddot{z}_i + c_i (z_i - u(a_i, t)) = 0, & (i = 1, 2, 3, \dots, n), \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{i=1}^n c_i (z_i - u(x, t)) \delta(x - a_i). \end{cases} \quad (2.1.22)$$

### 2.1.3 Математическая модель механической системы «балка Эйлера-Бернулли с вертикально расположенными твердыми телами»

Рассмотрим построение систем гибридных дифференциальных уравнений, описывающих динамику механических систем «балка Эйлера-Бернулли с вертикально расположенными твердыми телами».

1. *Балка Эйлера-Бернулли с двумя вертикально расположенными твердыми телами.* Механическая система (рис. 2.5), состоящая из двух масс  $m_1, m_2$ , каскадно-присоединенных к упругому стержню с помощью пружин

жесткостями  $c_1$  и  $c_2$ . Массы  $m_1$ ,  $m_2$ , могут перемещаться только поступательно в направлении осей  $O_1z_1$  и  $O_2z_2$ . Здесь точки  $O_1$  и  $O_2$  совпадают с положениями равновесия масс. Колебания масс характеризуются функциями  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$ . Пружина присоединена к стержню на расстоянии  $a$  от левого конца стержня соответственно.

Для вывода уравнений движения системы согласно п. 1.4.1 используем вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, который выражается соотношением (2.1.1). Кинетическая и потенциальная энергии системы представимы в виде

$$U = U_1 + U_2 + U_c, \quad T = T_1 + T_2 + T_c, \quad (2.1.23)$$

где кинетические энергии масс  $T_1$ ,  $T_2$  имеют вид (2.1.12), а  $T_c$  – кинетическая энергия и  $U_c$  – потенциальная энергия стержня записываются соотношением (2.1.14). Потенциальные энергии пружины  $U_1$ ,  $U_2$  выражаются следующим образом

$$U_1 = \frac{c_1(z_1 - u(a, t))^2}{2}, \quad U_2 = \frac{c_2(z_2 - z_1)^2}{2}. \quad (2.1.24)$$

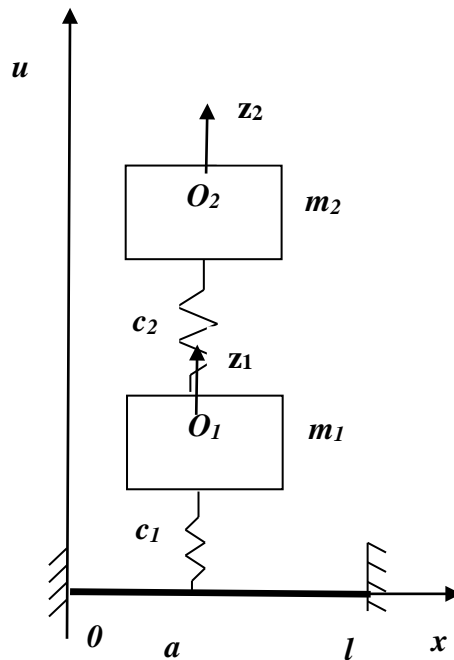


Рисунок 2.5 – Механическая система каскадного типа с двумя твердыми телами

Учитывая соотношения (2.1.23)-(2.1.24), (2.1.12) и (2.1.14) запишем интеграл действия

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{m_1 \dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{z}_2^2}{2} - \frac{c_1 (z_1 - u(a, t))^2}{2} - \frac{c_2 (z_2 - z_1)^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \right) dt.$$

Для нахождения вариации функционала  $\delta J$  составим функцию  $\varphi(\alpha)$

$$\varphi(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{m_1 (\dot{z}_1 + \alpha \delta \dot{z}_1)^2}{2} + \frac{m_2 (\dot{z}_2 + \alpha \delta \dot{z}_2)^2}{2} - \frac{c_1 (z_1 + \alpha \delta z_1 - u(a, t) - \alpha \delta u(a, t))^2}{2} - \frac{c_2 (z_2 + \alpha \delta z_2 - z_1 - \alpha \delta z_1)^2}{2} + \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right)^2 dx \right] dt. \right.$$

Найдем производную от функции  $\varphi(\alpha)$  по параметру  $\alpha$

$$\frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{m_1 (\dot{z}_1 + \alpha \delta \dot{z}_1)^2}{2} + \frac{m_2 (\dot{z}_2 + \alpha \delta \dot{z}_2)^2}{2} - \frac{c_1 (z_1 + \alpha \delta z_1 - u(a, t) - \alpha \delta u(a, t))^2}{2} - \right. \\ \left. - \frac{c_2 (z_2 + \alpha \delta z_2 - z_1 - \alpha \delta z_1)^2}{2} \right) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right)^2 dx dt - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right)^2 dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[ m_1 (\dot{z}_1 + \alpha \delta \dot{z}_1) \delta \dot{z}_1 + \right. \\ \left. + m_2 (\dot{z}_2 + \alpha \delta \dot{z}_2) \delta \dot{z}_2 - c_1 (z_1 + \alpha \delta z_1 - u(a, t) - \alpha \delta u(a, t)) \delta z_1 + \right. \\ \left. + c_1 (z_1 + \alpha \delta z_1 - u(a, t) - \alpha \delta u(a, t)) \delta u(a, t) - \right. \\ \left. - c_2 (z_2 + \alpha \delta z_2 - z_1 - \alpha \delta z_1) \delta z_2 + c_2 (z_2 + \alpha \delta z_2 - z_1 - \alpha \delta z_1) \delta z_1 \right] dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right) \frac{\partial \delta u(x, t)}{\partial t} dx - \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t)) \right) \frac{\partial^2 \delta u(x, t)}{\partial x^2} dx \right] dt.$$

Вариация функционала действия определится соотношением

$$\delta J = \frac{\partial \varphi(0)}{\partial \alpha} = \int_{t_0}^{t_1} m_1 \dot{z}_1 \delta \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2 \delta \dot{z}_2 - c_1 (z_1 - u(a, t)) \delta z_1 + c_1 (z_1 - u(a, t)) \delta u(a, t) - \\ - c_2 (z_2 - z_1) \delta z_2 + c_2 (z_2 - z_1) \delta z_1 dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^l \rho F \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta u(x, t)}{\partial t} dx - \int_0^l EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u(x, t)}{\partial x^2} dx \right] dt.$$

Интегралы, входящие в последнее выражение, преобразуем следую-

щим образом:

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{z}_1 \delta \dot{z}_1 dt = - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{z}_1 \delta z_1 dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} \dot{z}_2 \delta \dot{z}_2 dt = - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{z}_2 \delta z_2 dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} c_1 (z_1 - u(a, t)) \delta u(a, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l c_1 (z_1 - u(x, t)) \delta u(x, t) \delta(x - a) dx dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} dt dx = \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dt \right) dx = - \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dt dx,$$

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \delta \frac{\partial u}{\partial x} dx = - \int_0^l \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \delta \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \delta u \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \delta u dx = \int_0^l \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \delta u dx,$$

тогда (2.1.1) представимо в виде

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left[ (-m_1 \ddot{z}_1 - c_1 (z_1 - u(a, t)) - c_1 (z_1 - z_2)) \delta z_1 + (-m_2 \ddot{z}_2 + c_2 (z_1 - z_2)) \delta z_2 + \right. \\ & \left. + \int_0^l \left( c_1 (z_1 - u(x, t)) \delta(x - a) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u dx \right] dt = 0, \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

и с учетом (2.1.25) придем к уравнению движения механической системы (рис. 2.5)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 (z_1 - u(a, t)) - c_2 (z_2 - z_1) = 0, \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2 (z_2 - z_1) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1 (z_1 - u(x, t)) \delta(x - a). \end{cases} \quad (2.1.26)$$

2. *Балка Эйлера-Бернулли с тремя вертикально расположенными твердыми телами.* Механическая система (рис. 2.6), состоящая из трех масс  $m_1, m_2, m_3$ , каскадно-присоединенных к упругому стержню с помощью пружин жесткости  $c_1, c_2, c_3$ . Массы  $m_1, m_2, m_3$  перемещаются только поступательно в направлении осей  $O_1 z_1, O_2 z_2$  и  $O_3 z_3$ . Точки  $O_1, O_2, O_3$  совпадают с положениями равновесия масс. Колебания масс характеризуются функциями  $z_1(t), z_2(t)$  и  $z_3(t)$ . Пружина присоединена к стержню на расстоянии  $a$  от левого конца стержня соответственно.

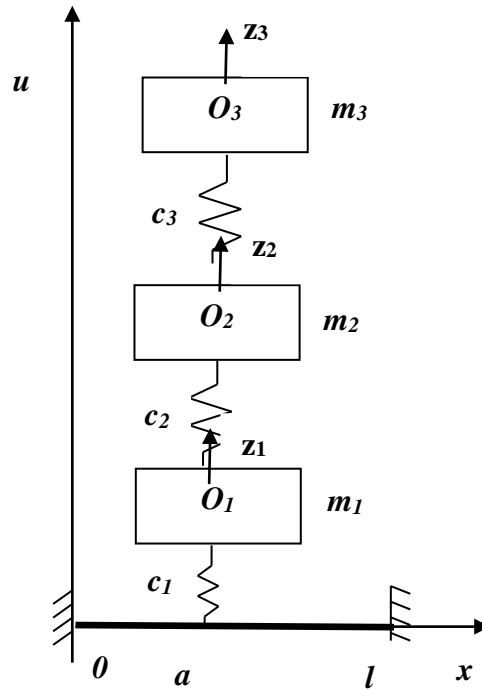


Рисунок 2.6 – Механическая система каскадного типа с тремя твердыми телами

Для получения уравнения движения системы опять применим вариационный принцип Гамильтона-Остроградского (2.1.1), кинетическая и потенциальная энергии представляются следующим образом:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_c, \quad U = U_1 + U_2 + U_3 + U_c, \quad (2.1.27)$$

где кинетические энергии  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ , имеют вид (2.1.19),  $T_c$  и  $U_c$  представлены в виде (2.1.14), а потенциальные энергии пружин:

$$U_1 = \frac{c_1(z_1 - u(a,t))^2}{2}, \quad U_2 = \frac{c_2(z_2 - z_1)^2}{2}, \quad U_3 = \frac{c_3(z_3 - z_2)^2}{2}, \quad (2.1.28)$$

Аналогично механической системе, представленной на рисунке 2.5, выполняем все те же действия, т.е. учитывая соотношения (2.1.27)-(2.1.28), (2.1.19) и (2.1.14) запишем интеграл действия. Для нахождения вариации функционала  $\delta J$  составляем функцию  $\varphi(\alpha)$  и находим производную по параметру  $\alpha$ . Далее преобразовываем интегралы интегрированием по частям и приходим к уравнению движения механической системы «упругий стержень с тремя горизонтально расположенными упруго-присоединенными массами»:



$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1(z_1 - u(a, t)) - c_2(z_2 - z_1) = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2(z_2 - z_1) - c_3(z_3 - z_2) = 0 \\ m_3 \ddot{z}_3 + c_3(z_3 - z_2) = 0 \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1(z_1 - u(x, t)) \delta(x - a). \end{cases} \quad (2.1.29)$$

Функция  $u(x, t)$  описывает поперечные перемещения точек стержня. Предположим, что она удовлетворяет граничным условиям (1.4.1).

3. *Балка Эйлера-Бернулли с  $n$  вертикально расположенными твердыми телами.* Механическая система (рис. 2.7), состоящая из  $n$  масс  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , каскадно-присоединенных к упругому стержню с помощью пружин жесткости  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$  перемещаются только поступательно в направлении осей  $O_1 z_1, O_2 z_2, \dots, O_n z_n$ . Точки  $O_1, O_2, \dots, O_n$  совпадают с положениями равновесия масс. Колебания масс характеризуются функциями  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$ . Пружина присоединена к стержню на расстоянии  $a$  от левого конца стержня соответственно.

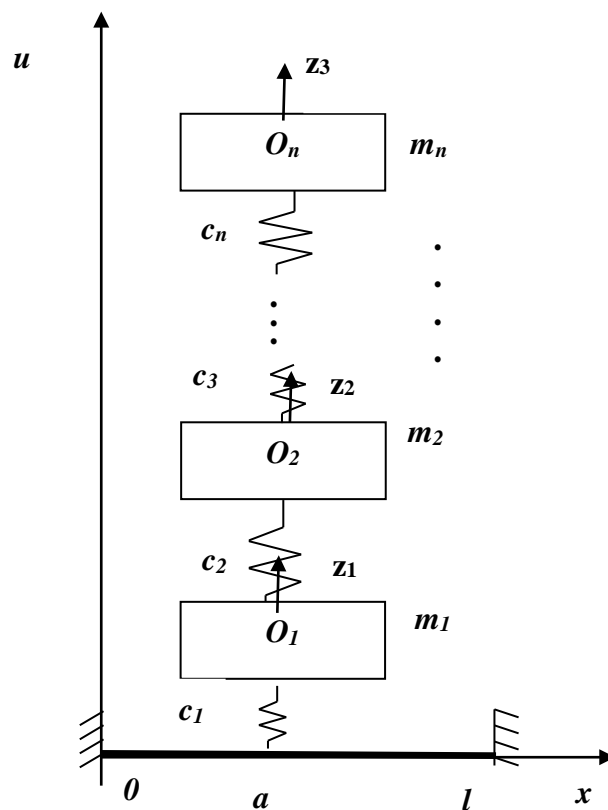


Рисунок 2.7 – Механическая система каскадного типа с  $n$  твердыми телами

Проведя анализ структур полученных уравнений (2.1.26) и (2.1.29) можем записать гибридную систему дифференциальных уравнений, описывающую систему  $n$  вертикально расположенных твердых тел, прикрепленных с помощью пружин к балке Эйлера-Бернулли

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 (z_1 - u(a, t)) - c_2 (z_2 - z_1) = 0, \\ m_i \ddot{z}_i + c_i (z_i - z_{i-1}) - c_{i+1} (z_{i+1} - z_i) = 0, \quad (i = 2, \dots, n-1), \\ m_n \ddot{z}_n + c_n (z_n - z_{n-1}) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1 (z_1 - u(x, t)) \delta(x - a). \end{cases} \quad (2.1.30)$$

## 2.2 Обобщенная математическая модель системы твердых тел, установленных на балке Эйлера-Бернулли

Анализ механических систем, представленных в пунктах 2.1.1-2.1.3 диссертационной работы, позволил предложить обобщенную математическую модель балки Эйлера-Бернулли с закрепленными краями и прикрепленной на ней с помощью упругих связей системой твердых тел, соединенных между собой упругими связями.

Под обобщенной математической моделью понимается система гибридных дифференциальных уравнений заданной структуры, описывающая динамику произвольных систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера-Бернулли. Приведены необходимые теоретические исследования, связанные с разработкой аналитико-численного метода исследования колебательных процессов в системах, описываемых обобщенными математическими моделями.

Аналитико-численный метод реализован в виде комплекса программ по расчету собственных колебаний механических систем, представляющих собой упругий стержень с закрепленными краями и прикрепленной на нем с помощью упругих связей системой твердых тел, соединенных между собой упругими связями.

## 2.2.1 Гибридная система дифференциальных уравнений

Рассмотрим гибридную систему дифференциальных уравнений [69]

$$\begin{cases} A\ddot{z} + Bz + C(Dz - \bar{u}) = 0, \\ k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) = \sum_{i=1}^m q_i (d^{iT} z(t) - u(x, t)) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (2.2.1)$$

где  $z(t)$  –  $n$ -мерная вектор-функция;  $u(x, t)$  – скалярная функция;  $\bar{u}(t)$  –  $m$ -мерная вектор-функция с компонентами  $u(a_1, t), \dots, u(a_m, t)$ ;  $A, B$  – заданные, постоянные  $n \times n$  – матрицы;  $C$  – заданная, постоянная  $n \times m$  – матрица;  $D$  – заданная, постоянная  $m \times n$  – матрица;  $d^i$  –  $n$ - мерный вектор, составленный из строк матрицы  $D$ ;  $k, b, a_i, q_i, (i = \overline{1, m})$  – заданные постоянные, причем  $0 \leq a_i \leq l$ ;  $()^T$  – здесь и ниже операция транспонирования.

Отметим, что данная система описывает любую произвольную систему взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных к упругому стержню – балке Эйлера-Бернулли.

Например, рассмотрим механическую систему (рис. 2.8), состоящую из трех масс  $m_1, m_2, m_3$ . Твердые тела  $m_1$  и  $m_2$  присоединены горизонтально к упругому стержню с помощью пружин жесткости  $c_1, c_2$  и  $c_3, c_4$  соответственно, а тело  $m_3$  каскадно-присоединено к  $m_1$  и  $m_2$  с помощью пружин жесткости  $c_5$  и  $c_6$ . Введем системы координат: неподвижную систему координат  $Oxz$ , центр которой совпадает с левым концом стержня, а ось  $Ox$  направлена вдоль оси стержня; подвижные системы координат  $O'_1 x'_1 z'_1, O'_2 x'_2 z'_2, O'_3 x'_3 z'_3$  связанных с твердыми телами  $m_1, m_2, m_3$ , соответственно. Массы  $m_1, m_2, m_3$  могут перемещаться поступательно в направлении осей  $Oz$  и совершать угловые отклонения  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  относительно начала координат.

Для данной системы непосредственный вывод уравнений движения на основании вариационного принципа Гамильтона-Остроградского приводит к следующей системе гибридных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned}
& -m_1 \ddot{z}_{01} - c_1(z_{01} + z'_1 - d_1 \varphi_1 - u(a_1, t)) - c_2(z_{01} + z'_2 - d_2 \varphi_1 - u(a_2, t)) + \\
& + c_5(z_{03} + z'_5 - d_5 \varphi_3 - (z_{01} - d_{13} \varphi_3)) = 0 \\
& -m_2 \ddot{z}_{02} - c_3(z_{02} + z'_3 - d_3 \varphi_2 - u(a_3, t)) - c_4(z_{02} + z'_4 - d_4 \varphi_2 - u(a_4, t)) + \\
& + c_6(z_{03} + z'_6 - d_6 \varphi_3 - (z_{02} - d_{32} \varphi_3)) = 0, \\
& -m_3 \ddot{z}_{03} - c_5(z_{03} + z'_5 - d_5 \varphi_3 - (z_{01} - d_{13} \varphi_3)) - c_6(z_{03} + z'_6 + d_6 \varphi_3 - (z_{02} - d_{32} \varphi_3)) = 0, \\
& -I_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1 + c_1 d_1 (z_{01} + z'_1 - d_1 \varphi_1 - u(a_1, t)) + c_2 d_2 (z_{01} + z'_2 - d_2 \varphi_1 - u(a_2, t)) = 0, \\
& -I_{\varphi_2} \ddot{\varphi}_2 + c_3 d_3 (z_{02} + z'_3 - d_3 \varphi_2 - u(a_3, t)) + c_4 d_4 (z_{02} + z'_4 - d_4 \varphi_2 - u(a_4, t)) = 0, \\
& -I_{\varphi_3} \ddot{\varphi}_3 - c_5(-d_5 + d_{13})(z_{03} + z'_5 - d_5 \varphi_3 - (z_{01} - d_{13} \varphi_3)) - \\
& - c_6(-d_6 + d_{32})(z_{03} + z'_6 - d_6 \varphi_3 - (z_{02} - d_{32} \varphi_3)) = 0, \\
& \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1(z_{01} + z'_1 - d_1 \varphi_1 - u(a_1, t)) \delta(x - a_1) + c_2(z_{01} + z'_2 - d_2 \varphi_1 - u(a_2, t)) \delta(x - a_2) + \\
& + c_3(z_{02} + z'_3 - d_3 \varphi_2 - u(a_3, t)) \delta(x - a_3) + c_4(z_{02} + z'_4 - d_4 \varphi_2 - u(a_4, t)) \delta(x - a_4),
\end{aligned} \right.$$

где  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$  – соответственно расстояния от осей  $O'_1 z'_1, O'_2 z'_2, O'_3 z'_3$  до осей пружин прикрепленных к стержню в точках  $a_1, a_2, a_3, a_4$ ;  $I_{\varphi_1}, I_{\varphi_2}, I_{\varphi_3}$  – момент инерции твердых тел относительно центра масс при повороте на угол  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ;  $z_{01}, z_{02}, z_{03}$  – центры масс подвижных систем;  $z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6$  – компоненты координат точек крепления упругих элементов к телу.

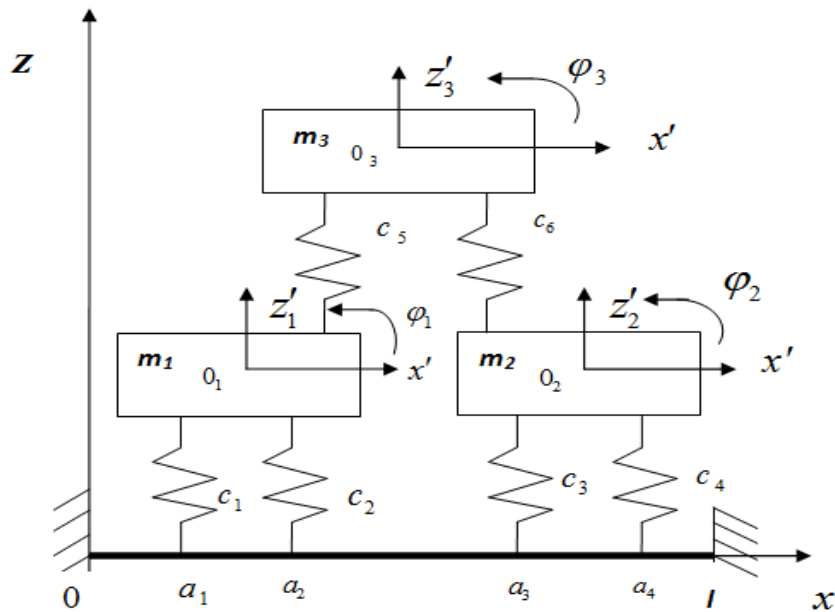


Рисунок 2.8 – Механическая система твердых тел, прикрепленных к стержню

Данная гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая механическую систему (рис. 2.8), является частным случаем системы (2.2.1), при этом матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и постоянные из (2.2.1) для данной системы могут быть записаны следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} -m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{\varphi_3} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} z_{01} \\ z_{02} \\ z_{03} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -c_1 & -c_2 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 & -c_4 & 0 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5 & -c_6 \\ c_1 d_1 & c_2 d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 d_3 & c_4 d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5(-d_5 + d_{13}) & -c_6(-d_6 + d_{32}) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -d_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -d_4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -d_5 + d_{13} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -d_6 + d_{32} \end{pmatrix}, \bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u(a_1, t) \\ u(a_2, t) \\ u(a_3, t) \\ u(a_4, t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$k = \rho F, \quad b = EI, \quad q_1 = c_1, \quad q_2 = c_2, \quad q_3 = c_3, \quad q_4 = c_4, \quad q_5 = c_5, \quad q_6 = c_6,$$

$$d^{1'} = (1 \ 0 \ 0 \ -d_1 \ 0 \ 0), \quad d^{2'} = (1 \ 0 \ 0 \ -d_2 \ 0 \ 0),$$

$$d^{3'} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -d_3 \ 0), \quad d^{4'} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -d_4 \ 0),$$

$$d^{5'} = (-1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -d_5 + d_{13}), \quad d^{6'} = (0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ -d_6 + d_{32}).$$

Отметим, гибридные системы дифференциальных уравнений (1.4.9), (2.1.10), (2.1.17), (2.1.21), (2.1.22), (2.1.26), (2.1.29) и (2.1.30) являющиеся математическими моделями системы твердых тел, прикрепленных к балке Эйле-

ра-Бернулли, при различных способах прикрепления, также являются частными случаями системы (2.2.1).

Если считать, что в (2.2.1) функция  $u(x,t)$  описывает поперечные перемещения точек стержня, то в соответствии с этим на функцию  $u(x,t)$  следует наложить граничные условия, соответствующие тем или иным способам закрепления концов.

В частности, в случае жесткой заделки на концах имеем

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \quad (2.2.2)$$

в случае жесткой заделки на левом и шарнирно-опертого закрепления на правом конце

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t) = 0, \quad (2.2.3)$$

в случае жесткой заделки на левом и свободного правого конца

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(l,t) = 0. \quad (2.2.4)$$

Введем понятие обобщенного решения гибридной системы дифференциальных уравнений (2.2.1), удовлетворяющей краевым условиям (2.2.2).

Для этого рассмотрим множество вектор-функций

$$K = \left\{ (y(\cdot), v(\cdot, \cdot))^T : y(\cdot) \in C_{\infty, [0, T]}^n, v(\cdot, \cdot) \in C_{\infty, \infty, D} \right\}, \quad (2.2.5)$$

где  $D = \{(x, t) \in R^2 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  – прямоугольник;  $C_{\infty, [0, T]}^n$  – пространство  $n$ -мерных вектор-функций, заданных на отрезке  $[0, T]$  и имеющих непрерывные производные любого порядка;  $C_{\infty, \infty, D}$  – пространство функций, двух переменных, заданных на прямоугольнике  $D$  и имеющих непрерывные частные производные любого порядка.

Потребуем, чтобы любая вектор-функция  $(y(\cdot), v(\cdot, \cdot))^T$  из множества функций  $K$  удовлетворяла условиям

$$\begin{aligned}
y(0) = y(T) = 0, \quad v(x,0) = v(x,T) = 0, \\
v(0,t) = v(l,t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(l,t) = 0.
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

*Определение 2.2.1.* Вектор-функции  $(y(\cdot), v(\cdot, \cdot))^T$  из множества функций  $K$  будем называть основными.

*Определение 2.2.2.* Вектор-функцию  $z(\cdot) \in C_{2,[0,T]}^n$ , скалярную функцию  $u(\cdot, \cdot) \in C_{4,2,D}$  назовем обобщенным решением краевой задачи для гибридной системы дифференциальных уравнений (2.2.1), если функция  $u(x,t)$  удовлетворяет граничным условиям краевой задачи и для любой основной вектор-функции  $(y(\cdot), v(\cdot, \cdot))^T \in K$  имеет место тождество

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (A\dot{z} + Bz + C(Dz - \bar{u}), y(t)) dt + \\
& + \iint_D \left( k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \sum_{i=1}^m q_i (d^i z(t) - u(x,t)) \delta(x - a_i) \right) \cdot v(x,t) dx dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

### 2.2.2 Вспомогательная краевая задача

Подставив в систему (2.2.1)  $z(t)$ ,  $u(x,t)$  в виде

$$z(t) = Z \sin \omega t, \quad u(x,t) = V(x) \sin \omega t,$$

где  $\omega$  – собственная частота,  $Z$  –  $n$ -мерный вектор амплитуд колебаний масс,  $V(x)$  – амплитуда колебаний точек упругого стержня, после преобразований получим

$$(-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = 0, \tag{2.2.8}$$

$$-\omega^2 k V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \sum_{i=1}^m q_i (d^i Z - V(x)) \delta(x - a_i), \tag{2.2.9}$$

где  $\bar{V}$  –  $m$ -мерный вектор с компонентами  $V(a_1), \dots, V(a_m)$ .

В силу граничных условий, накладываемых на функцию  $u(x,t)$ , функция  $V(x)$  должна удовлетворять условиям:

- при граничных условиях (2.2.2)

$$V(0) = V(l) = 0, \quad \frac{dV}{dx}(0) = \frac{dV}{dx}(l) = 0, \quad (2.2.10)$$

- при граничных условиях (2.2.3)

$$V(0) = 0, \quad \frac{dV}{dx}(0) = 0, \quad V(l) = 0, \quad \frac{d^2V}{dx^2}(l) = 0, \quad (2.2.11)$$

- при граничных условиях (2.2.4)

$$V(0) = 0, \quad \frac{dV}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d^2V}{dx^2}(l) = 0, \quad \frac{d^3V}{dx^3}(l) = 0. \quad (2.2.12)$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для алгебраическо-дифференциальной системы (2.2.8)-(2.2.9) с одним из граничных условий (2.2.10), (2.2.11) или (2.2.12).

*Определение 2.2.3.* Функцию  $V(\cdot) \in C_{4,[0,T]}$  и вектор  $Z \in R^n$  назовем обобщенным решением вспомогательной краевой задачи для алгебраическо-дифференциальной системы (2.2.8)-(2.2.9), если они удовлетворяют системе алгебраических уравнений (2.2.8), функция  $V(x)$  удовлетворяет заданному граничному условию и для любой компоненты  $v(\cdot, \cdot)$  основной вектор-функции  $(y(\cdot), v(\cdot, \cdot))^T \in K$ , при любом  $t \in [0, T]$  имеет место следующее тождество

$$\int_0^l \left( -\omega^2 k V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} - \sum_{i=1}^m q_i (d^{i'} Z - V(x)) \delta(x - a_i) \right) \cdot v(x, t) dx = 0. \quad (2.2.13)$$

*Теорема 2.2.1.* При любых значениях  $\omega$  и  $Z$  для обобщенного решения  $V(x)$  дифференциального уравнения (2.2.9) справедливо представление

$$V(x) = \sum_{i=1}^m G_i(x - a_i) q_i (d^{i'} Z - V(a_i)), \quad (2.2.14)$$

где функции  $G_i(x)$ ,  $(i = 1, \dots, m)$  обобщенные решения уравнения

$$-\omega^2 k G_i(x) + b \frac{d^4 G_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.2.15)$$



*Доказательство:* Отметим, если функция  $V(x)$  обобщенное решение дифференциального уравнения (2.2.9), то для любой компоненты  $v(\cdot, \cdot)$  основной вектор-функции  $(y(\cdot), v(\cdot, \cdot)) \in K$ , при любом  $t \in [0, T]$  справедливо тождество

$$\int_0^l \left( \lambda^2 k V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} \right) \cdot v(x, t) dx = \sum_{i=1}^n \left[ q_i (d^{i'} Z - V(a_i)) v(a_i, t) \right]. \quad (2.2.16)$$

В том, что для обобщенного решения дифференциального уравнения (2.2.9) справедливо представление (2.2.14) убедимся непосредственной подстановкой (2.2.14) в левую часть (2.2.16).

Для этого представим (2.2.14) в виде

$$V(x) = \sum_{i=1}^m \int_0^l \left( G_i(x - \xi) q_i (d^{i'} Z - V(\xi)) \cdot \delta(\xi - a_i) \right) d\xi. \quad (2.2.17)$$

Подставим (2.2.17), в левую часть выражения (2.2.16), умножив на  $v(x, t)$  из класса основных функций, проинтегрируем по  $x$  в пределах от 0 до  $l$ . Далее, меняя порядок интегрирования и учитывая (2.2.15), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left\{ \int_0^l \sum_{i=1}^m \left[ \left( -k\omega^2 G_i(x - \xi) + b \frac{d^4 G_i(x - \xi)}{dx^4} \right) q_i (d^{i'} Z - V(\xi)) \delta(\xi - a_i) \right] d\xi \right\} \cdot v(x, t) dx = \\ & = \sum_{i=1}^m \int_0^l \left[ q_i (d^{i'} Z - V(\xi)) \delta(\xi - a_i) \cdot \int_0^l \left( -k\omega^2 G_i(x - \xi) + \frac{d^4 G_i(x - \xi)}{dx^4} \right) v(x, t) dx \right] d\xi = \\ & = \sum_{i=1}^m \int_0^l \left[ q_i (d^{i'} Z - V(\xi)) \delta(\xi - a_i) \cdot \int_0^l v(x, t) \delta(x - \xi) dx \right] d\xi = \\ & = \sum_{i=1}^m \int_0^l \left[ q_i (d^{i'} Z - V(\xi)) v(\xi, t) \delta(\xi - a_i) \right] d\xi = \sum_{i=1}^n \left[ q_i (d^{i'} Z - V(a_i)) v(a_i, t) \right], \end{aligned}$$

что, совпадает с правой частью (2.2.14).

Таким образом, для обобщенного решения  $V(x)$  дифференциального уравнения (2.2.9) справедливо представление (2.2.14). *Теорема доказана.*

*Следствие 2.2.1.* Если обобщенные решения  $G_i(x)$ ,  $(i = 1, \dots, m)$  уравнения (2.2.15) удовлетворяют краевым условиям

$$G_i(-a_i) = G_i(l - a_i) = 0, \quad \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = \frac{dG_i}{dx}(l - a_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (2.2.18),$$

то функция  $V(x)$ , удовлетворяющая представлению (2.2.14), является обобщенным решением дифференциального уравнения (2.2.9), удовлетворяющего краевым условиям (2.2.10).

*Действительно.* Для функции  $V(x)$ , удовлетворяющей представлению (2.2.14), справедливость выполнения краевых условий (2.2.18) непосредственно следует из краевых условий (2.2.10) для функций  $G_i(x)$ ,  $(i = 1, \dots, m)$ .

Аналогичные следствия можно сформулировать для функции  $V(x)$ , удовлетворяющей представлению (2.2.14) и краевым условиям (2.2.11) или (2.2.12). В случае краевых условий (2.2.11) или (2.2.12), функции  $G_i(x)$ ,  $(i = 1, \dots, m)$  должны удовлетворять соответственно следующим краевым условиям

$$G_i(-a_i) = 0, G_i(l - a_i) = 0, \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = 0, \frac{d^2G_i}{dx^2}(l - a_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (2.2.19)$$

и

$$G_i(-a_i) = 0, \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = 0, \frac{d^2G_i}{dx^2}(l - a_i) = 0, \frac{d^3G_i}{dx^3}(l - a_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.2.20)$$

Для нахождения функций  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$ , входящих в (2.2.14) имеем  $m$  краевых задач для уравнения

$$-\omega^2 k G(x) + b \frac{d^4 G(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (2.2.21)$$

с одним из граничных условий (2.2.10), (2.2.11) или (2.2.12), в зависимости от конкретного вида условий, накладываемых в рассматриваемой задаче.

Общее обобщенное решение дифференциального уравнения (1.4.19) в пункте 1.4.2 диссертации было найдено как сумма общего решения однородного уравнения (1.4.19) и некоторого частного решения неоднородного уравнения (1.4.19) в виде

$$\bar{V}(x) = G_0(x) = c_1 S_1(\beta x) + c_2 S_2(\beta x) + c_3 S_3(\beta x) + c_4 S_4(\beta x) + \theta(x) \frac{S_4(\beta x)}{b\beta^3}, \quad (2.2.22)$$

где  $S_1(\beta x), S_2(\beta x), S_3(\beta x), S_4(\beta x)$  – функции Крылова, определяемые соотношениями (1.4.25);  $c_1, c_2, c_3, c_4$  – постоянные интегрирования.

Отметим, для уравнения (2.2.21) общее обобщенное решение также может быть представлено в виде (2.2.22), при этом приняв

$$\beta = \frac{\sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{b}}.$$

Здесь в качестве частного решения неоднородного уравнения (2.2.21) выбрано его фундаментальное решение, найденное в соответствии с утверждением 1.4.1 в виде

$$g(x) = \theta(x) \frac{S_4(\beta x)}{b\beta^3}.$$

Для нахождения обобщенных решений  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  уравнения (2.2.21), удовлетворяющих одному из заданных граничных условий (2.2.10), (2.2.11) или (2.2.12), определим произвольные константы  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , входящие в общее решение (2.2.22) из условий выполнения соответствующих граничных условий.

### 2.2.3. Аналитико-численный метод построения уравнения частот

Пусть в соответствии с изложенным выше найдены обобщенные решения  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  уравнения (2.2.21), удовлетворяющие заданным согласно поставленной задаче краевым условиям.

Далее, принимая в (2.2.14) последовательно значения  $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_m$ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V(a_1), V(a_2), \dots, V(a_m)$

$$(1 + G_j(0)q_j)V(a_j) + \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^m G_i(a_j - a_i)q_i V(a_i) = \sum_{i=1}^m G_i(a_j - a_i)q_i d^i Z, \quad (j = 1, \dots, m). \quad (2.2.23)$$

Используя матричные обозначения, систему (2.2.23) можно записать в виде

$$M\bar{V} = NZ, \quad (2.2.24)$$

где  $M$  – матрица системы размерности  $m \times m$ :

$$M = \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)q_1 & G_2(a_1 - a_2)q_2 & \dots & G_m(a_1 - a_m)q_m \\ G_1(a_2 - a_1)q_1 & 1 + G_2(0)q_2 & \dots & G_m(a_2 - a_m)q_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_1(a_m - a_1)q_1 & G_2(a_m - a_2)q_2 & \dots & 1 + G_m(0)q_m \end{pmatrix},$$

$N$  – матрица размерности  $m \times n$

$$N = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_n^i \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_n^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_n^i \end{pmatrix}.$$

Объединив (2.2.24) с системой (2.2.8), получим систему линейных, однородных алгебраических уравнений относительно вектора амплитуд  $Z$  и  $\bar{V}$

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = 0, \\ NZ - M\bar{V} = 0. \end{cases} \quad (2.2.25)$$

Система (2.2.25) имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю. Приравняв определитель системы (2.2.25) к нулю, получим уравнение для нахождения собственных частот

$$\det \begin{pmatrix} -\omega^2 A + B + CD & -C \\ N & -M \end{pmatrix} = 0. \quad (2.2.26)$$

Отметим, уравнение собственных частот (2.2.26) является трансцендентным, содержащим периодические тригонометрические функции, а также монотонные гиперболические функции, в силу чего появляется бесконечный дискретный набор собственных частот.

*Замечание.* В случае если решение линейной системы алгебраических уравнений (2.2.24) может быть представлено в виде

$$\bar{V} = M^{-1}NZ, \quad (2.2.27)$$

то подставив (2.2.27) в систему (2.2.8), получим систему линейных, однородных алгебраических уравнений относительно вектора амплитуд  $Z$

$$(-\omega^2 A + B + CD - CM^{-1}N) Z = 0. \quad (2.2.28)$$

Приравняв определитель системы (2.2.28) к нулю, получим уравнение собственных частот в виде

$$\det\{-\omega^2 A + B + CD - CM^{-1}N\} = 0. \quad (2.2.29)$$

Рассмотрим простейшую систему с сосредоточенными и распределенными параметрами, описываемую гибридной системой дифференциальных уравнений (1.4.9). При исследовании в параграфе 1.4.2 система (1.4.6) была приведена к виду

$$\begin{cases} \ddot{z} + p^2(z - u(a, t)) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = e(z - u(x, t))\delta(x - a), \end{cases} \quad (2.2.30)$$

где  $p = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ,  $b = \frac{EI}{pF}$ ,  $e = \frac{c}{pF}$ .

На функцию  $u(x, t)$  наложены граничные условия, соответствующие жесткой заделке:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (2.2.31)$$

Для простейшей механической системы с сосредоточенными и распределенными параметрами (2.2.30), входящие в обобщенную математическую модель (2.2.1) соответствующие постоянные и матрицы имеют вид

$$A = 1, \quad C = p^2, \quad B = 0, \quad D = 1, \quad k = 1, \quad q = e, \quad d = 1.$$

Для построения частотного уравнения воспользуемся выражением (2.2.29). Матрицы  $M$  и  $N$ , входящие в (2.2.29) для данной системы имеют вид  $M = (1 + G(0))e$ ,  $N = G(0)e$ .

Таким образом, имеем

$$\det\{-\omega^2 A + B + CD - CM^{-1}N\} = -\omega^2 + p^2 - \frac{p^2 G(0)e}{1 + G(0)e} = 0.$$

Отсюда, учитывая, введенное в параграфе 1.4.2 диссертации обозначение  $\bar{V}(x) = G(x)$ , можем получить частотное уравнение в виде

$$-\omega^2 + \frac{p^2}{1 + \bar{V}(0)e} = 0,$$

что совпадает с уравнением частот (1.4.30), полученным ранее.

## 2.3. Исследование собственных колебаний типовых систем

### 2.3.1. Исследование собственных колебаний механической системы «твердое тело с двумя степенями свободы на балке Эйлера-Бернулли»

Рассмотрим механическую систему, состоящую из массы  $m$ , установленной с помощью двух пружин жесткости  $c_1$  и  $c_2$  на упругом стержне, длины  $l$  (рис. 2.1). Для этой механической системы, полученная в пункте диссертации 2.1.1, система уравнений движения имеет вид (2.1.10)

$$\begin{cases} m\ddot{z} + c_1[z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(a_1, t)] + c_2[z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(a_2, t)] = 0, \\ I_\varphi\ddot{\varphi} - c_1d_1[z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(a_1, t)] + c_2d_2[z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(a_2, t)] = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1[z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(x, t)]\delta(x - a_1) + \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + c_2[z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(x, t)]\delta(x - a_2). \end{cases} \quad (2.3.1)$$

На функцию  $u(x, t)$ , наложим граничные условия, соответствующие жесткой заделке (2.2.31)

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (2.3.2)$$

Будем полагать, что точки крепления упругих элементов удалены на одинаковом расстоянии  $\tilde{z}$  от оси  $Ox'$  системы координат, связанной с телом.

Таким образом, имеем

$$z'_1 = z'_2 = \tilde{z}.$$

Как было отмечено выше, система (2.3.1) является частным случаем обобщенной математической модели (2.2.1). Для системы (2.3.1), входящие в

обобщенную математическую модель (2.2.1) соответствующие переменные, постоянные и матрицы имеют вид

$$z = \begin{pmatrix} z_0 + \tilde{z} \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u(a_1, t) \\ u(a_2, t) \end{pmatrix}, \quad k = \rho F, \quad b = EI, \quad q_1 = c_1, \quad q_2 = c_2, \quad A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\varphi \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_1 d_1 & c_2 d_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -d_1 \\ 1 & d_2 \end{pmatrix}, \quad d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -d_1 \end{pmatrix}, \quad d^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть в соответствии с изложенным выше найдены обобщенные решения  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  уравнения (2.2.21), удовлетворяющие заданным согласно поставленной задаче краевым условиям (2.3.2).

Для системы (2.3.1) матрицы  $M$  и  $N$  соответственно можем записать в виде

$$M = \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)c_1 & G_2(a_1 - a_2)c_2 \\ G_1(a_2 - a_1)c_1 & 1 + G_2(0)c_2 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} G_1(0)c_1 + G_2(a_1 - a_2)c_2 & -G_1(0)c_1 d_1 + G_2(a_1 - a_2)c_2 d_2 \\ G_1(a_2 - a_1)c_1 + G_2(0)c_2 & -G_1(a_2 - a_1)c_1 d_1 + G_2(0)c_2 d_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = 0, \\ NZ - M\bar{V} = 0. \end{cases}$$

Для записи уравнения собственных частот воспользуемся формой записи частотного уравнения (2.2.29)

$$\det \{-\omega^2 A + B + CD - CM^{-1}N\} = 0. \quad (2.3.3)$$

Подставим матрицы  $A, B, C, D, M, N$  в частотное уравнение (2.3.3). Чтобы выражение не получилось слишком большим, введем следующие замены в матрицах  $M$  и  $N$

$$\alpha_1 = 1 + e_1 G_1(0), \quad \alpha_2 = e_1 G_1(a_2 - a_1), \quad \beta_1 = e_2 G_2(a_1 - a_2), \quad \beta_2 = 1 + e_2 G_2(0),$$

$$\mu_1 = G_1(0)c_1 + G_2(a_1 - a_2)c_2, \quad \mu_2 = G_1(a_2 - a_1)c_1 + G_2(0)c_2,$$

$$\nu_1 = -G_1(0)c_1 d_1 + G_2(a_1 - a_2)c_2 d_2, \quad \nu_2 = -G_1(a_2 - a_1)c_1 d_1 + G_2(0)c_2 d_2,$$

тогда матрицы  $M$  и  $N$  примут вид

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, частотное уравнение (2.3.3) запишем следующим образом

$$\det \left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_1 d_1 & c_2 d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -d_1 \\ 1 & d_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_1 d_1 & c_2 d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{pmatrix} \right\} = 0.$$

Найдем произведение матриц  $M^{-1}N$ , для этого вычислим обратную матрицу  $M^{-1}$ .

$$\Delta M = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1, \quad M^{-1} = \frac{1}{\Delta M} \begin{pmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$M^{-1}N = \frac{1}{\Delta M} \begin{pmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta M} \begin{pmatrix} \beta_2 \mu_1 - \beta_1 \mu_2 & \beta_2 \nu_1 - \beta_1 \nu_2 \\ -\alpha_2 \mu_1 + \alpha_1 \mu_2 & -\alpha_2 \nu_1 + \alpha_1 \nu_2 \end{pmatrix}.$$

Для упрощения выражения, опять введем замены следующим образом

$$\alpha = \frac{\mu_1 \beta_2 - \mu_2 \beta_1}{\Delta M}, \quad \gamma = \frac{\nu_1 \beta_2 - \nu_2 \beta_1}{\Delta M}, \quad \mu = \frac{\alpha_1 \mu_2 - \alpha_2 \mu_1}{\Delta M}, \quad \nu = \frac{\alpha_1 \nu_2 - \alpha_2 \nu_1}{\Delta M},$$

тогда  $M^{-1}N = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$  и найдем  $C \cdot M^{-1} \cdot N$

$$C \cdot M^{-1} \cdot N = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_1 d_1 & c_2 d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \alpha + c_2 \mu & c_1 \gamma + c_2 \nu \\ -c_1 d_1 \alpha + c_2 d_2 \mu & -c_1 d_1 \gamma + c_2 d_2 \nu \end{pmatrix}.$$

С учетом вышеизложенного имеем

$$\det \left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_1 d_1 & c_2 d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -d_1 \\ 1 & d_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \alpha + c_2 \mu & c_1 \gamma + c_2 \nu \\ -c_1 d_1 \alpha + c_2 d_2 \mu & -c_1 d_1 \gamma + c_2 d_2 \nu \end{pmatrix} \right\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} -\omega^2 m & 0 \\ 0 & -\omega^2 I_\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_1 d_1 + c_2 d_2 \\ -c_1 d_1 + c_2 d_2 & c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \alpha + c_2 \mu & c_1 \gamma + c_2 \nu \\ -c_1 d_1 \alpha + c_2 d_2 \mu & -c_1 d_1 \gamma + c_2 d_2 \nu \end{pmatrix} \right\} = 0,$$

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} -\omega^2 m + c_1 + c_2 & -c_1 d_1 + c_2 d_2 \\ -c_1 d_1 + c_2 d_2 & -\omega^2 I_\varphi + c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \alpha + c_2 \mu & c_1 \gamma + c_2 \nu \\ -c_1 d_1 \alpha + c_2 d_2 \mu & -c_1 d_1 \gamma + c_2 d_2 \nu \end{pmatrix} \right\} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m + c_1 + c_2 - c_1 \alpha - c_2 \mu & -c_1 d_1 + c_2 d_2 - c_1 \alpha - c_2 \mu \\ -c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_1 d_1 \alpha - c_2 d_2 \mu & -\omega^2 I_\varphi + c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2 + c_1 d_1 \gamma - c_2 d_2 \nu \end{vmatrix} = 0.$$

В итоге получаем окончательное выражение для частотного уравнения механической системы с двумя степенями свободы (рис. 2.1)



$$(-m\omega^2 + c_1 + c_2 - \alpha c_1 - \mu c_2)(-I_\phi \omega^2 + c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2 + c_1 d_1 \gamma - c_2 d_2 \nu) =$$

$$= (-c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_1 d_1 \alpha - c_2 d_2 \mu)(-c_1 d_1 + c_2 d_2 - c_1 \alpha - c_2 \mu). \quad (2.3.4)$$

Для проведения сравнительного анализа, с целью проверки адекватности предлагаемого метода получения собственных частот, был произведен расчет собственных частот согласно уравнению (2.3.4). Для этого были взяты данные из работы [97], в которой для получения собственных частот автором был использован метод допускаемых мод или форм, разработанный в [93]. Полученные им результаты сравнивались с результатами, полученными в работе [101], где авторы использовали аналитико-численно-комбинированный метод (АЧКМ) и метод конечных элементов (МКЭ).

Данные для стержня: модуль упругости  $E = 2,069 \times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , плотность материала стержня  $\rho = 15,3875 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , момент инерции поперечного сечения  $I = 3,0679 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ , длина  $l = 1,0 \text{ m}$ . Для упруго присоединенной упругой системы: масса твердого тела  $m = 1,53875 \text{ kg}$ , момент инерции твердого тела относительно центра масс  $I_\phi = 1,53875 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , жесткость пружин  $c_1 = c_2 = 6,34761 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , координаты точек крепления пружин  $a_1, a_2$  соответственно, расстояния от точек крепления пружин до центра масс  $d_1 = 0,06667 \text{ m}$ ,  $d_2 = 0,13333 \text{ m}$  соответственно.

В таблице 2.3.1 показаны результаты расчета тремя методами, приведенными в работе [97] и предлагаемым подходом. Из таблицы 2.3.1 видно хорошее совпадение полученных результатов.

Таблица 2.3.1 – Сравнительный анализ

| $\omega_i, \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ | Подход Wu, Whittaker [101] | МКЭ       | Подход D. Cha Philip [97] | Предлагаемый подход |
|---|----------------------------|-----------|---------------------------|---------------------|
| $\omega_1$                                  | 273.8904                   | 273.8565  | 273.8892                  | 273.8564            |
| $\omega_2$                                  | 1388.6244                  | 1388.5937 | 1388.6073                 | 1388.5914           |
| $\omega_3$                                  | 2880.5511                  | 2879.7694 | 2880.0323                 | 2879.7628           |
| $\omega_4$                                  | 4222.2172                  | 4221.9181 | 4221.9610                 | 4221.8472           |
| $\omega_5$                                  | 7837.1068                  | 7837.4548 | 7836.9696                 | 7836.9522           |

### 2.3.2. Исследование собственных колебаний механической системы «балка Эйлера-Бернулли с горизонтально расположенными твердыми телами»

Рассмотрим механическую систему, представленную на рисунке 2.4.

Движение указанной системы описывается гибридной системой дифференциальных уравнений (2.1.22)

$$\begin{cases} m_i \ddot{z}_i + c_i (z_i - u(a_i, t)) = 0, & (i = 1, 2, 3, \dots, n), \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{i=1}^n c_i (z_i - u(x, t)) \delta(x - a_i). \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Поделив обе части первых  $n$  уравнений соответственно на  $m_i$ , последнее на  $\rho F$ , получим систему

$$\begin{cases} \ddot{z}_i + p_i^2 (z_i - u(a_i, t)) = 0, & (i = 1, 2, 3, \dots, n), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{i=1}^n e_i (z_i - u(x, t)) \delta(x - a_i). \end{cases} \quad (2.3.6)$$

где  $p_i = \sqrt{\frac{c_i}{m_i}}$ ,  $e_i = \frac{c_i}{\rho F}$ ,  $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ ,  $b = \frac{EI}{\rho F}$ .

На  $u(x, t)$  наложены граничные условия (2.3.2):

Система (2.3.6) так же является частным случаем обобщенной математической модели (2.2.1). Для системы (2.3.6), входящие в обобщенную математическую модель (2.2.1) соответствующие переменные, постоянные и матрицы имеют вид  $k = 1$ ,  $q_i = e_i$ ,  $(i = 1, 2 \dots n)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} p_1^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_n^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad d^m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть в соответствии с изложенным выше найдены обобщенные решения  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  уравнения (2.2.21), удовлетворяющие заданным согласно поставленной задаче краевым условиям (2.3.2).

Для системы (2.3.6) матрицы  $M$  и  $N$ , соответственно можем записать в виде

$$M = \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 \dots \dots G_m(a_1 - a_m)e_m \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + G_2(0)e_2 \dots \dots G_m(a_2 - a_m)e_m \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ G_1(a_m - a_1)e_1 & G_2(a_m - a_2)e_2 \dots \dots 1 + G_m(0)e_m \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & \dots & G_m(a_1 - a_m)e_m \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & G_2(0)e_2 & \dots & G_m(a_2 - a_m)e_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_1(a_m - a_1)e_1 & G_2(a_m - a_2)e_2 & \dots & G_m(0)e_m \end{pmatrix}.$$

Для записи уравнения собственных частот воспользуемся формой записи частотного уравнения (2.3.3).

Подставим матрицы  $A, B, C, D, M, N$  в частотное уравнение (2.3.3).

$$\det \left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_n^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_n^2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\cdot \left. \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 \dots G_m(a_1 - a_m)e_m \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + G_2(0)e_2 \dots G_m(a_2 - a_m)e_m \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ G_1(a_m - a_1)e_1 & G_2(a_m - a_2)e_2 \dots 1 + G_m(0)e_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 \dots G_m(a_1 - a_m)e_m \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & G_2(0)e_2 \dots G_m(a_2 - a_m)e_m \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ G_1(a_m - a_1)e_1 & G_2(a_m - a_2)e_2 \dots G_m(0)e_m \end{pmatrix} \right\} = 0,$$

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} -\omega^2 + p_1^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\omega^2 + p_n^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_n^2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 \dots G_m(a_1 - a_m)e_m \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + G_2(0)e_2 \dots G_m(a_2 - a_m)e_m \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ G_1(a_m - a_1)e_1 & G_2(a_m - a_2)e_2 \dots 1 + G_m(0)e_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 \dots G_m(a_1 - a_m)e_m \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & G_2(0)e_2 \dots G_m(a_2 - a_m)e_m \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ G_1(a_m - a_1)e_1 & G_2(a_m - a_2)e_2 \dots G_m(0)e_m \end{pmatrix} \right\} = 0.$$

В частности, в случае механической системы «упругий стержень с двумя горизонтально расположенными упруго-присоединенными массами» (рис. 2.2) уравнение движения, которого имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + p_1^2 (z_1 - u(a_1, t)) = 0, \\ \ddot{z}_2 + p_2^2 (z_2 - u(a_2, t)) = 0, \\ \frac{d^2 u}{dt^2} + b \frac{d^4 u}{dt^4} = \sum_{i=1}^2 e_i (z_i - u(x, t)) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (2.3.7)$$

где  $p_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$ ,  $p_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$ ,  $b = \frac{EI}{\rho F}$ ,  $e_1 = \frac{c_1}{\rho F}$ ,  $e_2 = \frac{c_2}{\rho F}$  соответствующие пере-

менные, постоянные и матрицы запишутся в виде

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} p_1^2 & 0 \\ 0 & p_2^2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k = 1, q_1 = e_1, q_2 = e_2, \\ d^1 = (1 \ 0), d^2 = (0 \ 1).$$

А матрицы  $M$  и  $N$ , соответственно можем представить в виде

$$M = \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + G_2(0)e_2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & G_2(0)e_2 \end{pmatrix}.$$

Подставим матрицы  $A, B, C, D, M, N$  в частотное уравнение (2.3.3).

Чтобы частотное уравнение не получилось слишком большим, введем следующие обозначения в матрицах  $M$  и  $N$

$$\alpha_1 = 1 + e_1 G_1(0), \alpha_2 = e_1 G_1(a_2 - a_1), \beta_1 = e_2 G_2(a_1 - a_2), \beta_2 = 1 + e_2 G_2(0), \\ \mu_1 = G_1(0)e_1, \mu_2 = G_2(0)e_2,$$

тогда матрицы  $M$  и  $N$  примут вид

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} \mu_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, частотное уравнение (2.3.3) можно записать следующим образом

$$\det \left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^2 & 0 \\ 0 & p_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1^2 & 0 \\ 0 & p_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \mu_2 \end{pmatrix} \right\} = 0,$$

Найдем произведение матриц  $M^{-1}N$ , для этого вычислим обратную матрицу  $M^{-1}$ .

$$\Delta M = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1, M^{-1} = \frac{1}{\Delta M} \begin{pmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$M^{-1}N = \frac{1}{\Delta M} \begin{pmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \mu_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta M} \begin{pmatrix} \beta_2 \mu_1 - \beta_1 \alpha_2 & \beta_2 \beta_1 - \beta_1 \mu_2 \\ -\alpha_2 \mu_1 + \alpha_1 \alpha_2 & -\alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \mu_2 \end{pmatrix}$$

Для упрощения выражения введем замены следующим образом

$$\alpha = \frac{\beta_2 \mu_1 - \beta_1 \alpha_2}{\Delta M}, \gamma = \frac{\beta_2 \beta_1 - \beta_1 \mu_2}{\Delta M}, \mu = \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \mu_1}{\Delta M}, \nu = \frac{\alpha_1 \mu_2 - \alpha_2 \beta_1}{\Delta M},$$

тогда  $M^{-1}N = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$  и найдем  $C \cdot M^{-1} \cdot N$

$$C \cdot M^{-1} \cdot N = \begin{pmatrix} p_1^2 & 0 \\ 0 & p_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^2 \alpha & p_1^2 \gamma \\ p_2^2 \mu & p_2^2 \nu \end{pmatrix}.$$

С учетом вышеизложенного, имеем

$$\begin{aligned} \det \left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^2 & 0 \\ 0 & p_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1^2 \alpha & p_1^2 \gamma \\ p_2^2 \mu & p_2^2 \nu \end{pmatrix} \right\} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \det \left\{ \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^2 & 0 \\ 0 & p_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1^2 \alpha & p_1^2 \gamma \\ p_2^2 \mu & p_2^2 \nu \end{pmatrix} \right\} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \det \left\{ \begin{pmatrix} -\omega^2 + p_1^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 + p_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1^2 \alpha & p_1^2 \gamma \\ p_2^2 \mu & p_2^2 \nu \end{pmatrix} \right\} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\omega^2 + p_1^2 - p_1^2 \alpha & -p_1^2 \gamma \\ -p_2^2 \mu & -\omega^2 + p_2^2 - p_2^2 \nu \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Получаем окончательное выражение для частотного уравнения механической системы «упругий стержень с двумя горизонтально расположенными упруго-присоединенными массами» (рис. 2.2)

$$(-\omega^2 + p_1^2 - p_1^2 \alpha)(-\omega^2 + p_2^2 - p_2^2 \nu) = p_1^2 \gamma p_2^2 \mu. \quad (2.3.8)$$

Аналогично для механической системы «упругий стержень с тремя горизонтально расположенными упруго-присоединенными массами» частотное уравнение примет вид

$$\begin{vmatrix} p_1^2 - \omega^2 - p_1^2 \beta_{11} & -p_1^2 \beta_{12} & -p_1^2 \beta_{13} \\ -p_2^2 \beta_{21} & p_2^2 - \omega^2 - p_2^2 \beta_{22} & -p_2^2 \beta_{23} \\ -p_3^2 \beta_{31} & -p_3^2 \beta_{32} & p_3^2 - \omega^2 - p_3^2 \beta_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.3.9)$$

где

$$\beta_{11} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + G_2(0)e_2 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + G_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_2(0)e_2 & 1 + G_2(0)e_2 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_2(a_3 - a_2)e_2 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + G_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{13} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} G_3(a_1 - a_3)e_3 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_3(a_2 - a_3)e_3 & 1 + G_2(0)e_2 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_3(0)e_3 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + G_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_1(0)e_1 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & G_1(a_2 - a_1)e_1 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_1(a_3 - a_1)e_1 & 1 + G_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & G_2(0)e_2 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + G_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{23} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_3(a_1 - a_3)e_3 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & G_3(a_2 - a_3)e_3 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_3(0)e_3 & 1 + G_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{31} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_1(0)e_1 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + G_2(0)e_2 & G_1(a_2 - a_1)e_1 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & G_1(a_3 - a_1)e_1 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{32} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_2(a_1 - a_2)e_2 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + G_2(0)e_2 & G_2(0)e_2 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & G_2(a_3 - a_2)e_2 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{33} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + G_2(0)e_2 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & G_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + G_2(0)e_2 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + G_3(0)e_3 \end{vmatrix}.$$

### 2.3.3. Исследование собственных колебаний механической системы «балка Эйлера-Бернулли с вертикально расположенными твёрдыми телами»

Рассмотрим механическую систему, представленную на рисунке 2.7.

Движение указанной системы описывается гибридной системой дифференциальных уравнений (2.1.30)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1(z_1 - u(a, t)) - c_2(z_2 - z_1) = 0, \\ m_i \ddot{z}_i + c_i(z_i - z_{i-1}) - c_{i+1}(z_{i+1} - z_i) = 0, \quad (i = 2, \dots, n-1), \\ m_n \ddot{z}_n + c_n(z_n - z_{n-1}) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1(z_1 - u(x, t)) \delta(x - a). \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Поделив обе части первого уравнения на  $m_1$ , второго на  $m_i$ , третьего на  $m_n$ , а четвертого на  $\rho F$  получим

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + p_1^2(z_1 - u(a, t)) - p_{21}^2(z_2 - z_1) = 0, \\ \ddot{z}_i + p_i^2(z_i - z_{i-1}) - p_{i+1}^2(z_{i+1} - z_i) = 0, \quad (i = 2, \dots, n-1), \\ \ddot{z}_n + p_n^2(z_n - z_{n-1}) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = e_1(z_1 - u(x, t)) \delta(x - a). \end{cases} \quad (2.3.10)$$

где  $p_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$ ,  $p_{i+1} = \sqrt{\frac{c_{i+1}}{m_i}}$ ,  $(i = 2, \dots, n-1)$ ,  $b = \frac{EI}{\rho F}$ ,  $e_1 = \frac{c_1}{\rho F}$ . На  $u(x, t)$  наложены граничные условия (2.3.2).

Система (2.3.10) так же является частным случаем обобщенной математической модели (2.2.1). Для системы (2.3.10), входящие в обобщенную математическую модель (2.2.1) соответствующие переменные, постоянные и матрицы имеют вид  $k = 1$ ,  $q_1 = e_1$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} p_1^2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, D = (1 \dots 0), d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, d^m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} p_{21}^2 & -p_{21}^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -p_{21}^2 & p_2^2 + p_{32}^2 & -p_{32}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{32}^2 & p_{32}^2 + p_{43}^2 & -p_{43}^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -p_{n-1}^2 & p_{n-1}^2 + p_{n,n-1}^2 & -p_{n,n-1}^2 \end{pmatrix}.$$

Пусть в соответствии с изложенным выше найдены обобщенные решения  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  уравнения (2.2.21), удовлетворяющие заданным согласно поставленной задаче краевым условиям (2.3.2).

Для системы (2.3.10) матрицы  $M$  и  $N$ , соответственно можем записать в виде

$$M = \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} G_1(0)e_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для записи уравнения собственных частот воспользуемся формулой частотного уравнения (2.3.3).

Подставим матрицы  $A, C, D, M, N$  в частотное уравнение (2.3.3), а матрицу  $B$  подставлять не станем, т.к. выражение получится слишком громоздким.

$$\det \left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + B + \begin{pmatrix} p_1^2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (1 \cdots 0) - \begin{pmatrix} p_1^2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_1(0)e_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} = 0.$$

В частности, в случае механической системы «упругий стержень с двумя вертикально расположенными упруго-присоединенными массами» (рис. 2.5), уравнение движения которого имеет вид

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 (z_1 - u(a, t)) - c_2 (z_2 - z_1) = 0, \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2 (z_2 - z_1) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1 (z_1 - u(x, t)) \delta(x - a). \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Поделив обе части первого уравнения на  $m_1$ , второго на  $m_2$ , а третьего



на  $\rho F$ , получим систему:

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + p_1^2(z_1 - u(a, t)) - p_{21}^2(z_2 - z_1) = 0, \\ \ddot{z}_2 + p_2^2(z_2 - z_1) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = e_1(z_1 - u(x, t))\delta(x - a). \end{cases} \quad (2.3.12)$$

где  $p_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$ ,  $p_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$ ,  $p_{21} = \sqrt{\frac{c_2}{m_1}}$ ,  $b = \frac{EI}{\rho F}$ ,  $e_1 = \frac{c_1}{\rho F}$ . На  $u(x, t)$  наложены граничные условия (2.3.2).

Система (2.3.12) является частным случаем обобщенной математической модели (2.2.1). Для системы (2.3.12), входящие в обобщенную математическую модель (2.2.1) соответствующие переменные, постоянные и матрицы

имеют вид  $k=1$ ,  $q_1=e$ ,  $d^1=(1 \ 0)$ ,  $C=\begin{pmatrix} p_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D=(1 \ 0)$ ,

$$B=\begin{pmatrix} p_{21}^2 & -p_{21}^2 \\ -p_2^2 & p_2^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(t)=\begin{pmatrix} u(a_1, t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть найдены обобщенные решения  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  уравнения (2.2.21), удовлетворяющие заданным согласно поставленной задаче краевым условиям (2.3.2).

А матрицы  $M$  и  $N$ , соответственно можем представить в виде

$$M=\begin{pmatrix} 1+G(0)e_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} G(0)e_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставим матрицы  $A, B, C, D, M, N$  в частотное уравнение (2.3.3).

Таким образом, имеем

$$\det \left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{21}^2 & -p_{21}^2 \\ -p_2^2 & p_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) - \begin{pmatrix} p_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{G(0)e_1}{1+G(0)e_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = 0,$$

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{21}^2 & -p_{21}^2 \\ -p_2^2 & p_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{p_1^2 G(0)e_1}{1+G(0)e_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = 0,$$

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} -\omega^2 + p_{21}^2 & -p_{21}^2 \\ -p_2^2 & -\omega^2 + p_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^2 - \frac{p_1^2 G(0)e_1}{1 + G(0)e_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + p_{21}^2 + p_1^2 - \frac{p_1^2 G(0)e_1}{1 + G(0)e_1} & -p_{21}^2 \\ -p_2^2 & -\omega^2 + p_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

Таким образом, частотное уравнение механической системы «упругий стержень с двумя вертикально расположенными упруго-присоединенными массами» (рис. 2.5) запишется в следующем виде

$$\left( -\omega^2 + p_{21}^2 + p_1^2 - \frac{p_1^2 G(0)e_1}{1 + G(0)e_1} \right) (-\omega^2 + p_2^2) = p_{21}^2 p_2^2. \quad (2.3.13)$$

Аналогично для механической системы «упругий стержень с тремя вертикально расположенными упруго-присоединенными массами» частотное уравнение запишется в виде

$$\left( \frac{p_1^2}{1 + G(0)e_1} - p^2 + p_{21}^2 \right) (p_2^2 p_3^2 - p^2 (p^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_{32}^2)) + p_{21}^2 p_2^2 (p^2 - p_3^2) = 0. \quad (2.3.14)$$

## Выводы по главе

1. На основе построения и анализа систем гибридных дифференциальных уравнений, описывающих динамику различных типовых механических систем, была предложена обобщенная математическая модель взаимосвязанной системы твердых тел, соединенных с балкой Эйлера-Бернулли (2.2.1).

2. Для данной обобщенной математической модели произведены необходимые теоретические исследования, связанные с разработкой единого аналитико-численного метода построения частотного уравнения систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных к балке Эйлера-Бернулли.

3. Был произведен сравнительный анализ расчетов по разработанному методу исследования собственных частот с расчетами, приведенными в литературных источниках, который показал хорошее совпадение полученных результатов (табл. 2.3.1).

4. На основе единого аналитико-численного метода построения частотного уравнения, разработано алгоритмическое обеспечение для расчета собственных частот балки Эйлера-Бернулли с прикрепленными твердыми телами, которое программно реализовано. Программа написана на языке программирования Fortran в соавторстве с В.В. Гармаевой (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [67]).

## ГЛАВА 3. РАЗВИТИЕ МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЙ

### 3.1. Учет демпфирующих свойств упругих связей в обобщенной математической модели

В данном параграфе с учетом демпфирования в упругих связях в обобщенной математической модели механических систем, представляющих собой балку Эйлера-Бернулли с закрепленными краями и прикрепленными на ней с помощью упругих связей системой твердых тел, предлагается обобщение аналитико-численного метода исследования свободных колебаний. Отметим, учет демпфирования в упругих связях при исследовании собственных колебаний, для конкретных расчетных схем – балка с упруго прикрепленными твердыми телами был произведен в работах [68], [104].

#### 3.1.1. Обобщенная математическая модель с учетом демпфирующих свойств

Для учета демпфирующих свойств упругих связей, как это было отмечено в пункте 1.4.1 диссертации, при нахождении уравнений движения можно воспользоваться вариационным принципом Гамильтона, который в данном случае может быть записан в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta(T - U) + \delta'W) dt = 0 \quad (3.1.1)$$

где  $\delta'W$  – виртуальная работа неконсервативных сил (сил трения).

Отметим, в механике силы вязкого трения упругих связей  $F_{tr}$  считают пропорциональными их скорости линейной деформации, при этом виртуальная работа сил трения определится выражением [2]

$$\delta'W = F_{tr} \Delta \varepsilon,$$

где  $\Delta \varepsilon$  – линейная деформация упругих связей.

Вывод уравнений движения на основании принципа Гамильтона (3.1.1) приведет к появлению в гибридной системе дифференциальных уравнений (2.2.1) дополнительных слагаемых, соответствующих силам трения.

Например, в случае системы «твердое тело с двумя степенями свободы на балке Эйлера-Бернулли», сила вязкого трения определяется по формуле

$$F_{tr} = -b_1 \left[ \dot{z}_0 - d_1 \dot{\varphi} - \frac{\partial u(a_1, t)}{\partial t} \right] - b_2 \left[ \dot{z}_0 + d_2 \dot{\varphi} - \frac{\partial u(a_2, t)}{\partial t} \right],$$

где  $b_1, b_2$  – коэффициенты демпфирования пружин.

В соответствии с этим, виртуальную работу сил трения можем записать в виде

$$\begin{aligned} \delta'W = & -b_1 \left[ \dot{z}_0 - d_1 \dot{\varphi} - \frac{\partial u(a_1, t)}{\partial t} \right] (\delta z_0 - d_1 \delta \varphi - \delta u(a_1, t)) - \\ & - b_2 \left[ \dot{z}_0 + d_2 \dot{\varphi} - \frac{\partial u(a_2, t)}{\partial t} \right] (\delta z_0 + d_2 \delta \varphi - \delta u(a_2, t)). \end{aligned}$$

Таким образом, система гибридных дифференциальных уравнений (2.1.10) с учетом демпфирующих свойств упругих связей примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & m\ddot{z}_0 + c_1 [z_0 + z'_1 - d_1 \varphi - u(a_1, t)] + c_2 [z_0 + z'_2 + d_2 \varphi - u(a_2, t)] + \\ & + b_1 \left[ \dot{z}_0 - d_1 \dot{\varphi} - \frac{\partial u(a_1, t)}{\partial t} \right] + b_2 \left[ \dot{z}_0 + d_2 \dot{\varphi} - \frac{\partial u(a_2, t)}{\partial t} \right] = 0, \\ & I_\varphi \ddot{\varphi} - c_1 d_1 [z_0 + z'_1 - d_1 \varphi - u(a_1, t)] + c_2 d_2 [z_0 + z'_2 + d_2 \varphi - u(a_2, t)] + \\ & + b_1 d_1 \left[ \dot{z}_0 - d_1 \dot{\varphi} - \frac{\partial u(a_1, t)}{\partial t} \right] + b_2 d_2 \left[ \dot{z}_0 + d_2 \dot{\varphi} - \frac{\partial u(a_2, t)}{\partial t} \right] = 0, \\ & \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \left( c_1 [z_0 + z'_1 - d_1 \varphi - u(x, t)] + b_1 \left[ \dot{z}_0 - d_1 \dot{\varphi} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] \right) \delta(x - a_1) + \\ & + \left( c_2 [z_0 + z'_2 + d_2 \varphi - u(x, t)] + b_2 \left[ \dot{z}_0 + d_2 \dot{\varphi} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] \right) \delta(x - a_2), \end{aligned} \right.$$

где  $b_1, b_2$  – коэффициенты демпфирования.

В случае

$$\left\{ \begin{aligned} & m_i \ddot{z}_i + c_i (z_i - u(a_i, t)) + b_i \left( \dot{z}_i - \frac{\partial u(a_i, t)}{\partial t} \right) = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n), \\ & \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{i=1}^n \left[ c_i (z_i - u(x, t)) + b_i \left( \dot{z}_i - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right) \right] \delta(x - a_i). \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1(z_1 - u(a, t)) - c_2(z_2 - z_1) + b_1 \left( \dot{z}_1 - \frac{\partial u(a, t)}{\partial t} \right) - b_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) = 0, \\ m_i \ddot{z}_i + c_i(z_i - z_{i-1}) - c_{i+1}(z_{i+1} - z_i) + b_i(\dot{z}_i - \dot{z}_{i-1}) - b_{i+1}(\dot{z}_{i+1} - \dot{z}_i) = 0, \quad (i = 2, \dots, n-1), \\ m_n \ddot{z}_n + c_n(z_n - z_{n-1}) + b_n(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1}) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \left[ c_1(z_1 - u(x, t)) + b_1 \left( \dot{z}_1 - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right) \right] \delta(x - a). \end{cases}$$

Учет демпфирования в упругих связях в обобщенной математической модели (2.2.1), приводит к общей математической модели механических систем, представляющих собой балку Эйлера-Бернулли с закрепленными краями и прикрепленной на ней с помощью упругодемпфирующих связей системой твердых тел, соединенных между собой упругодемпфирующими связями, которая описывается следующей гибридной системой дифференциальных уравнений [68]

$$\begin{cases} A\ddot{z} + C_1 z + C_2(Dz - \bar{u}) + B_1 \dot{z} + B_2(D\dot{z} - \dot{\bar{u}}) = 0, \\ k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) = \sum_{i=1}^m \left( q_i(d^{iT} z(t) - u(x, t)) + p_i(d^{iT} \dot{z} - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)) \right) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (3.1.2)$$

где  $z(t)$  –  $n$ -мерная вектор-функция;  $u(x, t)$  – скалярная функция;  $\bar{u}(t)$  –  $m$ -мерная вектор-функция с компонентами  $u(a_1, t), \dots, u(a_m, t)$ ;  $A, B_1, C_1$  – заданные, постоянные  $n \times n$  – матрицы;  $B_2, C_2$  – заданная, постоянная  $n \times m$ -матрица;  $D$  – заданная, постоянная  $m \times n$ - матрица;  $d^i$  –  $n$ -мерный вектор, составленный из  $i$ -ой строки матрицы  $D$ ;  $k, b, a_i, q_i, p_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные постоянные, причем  $0 \leq a_i \leq l$ ;  $(\cdot)^T$  – здесь и ниже операция транспонирования.

На функцию  $u(x, t)$  в зависимости от условий, накладываемых на правый и левый конец балки, задаются те или иные граничные условия. Например, рассмотрим условия, рассматриваемые в пункте 2.2.1 диссертационной работы (2.2.2)-(2.2.4).

Решение гибридной системы дифференциальных уравнений (3.1.2) следует понимать в обобщенном смысле. В связи с этим введем понятие

обобщенного решения гибридной системы дифференциальных уравнений (3.1.2), удовлетворяющей тем или иным граничным условиям.

Для этого рассмотрим множество вектор-функций (2.2.5)

$$K = \left\{ (y(\cdot), v(\cdot, \cdot))^T : y(\cdot) \in C_{\infty, [0, T]}^n, v(\cdot, \cdot) \in C_{\infty, \infty, D} \right\}, \quad (3.1.3)$$

где  $D = \{(x, t) \in R^2 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  – прямоугольник. Вектор-функции из множества (3.1.3) также как и в пункте 2.2.1 диссертационной работы назовем основными.

Отметим, в случае рассмотрения краевой задачи для механических систем, представляющих собой балку Эйлера-Бернулли с закрепленными краями и прикрепленной на ней с помощью упругодемпфирующих связей системой твердых тел, соединенных между собой упругодемпфирующими связями, класс основных функций можно трактовать как допустимые вариации обобщенных координат в принципе Гамильтона.

*Определение 3.1.1.* Вектор-функцию  $z(\cdot) \in C_{2, [0, T]}^n$ , скалярную функцию  $u(\cdot, \cdot) \in C_{4, 2, D}$  назовем обобщенным решением краевой задачи для гибридной системы дифференциальных уравнений (3.1.2), если функция  $u(x, t)$  удовлетворяет граничным условиям краевой задачи и для любой основной вектор-функции  $(y(\cdot), v(\cdot, \cdot))^T \in K$  имеет место тождество

$$\int_0^T \left( A\dot{z} + C_1 z + C_2 (Dz - \bar{u}) + B_1 \dot{z} + B_2 (D\dot{z} - \dot{\bar{u}}), y(t) \right) dt + \iint_D \left( k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) - \sum_{i=1}^m \left( q_i (d^{iT} z(t) - u(x, t)) + p_i (d^{iT} \dot{z} - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)) \right) \delta(x - a_i) \right) \cdot v(x, t) dx dt = 0.$$

Для системы, описываемой гибридной системой дифференциальных уравнений (3.1.2), произведем обобщения аналитико-численного метода построения частотного уравнения [68].

### 3.1.2. Обобщение аналитико-численного метода

Применив замену в системе (3.1.2) функции  $z(t)$ ,  $u(x,t)$  в виде

$$z(t) = Z e^{\lambda t}, \quad u(x,t) = V(x) e^{\lambda t},$$

где  $\lambda$  – собственная комплексная частота,  $Z$  –  $n$ -мерный вектор амплитуд колебаний масс,  $V(x)$  – амплитуда колебаний точек упругого стержня, после преобразований получим

$$(\lambda^2 A + C_1 + C_2 D + \lambda(B_1 + B_2 D))Z - (C_2 + \lambda B_2)\bar{V} = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\lambda^2 k V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \sum_{i=1}^m \left( q_i (d^{iT} Z - V(x)) + \lambda p_i (d^{iT} Z - V(x)) \right) \delta(x - a_i), \quad (3.1.5)$$

где  $\bar{V}$  –  $m$ -мерный вектор с компонентами  $V(a_1), \dots, V(a_m)$ .

В силу граничных условий накладываемых на функцию  $u(x,t)$  вида (2.2.2)-(2.2.4) функция  $V(x)$  должна удовлетворять условиям (2.2.10)-(2.2.12) соответственно.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для алгебраическо-дифференциальной системы (3.1.4)-(3.1.5) с одним из граничных условий (2.2.10), (2.2.11) или (2.2.12).

*Определение 3.1.2.* Функцию  $V(\cdot) \in C_{4,[0,T]}$  и вектор  $Z \in R^n$  назовем обобщенным решением вспомогательной краевой задачи (3.1.4)-(3.1.5), если они удовлетворяют системе алгебраических уравнений (3.1.4), функция  $V(x)$  удовлетворяет заданному граничному условию и для любой компоненты  $v(\cdot, \cdot)$  основной вектор-функции  $(y(\cdot), v(\cdot, \cdot))^T \in K$ , при любом  $t \in [0, T]$  имеет место следующее тождество

$$\int_0^l \left( \lambda^2 k V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} - \sum_{i=1}^m \left( q_i (d^{iT} Z - V(x)) + \lambda p_i (d^{iT} Z - V(x)) \right) \delta(x - a_i) \right) \cdot v(x, t) dx = 0.$$

*Теорема 3.1.1.* При любых значениях  $\lambda$  и  $Z$  для обобщенного решения  $V(x)$  дифференциального уравнения (3.1.5) справедливо представление



$$V(x) = \sum_{i=1}^m G_i(x - a_i) \left( q_i(d^{iT} Z - V(a_i)) + \lambda p_i(d^{iT} Z - V(a_i)) \right) \quad (3.1.6)$$

где функции  $G_i(x)$ ,  $(i = 1, \dots, m)$  обобщенные решения уравнения

$$\lambda^2 k G_i(x) + b \frac{d^4 G_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.1.7)$$

*Доказательство:* Отметим, если функция  $V(x)$  обобщенное решение дифференциального уравнения (3.1.5), то для любой компоненты  $v(\cdot, \cdot)$  основной вектор-функции  $(y(\cdot), v(\cdot, \cdot)) \in K$ , при любом  $t \in [0, T]$  справедливо тождество

$$\int_0^l \left( \lambda^2 k V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} \right) \cdot v(x, t) dx = \sum_{i=1}^n \left[ \left( q_i(d^{iT} Z_1 - V(a_i)) + \lambda p_i(d^{iT} Z_2 - V(a_i)) \right) v(a_i, t) \right]. \quad (3.1.8)$$

В том, что для обобщенного решения дифференциального уравнения (3.1.5) справедливо представление (3.1.6) убедимся непосредственной подстановкой (3.1.6) в левую часть (3.1.8).

Для этого представим (3.1.6) в виде

$$V(x) = \sum_{i=1}^m \int_0^l G_i(x - \xi) \left( q_i(d^{iT} Z - V(\xi)) + \lambda p_i(d^{iT} Z - V(\xi)) \right) \cdot \delta(\xi - a_i) d\xi. \quad (3.1.9)$$

Подставим (3.1.9), в левую часть соотношения (3.1.8). Далее, меняя порядок интегрирования и учитывая (3.1.7), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ \left( k \lambda^2 G_i(x - \xi) + b \frac{d^4 G_i(x - \xi)}{dx^4} \right) \left( q_i(d^{iT} Z - V(\xi)) + \lambda p_i(d^{iT} Z - V(\xi)) \right) \delta(\xi - a_i) \right] d\xi \right\} \cdot v(x, t) dx = \\ & = \sum_{i=1}^m \int_0^l \left[ \left( q_i(d^{iT} Z - V(\xi)) + \lambda p_i(d^{iT} Z - V(\xi)) \right) \delta(\xi - a_i) \cdot \int_0^l \left( k \lambda^2 G_i(x - \xi) + b \frac{d^4 G_i(x - \xi)}{dx^4} \right) v(x, t) dx \right] d\xi = \\ & = \sum_{i=1}^m \int_0^l \left[ \left( q_i(d^{iT} Z - V(\xi)) + \lambda p_i(d^{iT} Z - V(\xi)) \right) \delta(\xi - a_i) \cdot \int_0^l v(x, t) \delta(x - \xi) dx \right] d\xi + \\ & = \sum_{i=1}^m \int_0^l \left[ \left( q_i(d^{iT} Z - V(\xi)) + \lambda p_i(d^{iT} Z - V(\xi)) \right) v(\xi, t) \delta(\xi - a_i) \right] d\xi = \\ & = \sum_{i=1}^n \left[ \left( q_i(d^{iT} Z - V(\xi)) + \lambda p_i(d^{iT} Z - V(\xi)) \right) v(a_i, t) \right], \end{aligned}$$

что, совпадает с правой частью (3.1.8).

Таким образом, для обобщенного решения  $V(x)$  дифференциального уравнения (3.1.5) справедливо представление (3.1.6). *Теорема доказана.*

*Следствие 3.1.1.* Если обобщенные решения  $G_i(x)$ ,  $(i=1, \dots, m)$  уравнения (3.1.7) удовлетворяют краевым условиям

$$G_i(-a_i) = G_i(l - a_i) = 0, \quad \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = \frac{dG_i}{dx}(l - a_i) = 0, \quad (i=1, \dots, m), \quad (3.1.10)$$

то функция  $V(x)$ , удовлетворяющая (3.1.6), является обобщенным решением дифференциального уравнения (3.1.5), удовлетворяющего краевым условиям (2.2.10).

Действительно. Для функции  $V(x)$ , удовлетворяющей представлению (3.1.6), справедливость выполнения краевых условий (2.2.10) непосредственно следует из краевых условий (3.1.10) для функций  $G_i(x)$ ,  $(i=1, \dots, m)$ .

Аналогичные следствия можно сформулировать для функции  $V(x)$ , удовлетворяющей представлению (3.1.6), удовлетворяющей краевым условиям (2.2.11) или (2.2.12). В случае краевых условий (2.2.11) или (2.2.12), функции  $G_i(x)$ ,  $(i=1, \dots, m)$  должны удовлетворять соответственно следующим краевым условиям

$$G_i(-a_i) = 0, \quad G_i(l - a_i) = 0, \quad \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = 0, \quad \frac{d^2G_i}{dx^2}(l - a_i) = 0, \quad (i=1, \dots, m), \quad (3.1.11)$$

и

$$G_i(-a_i) = 0, \quad \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = 0, \quad \frac{d^2G_i}{dx^2}(l - a_i) = 0, \quad \frac{d^3G_i}{dx^3}(l - a_i) = 0, \quad (i=1, \dots, m). \quad (3.1.12)$$

Для нахождения функций  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$ , входящих в (3.1.6) имеем  $m$  краевых задач для уравнения

$$\lambda^2 k G(x) + b \frac{d^4 G(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (3.1.13)$$

с теми или иными, в зависимости от поставленной задачи, краевыми условиями (3.1.10), (3.1.11) или (3.1.12).

Общее решение  $G(x)$  уравнения (3.1.13) можно найти в виде суммы общего обобщенного решения  $G_0(x)$  однородного уравнения

$$\lambda^2 k G(x) + b \frac{d^4 G(x)}{dx^4} = 0, \quad (3.1.14)$$

и некоторого обобщенного решения  $\tilde{G}(x)$  неоднородного уравнения (3.1.13), то есть

$$G(x) = G_0(x) + \tilde{G}(x). \quad (3.1.15)$$

Общее решение  $G_0(x)$  однородного уравнения (3.1.14) можно записать в виде

$$G_0(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + c_3 e^{k_3 x} + c_4 e^{k_4 x},$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  – произвольные постоянные;  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – корни характеристического уравнения, которые определяются следующим образом

$$k_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) m, \quad k_2 = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) m, \quad k_3 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) m, \quad k_4 = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) m.$$

Здесь  $m^4 = \frac{\lambda^2 k}{b}$ . Отметим, что выражение для обобщенного решения  $G_0(x)$

определяет общее комплексное решение уравнения (3.1.14).

В качестве частного решения неоднородного уравнения (3.1.13) выберем его фундаментальное решение, которое может быть найдено в соответствии с теоремой 1.2.1.

Для этого найдя решение однородного уравнения (3.1.14)  $f(x)$ , удовлетворяющее условиям

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = \frac{1}{b}, \quad (3.1.16)$$

затем запишем частное решение неоднородного уравнения (3.1.13) в виде

$$G(x) = \theta(x) f(x),$$

где  $\theta(x)$  – функция Хэвисайда.

Отметим, решение однородного уравнения (3.1.14), удовлетворяющее условиям (3.1.16) найдется в виде

$$f(x) = \alpha_1 (e^{k_2 x} - e^{k_1 x}) + \alpha_2 (e^{k_3 x} - e^{k_1 x}) + \alpha_3 (e^{k_4 x} - e^{k_1 x}),$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{b(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)(k_2 - k_4)}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{b(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)(k_3 - k_4)},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{b(k_4 - k_1)(k_4 - k_2)(k_4 - k_3)}.$$

Таким образом, функция

$$G(x) = \theta(x) \left( \alpha_1 (e^{k_2 x} - e^{k_1 x}) + \alpha_2 (e^{k_3 x} - e^{k_1 x}) + \alpha_3 (e^{k_4 x} - e^{k_1 x}) \right),$$

является частным обобщенным решением неоднородного уравнения (3.1.13).

Для нахождения обобщенных решений  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  уравнения (3.1.7), удовлетворяющих заданным согласно поставленной задаче краевым условиям, определим произвольные константы  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , входящие в общее решение из условий выполнения соответствующих граничных условий.

Далее, принимая в (3.1.6) последовательно значения  $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_m$ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V(a_1), V(a_2), \dots, V(a_m)$

$$(1 + G_j(0)q_j(1 + \lambda)V(a_j) + \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^m G_i(a_j - a_i)q_i(1 + \lambda)V(a_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^m G_i(a_j - a_i)q_i d^{iT} (1 + \lambda)Z, \quad (j = 1, \dots, m). \quad (3.1.17)$$

Используя матричные обозначения, систему (3.1.17) можно записать в виде

$$NZ - M\bar{V} = 0, \quad (3.1.18)$$

где  $M$  – матрица системы размерности  $m \times m$ :

$$M = \begin{pmatrix} (1 + G_1(0))(q_1 + \lambda p_1) & \dots & G_m(a_1 - a_m)(q_m + \lambda p_1) \\ G_1(a_2 - a_1)(q_1 + \lambda p_1) & \dots & G_m(a_2 - a_m)(q_m + \lambda p_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_1(a_m - a_1)(q_1 + \lambda p_1) & \dots & (1 + G_m(0))(q_m + \lambda p_1) \end{pmatrix},$$

$N$  – матрица размерности  $m \times n$

$$N = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)(q_i + \lambda p_i)d_1^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)(q_i + \lambda p_i)d_n^i \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)(q_i + \lambda p_i)d_1^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)(q_i + \lambda p_i)d_n^i \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)(q_i + \lambda p_i)d_1^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)(q_i + \lambda p_i)d_n^i \end{pmatrix}.$$

Объединив (3.1.18) с системой (3.1.4), получим систему линейных, однородных алгебраических уравнений относительно вектора амплитуд  $Z$  и  $\bar{V}$

$$\begin{cases} (\lambda^2 A + C_1 + C_2 D + \lambda(B_1 + B_2 D))Z - (C_2 + \lambda B_2)\bar{V} = 0, \\ NZ - M\bar{V} = 0. \end{cases} \quad (3.1.19)$$

Система (3.1.19) имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю. Приравняв определитель системы (3.1.19) к нулю, получим уравнение для нахождения собственных комплексных частот

$$\det \begin{pmatrix} \lambda^2 A + C_1 + C_2 D + \lambda(B_1 + B_2 D) & C_2 + \lambda B_2 \\ N & M \end{pmatrix} = 0. \quad (3.1.20)$$

Отметим, уравнение для нахождения собственных частот (3.1.20), так же как и уравнение (2.2.24) из пункта 2.2.3 диссертационной работы, является трансцендентным, имеющим бесконечный дискретный набор собственных частот.

### 3.1.3. Исследование одной типовой системы. Сравнительный анализ

Рассмотрим консольный стержень с тремя твердыми телами, установленными на пружинах, расчетная модель, которой приведена на рисунке 3.1. Левый конец стержня жестко закреплен, а правый свободен.

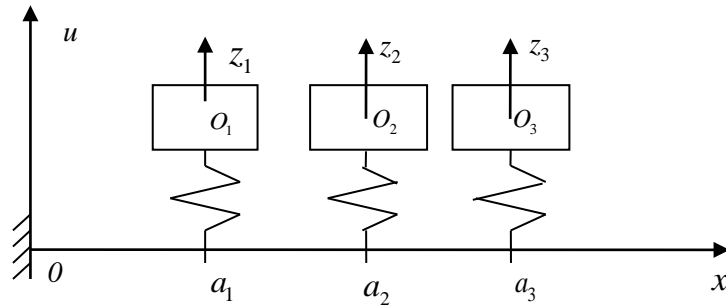


Рисунок 3.1 – Расчетная схема системы «консольный стержень с тремя осцилляторами с демпфированием»

Твердые тела массы  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , установлены на пружинах с коэффициентами жесткости  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  на расстояниях  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  от левого конца стержня и совершают поступательные перемещения  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ ,  $z_2(t)$  в направлении осей  $O_1z_1$ ,  $O_2z_2$ ,  $O_3z_3$ . Здесь точки  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  совпадают с положениями равновесия тел. Перемещения точек стержня описываются функцией  $u(x, t)$ .

Гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая движение рассматриваемой системы, полученная на основании принципа Гамильтона имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{z}_1 + b_1 (\dot{z}_1 - \frac{\partial u}{\partial t}(a_1, t)) + c_1 (z_1 - u(a_1, t)) = 0, \\ m_2 \ddot{z}_2 + b_2 (\dot{z}_2 - \frac{\partial u}{\partial t}(a_2, t)) + c_2 (z_2 - u(a_2, t)) = 0, \\ m_3 \ddot{z}_3 + b_3 (\dot{z}_3 - \frac{\partial u}{\partial t}(a_3, t)) + c_3 (z_3 - u(a_3, t)) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \left( c_1 (z_1 - u(x, t)) + b_1 (\dot{z}_1 - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)) \right) \delta(x - a_1) + \\ + \left( c_2 (z_2 - u(x, t)) + b_2 (\dot{z}_2 - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)) \right) \delta(x - a_2) + \\ + \left( c_3 (z_3 - u(x, t)) + b_3 (\dot{z}_3 - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)) \right) \delta(x - a_3). \end{array} \right. \quad (3.1.21)$$

Здесь  $\rho$  – объемная плотность материала стержня,  $F$  – площадь поперечного сечения стержня,  $E$ ,  $I$  – соответственно модуль упругости первого рода материала стержня и момент инерции поперечного сечения стержня от-

носителем оси, проходящей через центр тяжести сечения, перпендикулярной плоскости изгибных колебаний стержня,  $b$  – коэффициент вязкого трения материала пружины. Так как левый конец стержня жестко закреплен, а правый свободен, то функция  $u(x, t)$  удовлетворяет граничным условиям (2.2.4):

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(l, t) = 0. \quad (3.1.22)$$

Для проведения сравнительного анализа предложенного подхода были использованы данные модели и расчеты, приведенные в работе [90]:

$l = 1m$  – длина консольного стержня;

$\rho F = 0.675 kg / m$  – масса единицы длины стержня;

$I = 5.20833 \cdot 10^{-10} m^4$  – масса единицы длины стержня в момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси, проходящей через центр тяжести сечения и перпендикулярной плоскости колебаний стержня;

$a_1 = 0.1m, a_2 = 0.1m, a_3 = 0.1m$  – точки, в которых крепятся осцилляторы;

$b_1 = 0.1Ns / m, b_2 = 0.1Ns / m, b_3 = 0.1Ns / m$  – коэффициенты вязкого трения;

$c_1 = 0.1N / m, c_2 = 0.1N / m, c_3 = 0.1N / m$  – коэффициенты жесткости пружин в осцилляторах;

$E = 7 \cdot 10^{10} N / m^2$  – модуль Юнга.

Сравнение расчетов первых двух собственных частот полученных предложенным в диссертационной работе подходом:

$$\lambda_1 = -0.255 + 25.839i, \quad \lambda_2 = -0.235 + 161.938i,$$

и данных расчетов соответствующих частот, приведенных в работе [90]:

$$\lambda_1 = -0.255 + 25.829i, \quad \lambda_2 = -0.235 + 161.941i,$$

как видно, дают хорошее совпадение результатов.

## 3.2 Обобщения метода исследования свободных колебаний на случай вынужденных колебаний

### 3.2.1 Гармоническое силовое возмущение, приложенное к системе твердых тел

В случае если гармоническое возмущение частоты  $\omega$  приложено к одному или нескольким твердым телам системы, то в правой части обыкновенных дифференциальных уравнений обобщенной модели (2.2.1) появятся выражения вида  $H \sin \omega t$  [70]

$$\begin{cases} A\ddot{z} + Bz + C(Dz - \bar{u}) = H \sin \omega t, \\ k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) = \sum_{i=1}^m q_i (d^{iT} z(t) - u(x, t)) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (3.2.1)$$

где  $H$  –  $n$ -мерный заданный вектор.

*Действительно.* Пусть в механической системе, описанной в 1.4.1, на массу  $m$  действует гармоническое силовое возмущение с частотой  $\omega$  и амплитудой  $f$  (рис. 3.2).

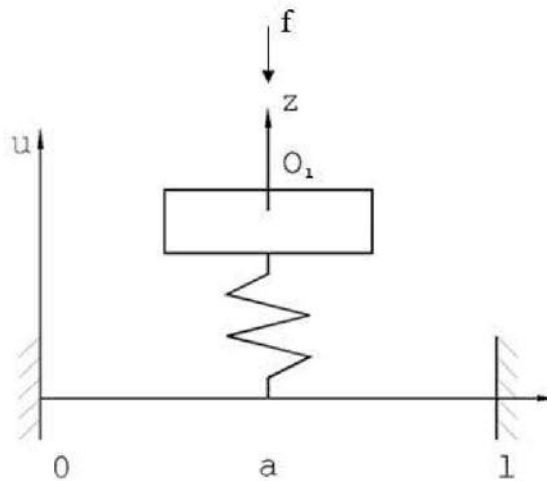


Рисунок 3.2 – Механическая система «твердое тело на упругом стержне».  
Случай с гармоническим силовым возмущением, действующим на массу

В случае действия на систему неконсервативных сил вариационный принцип Гамильтона может быть выражен следующим соотношением

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta(T - U) + \delta W) dt = 0, \quad (3.2.2)$$



где  $T$  – кинетическая энергия системы,  $U$  – потенциальная энергия системы,  $\delta W$  – виртуальная работа неконсервативных сил.

Отметим, виртуальная работа неконсервативных сил определяется выражением

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta s_i,$$

где  $Q_i$  – обобщенная внешняя сила,  $\delta s_i$  – виртуальное перемещение тела в направлении действия силы  $Q_i$ .

Вывод уравнений движения на основании принципа Гамильтона (3.2.2) приведет к появлению в гибридной системе дифференциальных уравнений (2.2.1) дополнительных слагаемых, соответствующих внешним неконсервативным силам.

В рассматриваемом случае внешнее гармоническое силовое возмущение

$$f(t) = f \cos \omega t,$$

приложено к массе и направлено вдоль оси  $Oz$ , следовательно, работа неконсервативных сил примет вид

$$\delta W = f \cos \omega t \delta z,$$

при этом вариация функционала действия (1.4.8) примет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ (-m\ddot{z} - c(z - u(a, t)) + f \cos \omega t) \delta z + \int_0^l (c(z - u(x, t)) \delta(x - a) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}) \delta u dx \right] dt = 0. \quad (3.2.3)$$

Таким образом, из (3.2.3) получим уравнение движения системы

$$\begin{cases} m\ddot{z} + c(z - u(a, t)) = H \cos \omega t, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c(z - u(x, t)) \delta(x - a). \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Будем искать вынужденные установившиеся колебания системы (3.2.1)  $z(t)$ ,  $u(x, t)$  в виде

$$z(t) = Z \sin \omega t, \quad u(x, t) = V(x) \sin \omega t, \quad (3.2.5)$$

где  $\omega$  – частота внешних возмущений,  $Z$  –  $n$ -мерный вектор амплитуд вынужденных колебаний масс,  $V(x)$  – амплитуда вынужденных колебаний точек упругого стержня.

Подставив в систему (3.2.1)  $z(t)$ ,  $u(x, t)$  в виде (3.2.5) после преобразований получим

$$\begin{aligned} (-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} &= H, \\ -\omega^2 kV(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} &= \sum_{i=1}^m q_i (d^i Z - V(x)) \delta(x - a_i), \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

где  $\bar{V}$  –  $m$  – мерный вектор с компонентами  $V(a_1), \dots, V(a_m)$ .

Пусть, при заданном значении  $\omega$  (частота внешних возмущений), в соответствии с изложенным в параграфе 2.2.1, найдены, удовлетворяющие заданным краевым условиям, обобщенные решения  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  уравнения (2.2.21). Таким образом, можем найти матрицы  $M$ ,  $N$ :

$$M = \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)q_1 & G_2(a_1 - a_2)q_2 & \dots & G_m(a_1 - a_m)q_m \\ G_1(a_2 - a_1)q_1 & 1 + G_2(0)q_2 & \dots & G_m(a_2 - a_m)q_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_1(a_m - a_1)q_1 & G_2(a_m - a_2)q_2 & \dots & 1 + G_m(0)q_m \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_n^i \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_n^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_n^i \end{pmatrix}.$$

Система алгебраических уравнений (2.2.25) в соответствии с системой (3.2.6), превратится в линейную, неоднородную алгебраическую систему уравнений относительно вектора амплитуд  $Z$  и  $\bar{V}$

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = H, \\ NZ - M\bar{V} = 0. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Отметим, если, частота внешних возмущений не совпадает с какой-либо собственной частотой, тогда определитель системы (3.2.7) не равен нулю

$$\det \begin{pmatrix} -\omega^2 A + B + CD & -C \\ N & -M \end{pmatrix} \neq 0.$$

*Замечание.* Амплитуда вынужденных колебаний точек упругого стержня  $V(x)$  определится в соответствии (2.2.14) в виде

$$V(x) = \sum_{i=1}^m G_i(x - a_i) q_i (d^i Z - V(a_i)).$$

Рассмотрим механическую систему (3.2.4). Поделив первое уравнение (3.2.4) на  $m$ , а второе на  $pF$ , получим

$$\begin{cases} \ddot{z} + p^2(z - u(a, t)) = H \cos \omega t, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c(z - u(x, t)) \delta(x - a), \end{cases} \quad (3.2.8)$$

где  $p = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ,  $b = \frac{EI}{pF}$ ,  $H = \frac{f}{m}$ .

На  $u(x, t)$  наложены граничные условия:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \frac{du}{dx}(0, t) = \frac{du}{dx}(l, t) = 0 \quad (3.2.9)$$

Решение системы (3.2.8) при гармоническом силовом возмущении будем искать в виде

$$z(t) = A \sin \omega t, \quad u(x, t) = V(x) \sin \omega t. \quad (3.2.10)$$

Подставив (3.2.10) в систему (3.2.8) получим:

$$\begin{cases} -\omega^2 A + p^2(A - V(a)) = H, \\ -\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = e(A - V(x)) \delta(x - a). \end{cases} \quad (3.2.11)$$

Отметим, согласно теореме 1.4.1 из параграфа 1.4.2 диссертации имеем

$$V(x) = \frac{\bar{V}(x - a) A e}{1 + e \bar{V}(0)}, \quad (3.2.12)$$

где  $\bar{V}(x)$  определяется в виде

$$\bar{V}(x) = G_0(x) = c_1 S_1(\beta x) + c_2 S_2(\beta x) + c_3 S_3(\beta x) + c_4 S_4(\beta x) + \theta(x) \frac{S_4(\beta x)}{b\beta^3},$$

при этом постоянные интегрирования  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , удовлетворяют граничным условиям

$$\bar{V}(-a) = \bar{V}(l-a) = 0, \quad \frac{d\bar{V}}{dx}(-a) = \frac{d\bar{V}}{dx}(l-a) = 0.$$

Таким образом, учитывая

$$V(a) = \frac{\bar{V}(0)Ae}{1 + e\bar{V}(0)},$$

из (3.2.11) можем найти

$$A = \frac{H(1 + e\bar{V}(0))}{p^2 - \omega^2(1 + e\bar{V}(0))}, \quad (3.2.13)$$

при этом в силу (3.2.12)

$$V(x) = \frac{\bar{V}(x-a)He}{p^2 - \omega^2(1 + e\bar{V}(0))}. \quad (3.2.14)$$

Поделив на амплитуду  $H$  (3.2.13) и (3.2.14) получим амплитудно-частотные характеристики массы и точек стержня.

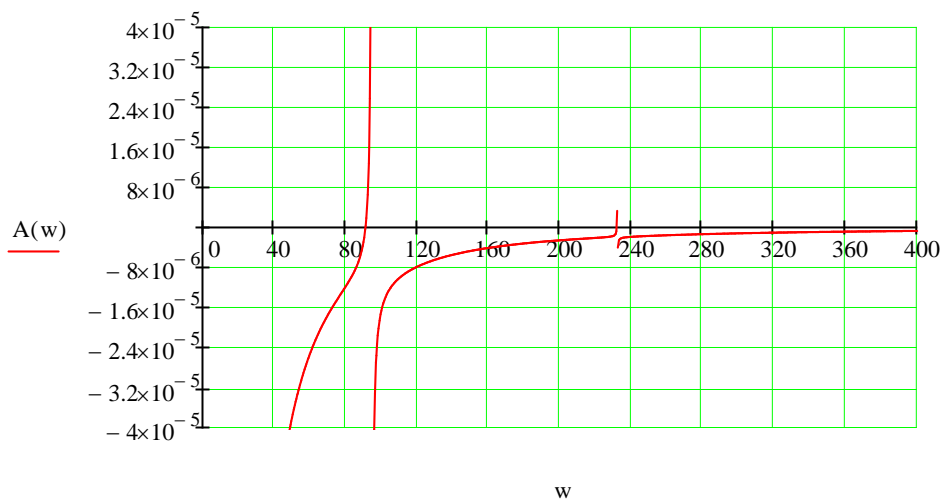


Рисунок 3.3 – АЧХ массы  $m$  в механической системе «твердое тело на упругом стержне». Случай с гармоническим возмущением, действующим на массу

### 3.2.2 Гармоническое силовое возмущение, приложенное к балке Эйлера-Бернулли

Пусть на систему взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера-Бернулли, действует гармоническое силовое возмущение с частотой  $\omega$ , приложенное в одной или в нескольких точках стержня. В этом случае в правой части уравнений в частных производных обобщенной модели (2.2.1) появятся дополнительные слагаемые [70]

$$\begin{cases} A\ddot{z} + Bz + C(Dz - \bar{u}) = 0, \\ k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) = \sum_{i=1}^m q_i (d^{iT} z(t) - u(x, t)) \delta(x - a_i) + \\ + \sum_{i=1}^s H_i \sin \omega t \delta(x - \bar{a}_i), \end{cases} \quad (3.2.15)$$

где  $H_i$  – заданные амплитуды внешних воздействий, приложенные в точке стержня с координатой  $\bar{a}_i$ .

*Действительно.* Пусть в механической системе действует гармоническое силовое возмущение с частотой  $\omega$  и амплитудой  $f$  (рис. 3.3). Силовое возмущение  $f(t) = f \cos \omega t$ , приложено к стержню в точке  $x = a_1$ .

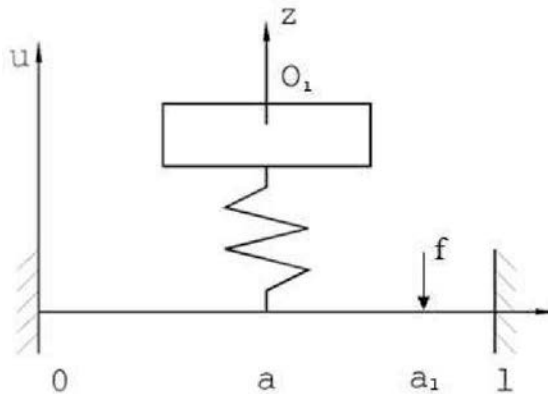


Рисунок 3.4 – Механическая система «твердое тело на упругом стержне». Случай с гармоническим силовым возмущением, действующим на стержень

Виртуальную работу внешних сил можем записать в виде

$$\delta W = f \cos \omega t \delta u(a_1, t) = \int_0^1 f \cos \omega t \delta u(x, t) \delta(x - a_1) dx,$$

при этом вариация функционала действия (1.4.8) примет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} [(-m\ddot{z} - c(z - u(a, t)))\delta z + \int_0^{\ell} (c(z - u(x, t))\delta(x - a) + f \cos \omega t \delta(x - a_1) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4})\delta u dx] dt = 0. \quad (3.2.16)$$

Таким образом, из (3.2.16) получим уравнение движения системы

$$\begin{cases} m\ddot{z} + c(z - u(a, t)) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c(z - u(x, t))\delta(x - a) + f \cos \omega t \delta(x - a_1). \end{cases} \quad (3.2.17)$$

Подставив в систему (3.2.15)  $z(t)$ ,  $u(x, t)$  в виде (3.2.5) после преобразований получим

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = 0 \\ -\omega^2 kV(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \sum_{i=1}^m q_i (d^{i'} Z - V(x))\delta(x - a_i) + \\ + \sum_{i=1}^s H_i \delta(x - \bar{a}_i), \end{cases} \quad (3.2.18)$$

где  $\bar{V}$  –  $m$ -мерный вектор с компонентами  $V(a_1), \dots, V(a_m)$ .

В силу граничных условий накладываемых на функцию  $u(x, t)$  функция  $V(x)$  должна удовлетворять одному из граничных условий (2.2.10), (2.2.11) или (2.2.12).

Рассмотрим для определенности вспомогательную краевую задачу для алгебраическо-дифференциальной системы (3.2.18) с граничным условием (2.2.10).

*Теорема 3.2.1.* При любых значениях  $Z$  для обобщенного решения  $V(x)$  дифференциального уравнения

$$-\omega^2 kV(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \sum_{i=1}^m q_i (d^{i'} Z - V(x))\delta(x - a_i) + \sum_{i=1}^s H_i \delta(x - \bar{a}_i), \quad (3.2.19)$$

справедливо представление

$$V(x) = \sum_{i=1}^m G_i(x - a_i) q_i (d^{i'} Z - V(a_i)) + \sum_{i=1}^s \bar{G}_i(x - \bar{a}_i) H_i, \quad (3.2.20)$$

где функции  $G_i(x)$ ,  $(i = 1, \dots, m)$  обобщенные решения уравнений

$$-\omega^2 k G_i(x) + b \frac{d^4 G_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (i = 1, \dots, m),$$

с граничными условиями

$$G_i(-a_i) = G_i(l - a_i) = 0, \quad \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = \frac{dG_i}{dx}(l - a_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, m),$$

функции  $\bar{G}_i(x)$ ,  $(i = 1, \dots, s)$  обобщенные решения уравнений

$$-\omega^2 k \bar{G}_i(x) + b \frac{d^4 \bar{G}_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (i = 1, \dots, s),$$

с граничными условиями

$$\bar{G}_i(-\bar{a}_i) = \bar{G}_i(l - \bar{a}_i) = 0, \quad \frac{d\bar{G}_i}{dx}(-\bar{a}_i) = \frac{d\bar{G}_i}{dx}(l - \bar{a}_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, s),$$

*Доказательство* теоремы аналогично доказательствам теорем 2.2.1 и 3.1.1.

Представим (3.2.20) в виде

$$\begin{aligned} V(x) = & \sum_{i=1}^m \int_0^l \left( G_i(x - \xi) q_i (d^{i'} Z - V(\xi)) \cdot \delta(\xi - a_i) \right) d\xi + \\ & + \sum_{i=1}^s \int_0^l \bar{G}_i(x - \xi) H_i \delta(\xi - \bar{a}_i) d\xi. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Отметим, если функция  $V(x)$  обобщенное решение дифференциального уравнения (3.2.19), то для любой компоненты  $v(\cdot, \cdot)$  основной вектор-функции  $(y(\cdot), v(\cdot, \cdot)) \in K$ , при любом  $t \in [0, T]$  справедливо тождество

$$\int_0^l \left( \lambda^2 k V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} \right) \cdot v(x, t) dx = \sum_{i=1}^n \left[ q_i (d^{i'} Z - V(a_i)) v(a_i, t) \right] + \sum_{i=1}^s H_i v(\bar{a}_i, t), \quad (3.2.22)$$

в справедливости представления (3.2.21) можем убедиться непосредственной подстановкой (3.2.21) в левую часть (3.2.22).

Пусть в соответствии с изложенным выше найдены обобщенные решения  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  и  $\bar{G}_1(x), \bar{G}_2(x), \dots, \bar{G}_m(x)$  соответствующих уравнений, удовлетворяющие заданным согласно поставленной задаче краевым условиями.

Далее, принимая в (3.2.20) последовательно значения  $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_m$ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V(a_1), V(a_2), \dots, V(a_m)$

$$\begin{aligned} (1 + G_j(0)q_j V(a_j) + \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^m G_i(a_j - a_i)q_i V(a_i)) = \\ = \sum_{i=1}^m G_i(a_j - a_i)q_i d^i Z + \sum_{i=1}^s \bar{G}_i(a_j - \bar{a}_i)H_i, \quad (j = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Используя матричные обозначения, систему (3.2.23) можно записать в виде

$$M\bar{V} = NZ + b, \quad (3.2.24)$$

где  $M$  – матрица системы размерности  $m \times m$ :

$$M = \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)q_1 & G_2(a_1 - a_2)q_2 & \dots & G_m(a_1 - a_m)q_m \\ G_1(a_2 - a_1)q_1 & 1 + G_2(0)q_2 & \dots & G_m(a_2 - a_m)q_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_1(a_m - a_1)q_1 & G_2(a_m - a_2)q_2 & \dots & 1 + G_m(0)q_m \end{pmatrix},$$

$N$  – матрица размерности  $m \times n$

$$N = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_n^i \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_n^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_n^i \end{pmatrix},$$

$b$  –  $m$  - мерный заданный вектор



$$b = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^s \bar{G}_i(a_1 - \bar{a}_i)H_i \\ \sum_{i=1}^s \bar{G}_i(a_2 - \bar{a}_i)H_i \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^s \bar{G}_i(a_m - \bar{a}_i)H_i \end{pmatrix}.$$

Объединив (3.2.24) с системой

$$(-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = 0,$$

получим систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно вектора амплитуд  $Z$  и  $\bar{V}$

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = 0, \\ NZ - M\bar{V} = -b. \end{cases} \quad (3.2.25)$$

Если частота внешних возмущений не совпадает с какой-либо собственной частотой, тогда определитель системы (3.2.25) не равен нулю

$$\det \begin{pmatrix} -\omega^2 A + B + CD & -C \\ N & -M \end{pmatrix} \neq 0.$$

*Замечание.* При этом амплитуда вынужденных колебаний точек упругого стержня  $V(x)$  будет определяться соотношениями (3.2.20).

Рассмотрим механическую систему (3.2.17). Поделив первое уравнение (3.2.17) на  $m$ , а второе на  $pF$ , получим

$$\begin{cases} \ddot{z} + p^2(z - u(a, t)) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c(z - u(x, t))\delta(x - a) + H \cos \omega t \delta(x - a_1), \end{cases} \quad (3.2.26)$$

где  $p = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ,  $b = \frac{EI}{pF}$ ,  $H = \frac{f}{pF}$ .

На  $u(x, t)$  наложены граничные условия (3.2.9).

Заменой (3.2.10) систему (3.2.22) сведем к алгебраическо-дифференциальной системе

$$\begin{cases} -\omega^2 A + p^2(A - V(a)) = 0, \\ -\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = e(A - V(x))\delta(x - a) + H\delta(x - a_1) \end{cases} \quad (3.2.27)$$

с граничными условиями, накладываемыми на функцию  $V(x)$  (2.2.10).

Согласно теореме 3.2.1 при любых значениях  $Z$  для обобщенного решения  $V(x)$  дифференциального уравнения

$$-\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = e(A - V(x))\delta(x - a) + H\delta(x - a_1) \quad (3.2.28)$$

справедливо представление

$$V(x) = G(x - a)e(A - V(a)) + \bar{G}(x - a_1)H, \quad (3.2.29)$$

где функции  $G_i(x)$ ,  $(i = 1, \dots, m)$  обобщенные решения уравнений

$$-\omega^2 k G_i(x) + b \frac{d^4 G_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (i = 1, \dots, m),$$

с граничными условиями

$$G_i(-a_i) = G_i(l - a_i) = 0, \quad \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = \frac{dG_i}{dx}(l - a_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, m),$$

функции  $\bar{G}_i(x)$ ,  $(i = 1, \dots, s)$  обобщенные решения уравнений

$$-\omega^2 k \bar{G}_i(x) + b \frac{d^4 \bar{G}_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (i = 1, \dots, s),$$

с граничными условиями

$$\bar{G}_i(-\bar{a}_i) = \bar{G}_i(l - \bar{a}_i) = 0, \quad \frac{d\bar{G}_i}{dx}(-\bar{a}_i) = \frac{d\bar{G}_i}{dx}(l - \bar{a}_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, s).$$

Подставляя в (3.2.29)  $x=a$ , получим

$$V(a) = \bar{V}(0)e(A - V(a)) + \bar{V}_1(a - a_1)H,$$

отсюда

$$V(a) = \frac{\bar{V}(0)eA + \bar{V}_1(a - a_1)H}{1 + \bar{V}(0)e}. \quad (3.2.30)$$

Подставляя (3.2.30) в первое уравнение системы (3.2.27), получим

$$-\omega^2 A + p^2 \left( A - \frac{\bar{V}(0)eA + \bar{V}_1(a - a_1)H}{1 + \bar{V}(0)e} \right) = 0,$$

ТО ЕСТЬ

$$A = \frac{p^2 \bar{V}_1(a - a_1)H}{(1 + \bar{V}(0)e)(p^2 - \omega^2) - p^2 \bar{V}(0)e}. \quad (3.2.31)$$

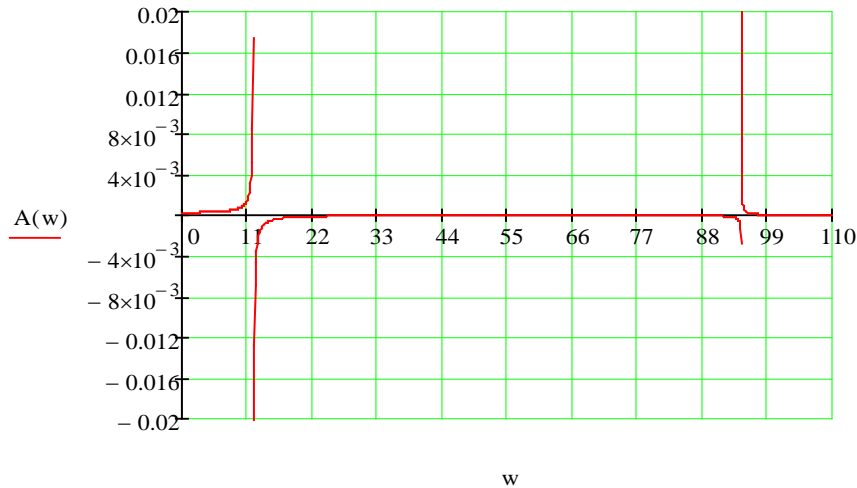


Рисунок 3.5 – АЧХ массы  $m$  в механической системе «твердое тело на упругом стержне». Случай с гармоническим силовым возмущением, действующим на стержень

### 3.2.3. Исследование вынужденных колебаний механической системы «балка Эйлера-Бернулли с горизонтально расположенными упруго-соединенными массами»

Пусть в механической системе, описанной в 2.1.2, на массы  $m_1, m_2, m_3$  действуют гармонические силовые возмущения с частотой  $\omega$  и амплитудами  $f_1, f_2, f_3$  (рис. 3.5). Вариационный принцип Гамильтона выражается соотношением (3.2.2).

Так же как и в пункте 3.2.1 диссертационной работы, применение вариационного принципа Гамильтона (3.2.2) приведет к появлению в гибридной системе дифференциальных уравнений (2.2.1) дополнительных слагаемых, соответствующих внешним неконсервативным силам.

В данном случае внешние гармонические силовые возмущения определяются по формулам

$$f_1(t) = f_1 \cos \omega t, \quad f_2(t) = f_2 \cos \omega t, \quad f_3(t) = f_3 \cos \omega t,$$

следовательно

$$\delta W = f_1 \cos \omega t \delta z_1 + f_2 \cos \omega t \delta z_2 + f_3 \cos \omega t \delta z_3.$$

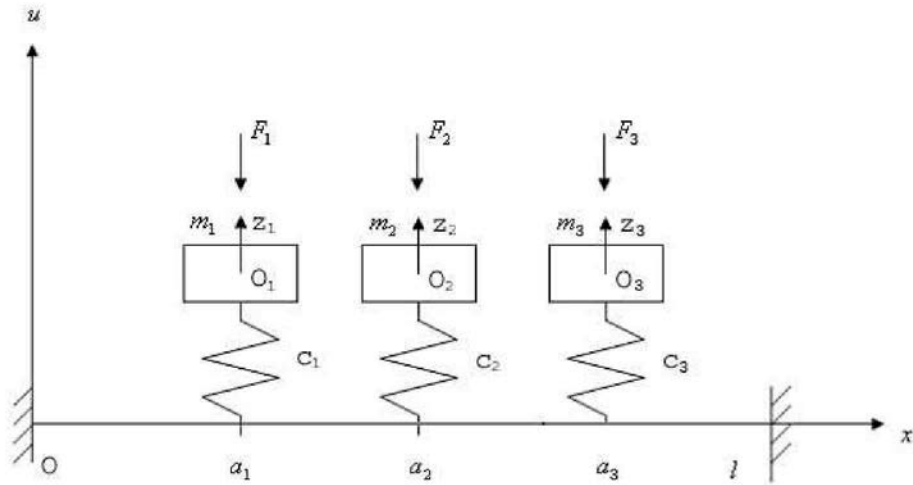


Рисунок 3.6 – Механическая система «упругий стержень с тремя горизонтально расположенными упруго-соединенными массами» с гармоническими силовыми возмущениями

С учетом (1.4.2) и предыдущего (3.2.2) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} [(-m_1 \ddot{z}_1 - c_1(z_1 - u(a_1, t)) + f_1 \cos \omega t) \delta z_1 + (-m_2 \ddot{z}_2 - c_2(z_2 - u(a_2, t)) + \\ & + f_2 \cos \omega t) \delta z_2 + (-m_3 \ddot{z}_3 - c_3(z_3 - u(a_3, t)) + f_3 \cos \omega t) \delta z_3 + \\ & \int_0^l (c_1(z_1 - u(x, t)) \delta(x - a_1) + c_2(z_2 - u(x, t)) \delta(x - a_2) + \\ & + c_3(z_3 - u(x, t)) \delta(x - a_3) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}) \delta u dx] dt = 0. \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Таким образом, из (3.2.32) получим уравнение движения системы

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1(z_1 - u(a_1, t)) = f_1 \cos \omega t, \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2(z_2 - u(a_2, t)) = f_2 \cos \omega t, \\ m_3 \ddot{z}_3 + c_3(z_3 - u(a_3, t)) = f_3 \cos \omega t, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{i=1}^3 c_i(z_i - u(x, t)) \delta(x - a_i). \end{cases} \quad (3.2.33)$$

Поделив первое уравнение на  $m_1$ , второе на  $m_2$ , а третьего на  $m_3$ , четвертую на  $\rho F$ , получим

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + p_1^2(z_1 - u(a_1, t)) = H_1 \cos \omega t, \\ \ddot{z}_2 + p_2^2(z_2 - u(a_2, t)) = H_2 \cos \omega t, \\ \ddot{z}_3 + p_3^2(z_3 - u(a_3, t)) = H_3 \cos \omega t, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = \sum_{i=1}^3 c_i (z_i - u(x, t)) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (3.2.34)$$

где  $p = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ,  $b = \frac{EI}{pF}$ ,  $H_i = \frac{f_i}{m_i}$ ,  $e_i = \frac{c_i}{pF}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Функция  $u(x, t)$ , так же как и в пункте 3.2.2 диссертационной работы, удовлетворяет граничным условиям (3.2.9).

Подставив в (3.2.34)  $z_i(t)$ ,  $u(x, t)$  в виде

$$z_i(t) = A_i \cos \omega t, \quad u(x, t) = V(x) \cos \omega t, \quad i = 1, 2, 3,$$

после преобразования получим

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 + p_1^2(A_1 - V(a_1)) = H_1, \\ -\omega^2 A_2 + p_2^2(A_2 - V(a_2)) = H_2, \\ -\omega^2 A_3 + p_3^2(A_3 - V(a_3)) = H_3, \\ -\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \sum_{i=1}^3 e_i (A_i - V(x)) \delta(x - a_i). \end{cases} \quad (3.2.35)$$

Подставляя в первые три уравнения (3.2.35) выражения для  $V(a_1), V(a_2)$  и  $V(a_3)$  имеем

$$\begin{cases} (p_1^2 - \omega^2 - p_1^2 \beta_{11}) A_1 - p_1^2 \beta_{12} A_2 - p_1^2 \beta_{13} A_3 = H_1, \\ -p_2^2 \beta_{21} A_1 + (p_2^2 - \omega^2 - p_2^2 \beta_{22}) A_2 - p_2^2 \beta_{23} A_3 = H_2, \\ -p_3^2 \beta_{31} A_1 - p_3^2 \beta_{32} A_2 + (p_3^2 - \omega^2 - p_3^2 \beta_{33}) A_3 = H_3. \end{cases} \quad (3.2.36)$$

Отсюда, решая систему, найдем амплитуды вынужденных колебаний масс

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad A_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (3.2.37)$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} H_1 & -p_1^2\beta_{12} & -p_1^2\beta_{13} \\ H_2 & p_2^2 - \omega^2 - p_2^2\beta_{22} & -p_2^2\beta_{23} \\ H_3 & -p_3^2\beta_{32} & p_3^2 - \omega^2 - p_3^2\beta_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1^2 - \omega^2 - p_1^2\beta_{11} & H_1 & -p_1^2\beta_{13} \\ -p_2^2\beta_{21} & H_2 & -p_2^2\beta_{23} \\ -p_3^2\beta_{31} & H_3 & p_3^2 - \omega^2 - p_3^2\beta_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} p_1^2 - \omega^2 - p_1^2\beta_{11} & -p_1^2\beta_{12} & H_1 \\ -p_2^2\beta_{21} & p_2^2 - \omega^2 - p_2^2\beta_{22} & H_2 \\ -p_3^2\beta_{31} & -p_3^2\beta_{32} & H_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} p_1^2 - \omega^2 - p_1^2\beta_{11} & -p_1^2\beta_{12} & -p_1^2\beta_{13} \\ -p_2^2\beta_{21} & p_2^2 - \omega^2 - p_2^2\beta_{22} & -p_2^2\beta_{23} \\ -p_3^2\beta_{31} & -p_3^2\beta_{32} & p_3^2 - \omega^2 - p_3^2\beta_{33} \end{vmatrix},$$

$$\beta_{11} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + G_2(0)e_2 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + G_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_2(0)e_2 & 1 + G_2(0)e_2 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_2(a_3 - a_2)e_2 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + G_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{13} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} G_3(a_1 - a_3)e_3 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_3(a_2 - a_3)e_3 & 1 + G_2(0)e_2 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_3(0)e_3 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + G_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_1(0)e_1 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & G_1(a_2 - a_1)e_1 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_1(a_3 - a_1)e_1 & 1 + G_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & G_2(0)e_2 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + G_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{23} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_3(a_1 - a_3)e_3 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & G_3(a_2 - a_3)e_3 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_3(0)e_3 & 1 + G_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{31} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_1(0)e_1 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + G_2(0)e_2 & G_1(a_2 - a_1)e_1 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & G_1(a_3 - a_1)e_1 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{32} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_2(a_1 - a_2)e_2 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + G_2(0)e_2 & G_2(0)e_2 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & G_2(a_3 - a_2)e_2 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{33} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + G_1(0)e_1 & G_2(a_1 - a_2)e_2 & G_3(a_1 - a_3)e_3 \\ G_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + G_2(0)e_2 & G_3(a_2 - a_3)e_3 \\ G_1(a_3 - a_1)e_1 & G_2(a_3 - a_2)e_2 & G_3(0)e_3 \end{vmatrix}.$$

Согласно теореме 2.2.1 из пункта 2.2.2 диссертации амплитуда вынужденных колебаний точек упругого стержня определится следующим образом:

$$V(x) = \bar{V}_1(x - a_1)e_1(A_1 - V(a_1)) + \bar{V}_2(x - a_2)e_2(A_2 - V(a_2)) + \bar{V}_3(x - a_3)e_3(A_3 - V(a_3)).$$

### 3.2.4 Исследование вынужденных колебаний механической системы «балка Эйлера-Бернулли с вертикально расположенными упруго-соединенными массами»

1. *Случай с гармоническим силовым возмущением, действующим на массу  $m_1$ .* Пусть в механической системе (см. рис. 2.6), на массу  $m_1$  действует гармоническое силовое возмущение с частотой  $\omega$  и амплитудой  $f_1$  (рис. 3.7). Вариационный принцип Гамильтона выражается соотношением (3.2.2).

Внешние силы определяются следующим образом  $f_1(t) = f_1 \cos \omega t$ .

Отсюда работа неконсервативных сил примет вид  $\delta W = f_1 \cos \omega t \delta z_1$ .

Учитывая внешнее гармоническое силовое возмущение и работу неконсервативных сил, выражение (3.2.2) запишем в виде:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( (-m_1 \ddot{z}_1 - c_1(z_1 - u(a, t)) + c_2(z_2 - z_1) + f_1 \cos \omega t) \delta z_1 + (-m_2 \ddot{z}_2 - c_2(z_2 - z_1) + c_3(z_3 - z_2)) \delta z_2 + (-m_3 \ddot{z}_3 - c_3(z_3 - z_2)) \delta z_3 + \int_0^l \left( c_1(z_1 - u(x, t)) \delta(x - a) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta x dx \right) dt = 0.$$

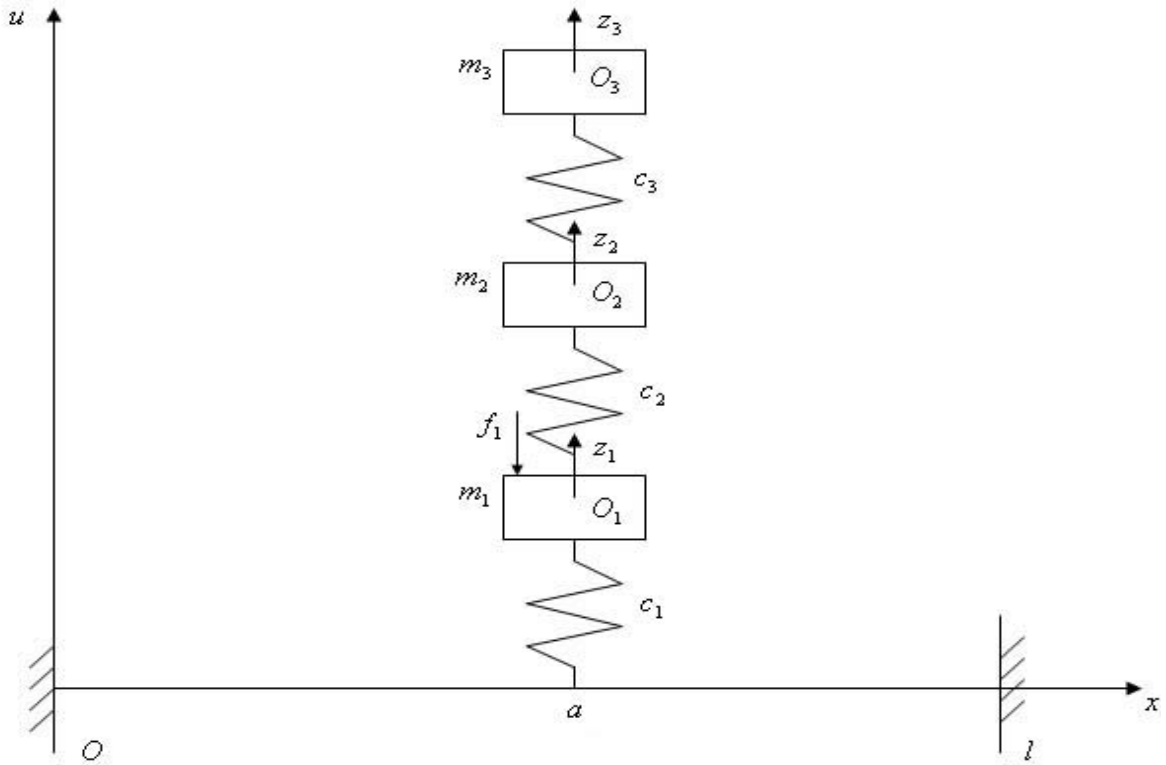


Рисунок 3.7 – Механическая система каскадного типа с тремя телами в случае с силовым возмущением, действующим на массу  $m_1$

Отсюда получим уравнения движения системы:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1(z_1 - u(a, t)) - c_2(z_2 - z_1) = f_1 \cos \omega t, \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2(z_2 - z_1) - c_3(z_3 - z_2) = 0, \\ m_3 \ddot{z}_3 + c_3(z_3 - z_2) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = (c_1(z_1 - u(x, t))) \delta(x - a). \end{cases}$$

Поделив обе части первого уравнения на  $m_1$ , второго на  $m_2$ , третьего на  $m_3$ , а четвертого на  $\rho F$  получим:



$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + p_1^2(z_1 - u(a, t)) - p_{21}^2(z_2 - z_1) = H_1 \cos pt, \\ \ddot{z}_2 + p_2^2(z_2 - z_1) - p_{32}^2(z_3 - z_2) = 0, \\ \ddot{z}_3 + p_3^2(z_3 - z_2) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = e_1(z_1 - u(x, t))\delta(x - a). \end{cases} \quad (3.2.38)$$

где  $p_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$ ,  $p_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$ ,  $p_3 = \sqrt{\frac{c_3}{m_3}}$ ,  $p_{21} = \sqrt{\frac{c_2}{m_1}}$ ,  $p_{32} = \sqrt{\frac{c_3}{m_2}}$ ,  $b = \frac{EI}{\rho F}$ ,  $e_1 = \frac{c_1}{\rho F}$ ,

$$H_1 = \frac{f_1}{m_1}.$$

На функцию  $u(x, t)$  наложены граничные условия (3.2.9).

Подставив в (3.2.38)  $z_i(t)$ ,  $u(x, t)$  в виде

$$z_i(t) = A_i \cos \omega t, i = \overline{1, 3} \quad u(x, t) = V(x) \cos \omega t,$$

после преобразований получим:

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 + p_1^2(A_1 - V(a)) - p_{21}^2(A_2 - A_1) = H_1, \\ -\omega^2 A_2 + p_2^2(A_2 - A_1) - p_{32}^2(A_3 - A_2) = 0, \\ -\omega^2 A_3 + p_3^2(A_3 - A_2) = 0, \end{cases} \quad (3.2.39)$$

$$-\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = e_1(A_1 - V(a))\delta(x - a) \quad (3.2.40)$$

Граничные условия:

$$V(0) = V(l) = 0, \quad \frac{dV}{dx}(0) = \frac{dV}{dx}(l) = 0$$

Подставляя в уравнения системы (3.2.39) выражение для  $V(a)$  из равенства (3.2.40) получим:

$$\begin{aligned} & \left( p_1^2 - \omega^2 + p_{21}^2 - p_1^2 \frac{\bar{V}(0)e_1}{1 + \bar{V}(0)e_1} \right) A_1 - p_{21}^2 A_2 = H_1, \\ & -p_2^2 A_1 + (p_2^2 - \omega^2 + p_{32}^2) A_2 - p_{32}^2 A_3 = 0, \\ & -p_3^2 A_2 + (p_3^2 - \omega^2) A_3 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда решая систему, найдем  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ :

$$A_1 = H_1 \frac{\Delta_1}{\Delta_A}, \quad A_2 = H_1 \frac{\Delta_2}{\Delta_A}, \quad A_3 = H_1 \frac{\Delta_3}{\Delta_A}, \quad (3.2.41)$$

где

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} \frac{p_1^2}{1 + \bar{V}(0)e_1} - \omega^2 + p_{21}^2 & -p_{21}^2 & 0 \\ -p_2^2 & p_2^2 - \omega^2 + p_{32}^2 & -p_{32}^2 \\ 0 & -p_3^2 & p_3^2 - \omega^2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -p_{21}^2 & 0 \\ 0 & p_2^2 - \omega^2 + p_{32}^2 & -p_{32}^2 \\ 0 & -p_3^2 & p_3^2 - \omega^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{p_1^2}{1 + \bar{V}(0)e_1} - \omega^2 + p_{21}^2 & 1 & 0 \\ -p_2^2 & 0 & p_{32}^2 \\ 0 & 0 & p_3^2 - \omega^2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{p_1^2}{1 + \bar{V}(0)e_1} - \omega^2 + p_{21}^2 & -p_{21}^2 & 1 \\ -p_2^2 & p_2^2 - \omega^2 + p_{32}^2 & 0 \\ 0 & -p_3^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Учитывая теорему 2.2.1,  $V(x)$  имеет вид

$$V(x) = \bar{V}(x-a)e_1(A_1 - V(a)). \quad (3.2.42)$$

Поделив на амплитуду  $H_1$  (3.2.41) и (3.2.42) получим амплитудно-частотные характеристики массы и точек стержня.

Если в данной механической системе (рис. 3.7) на массу  $m_2$  ( $m_3$ ) будет действовать гармоническое силовое возмущение с частотой  $\omega$  и амплитудой  $f_2$  ( $f_3$ ), то тогда внешнее гармоническое возмущение и работа неконсервативных сил запишутся следующим образом

$$f_2(t) = f_2 \cos \omega t, \quad \delta W = f_2 \cos \omega t \delta z_2$$

$$(f_3(t) = f_3 \cos \omega t, \quad \delta W = f_3 \cos \omega t \delta z_3),$$

соответственно.

Процедура нахождения амплитуд вынужденных колебаний масс и точек упругого стержня аналогична описанной выше.

2. *Случай с гармоническим силовым возмущением, действующим на стержень.* Пусть в механической системе (рис. 3.6), в точке  $x = a_1$  на стержень действует гармоническое силовое возмущение с частотой  $\omega$  и амплитудой  $f$ . Повторимся, что для вывода уравнения движения системы используется вариационный принцип Гамильтона (3.2.2).

Внешние гармонические силы и виртуальная работа внешних сил  $\delta W$  имеют вид:

$$f(t) = f \cos \omega t ,$$

$$\delta W = f \cos \omega t \delta u(a_1, t) = \int_0^l f \cos \omega t \delta u(x, t) \delta(x - a_1) dx .$$

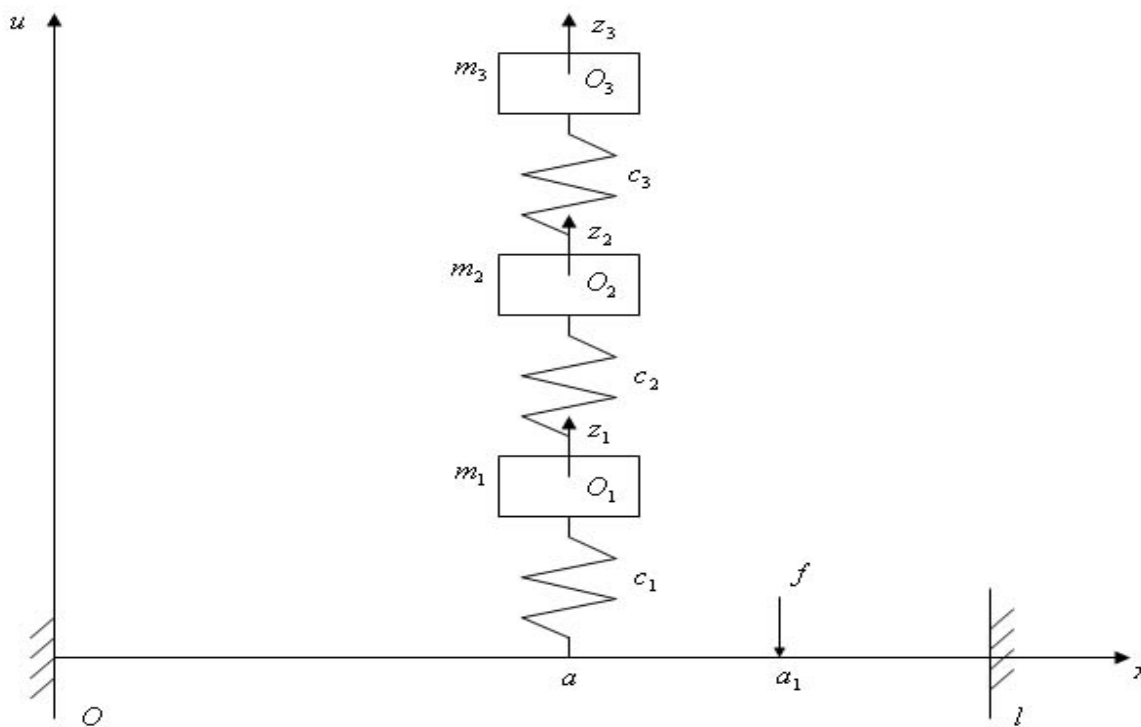


Рисунок 3.8 – Механическая система каскадного типа с тремя телами в случае с силовым возмущением, действующим на стержень

Подставив последние выражения в (3.2.2) придем к уравнению движения механической системы, представленной на рисунке 3.8

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1(z_1 - u(a, t)) - c_2(z_2 - z_1) = 0, \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2(z_2 - z_1) - c_3(z_3 - z_2) = 0, \\ m_3 \ddot{z}_3 + c_3(z_3 - z_2) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = (c_1(z_1 - u(x, t)))\delta(x - a) + f \cos \omega t \delta(x - a_1). \end{cases} \quad (3.2.43)$$

Поделив обе части первого уравнения на  $m_1$ , второго на  $m_2$ , третьего на  $m_3$ , а четвертого на  $\rho F$  получим:

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + p_1^2(z_1 - u(a, t)) - p_{21}^2(z_2 - z_1) = 0, \\ \ddot{z}_2 + p_2^2(z_2 - z_1) - p_{32}^2(z_3 - z_2) = 0, \\ \ddot{z}_3 + p_3^2(z_3 - z_2) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = e_1(z_1 - u(x, t))\delta(x - a) + H \cos \omega t \delta(x - a_1). \end{cases} \quad (3.2.44)$$

где  $p_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$ ,  $p_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$ ,  $p_3 = \sqrt{\frac{c_3}{m_3}}$ ,  $p_{21} = \sqrt{\frac{c_2}{m_1}}$ ,  $p_{32} = \sqrt{\frac{c_3}{m_2}}$ ,  $b = \frac{EI}{\rho F}$ ,  $e_1 = \frac{c_1}{\rho F}$ ,

$$H = \frac{f}{\rho F}.$$

На функцию  $u(x, t)$  так же наложены граничные условия (3.2.9).

Подставив в (3.2.44)  $z_i(t)$ ,  $u(x, t)$  в виде  $z_i(t) = A_i \cos \omega t$ ,  $i = \overline{1, 3}$   
 $u(x, t) = V(x) \cos \omega t$ .

После преобразований получим:

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 + p_1^2(A_1 - V(a)) - p_{21}^2(A_2 - A_1) = 0, \\ -\omega^2 A_2 + p_2^2(A_2 - A_1) - p_{32}^2(A_3 - A_2) = 0, \\ -\omega^2 A_3 + p_3^2(A_3 - A_2) = 0, \end{cases} \quad (3.2.45)$$

$$-\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = e_1(A_1 - V(a))\delta(x - a) + H \delta(x - a_1). \quad (3.2.46)$$

Граничные условия:

$$V(0) = V(l) = 0, \quad \frac{dV}{dx}(0) = \frac{dV}{dx}(l) = 0.$$

Согласно теореме 3.2.1 при любых значениях  $Z$  для обобщенного решения  $V(x)$  дифференциального уравнения (3.2.46) справедливо представление

$$V(x) = G(x-a)e_1(A_1 - V(a)) + \bar{G}(x-a_1)H, \quad (3.2.47)$$

где функция  $G(x)$  обобщенное решение уравнения

$$-\omega^2 kG(x) + b \frac{d^4 G(x)}{dx^4} = \delta(x),$$

с граничными условиями

$$G(-a) = G(l-a) = 0, \quad \frac{dG}{dx}(-a) = \frac{dG}{dx}(l-a) = 0,$$

функция  $\bar{G}(x)$  обобщенное решение уравнения

$$-\omega^2 k\bar{G}(x) + b \frac{d^4 \bar{G}(x)}{dx^4} = \delta(x),$$

с граничными условиями

$$\bar{G}(-\bar{a}_1) = \bar{G}(l-\bar{a}_1) = 0, \quad \frac{d\bar{G}}{dx}(-\bar{a}_1) = \frac{d\bar{G}}{dx}(l-\bar{a}_1) = 0.$$

Подставляя в (3.2.47)  $x = a$  получим:

$$V(a) = G(0)e_1(A_1 - V(a)) + \bar{G}(a-a_1)H,$$

отсюда:

$$V(a) = \frac{G(0)e_1 A_1 + \bar{G}(a-a_1)H}{1 + G(0)e_1}. \quad (3.2.48)$$

Подставляя (3.2.48) в уравнения системы (3.2.45) получим:

$$\begin{cases} \left( \frac{p_1^2}{1 + G(0)e_1} - \omega^2 + p_{21}^2 \right) A_1 - p_{21}^2 A_2 = \frac{p_1^2 \bar{G}(a-a_1)H}{1 + \bar{V}(0)e_1}, \\ -p_2^2 A_1 + (p_2^2 - \omega^2 + p_{32}^2) A_2 - p_{32}^2 A_3 = 0, \\ -p_3^2 A_2 + (p_3^2 - \omega^2) A_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда, решая систему, найдем  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ :

$$A_1 = H \frac{\Delta_1}{\Delta_A}, \quad A_2 = H \frac{\Delta_2}{\Delta_A}, \quad A_3 = H \frac{\Delta_3}{\Delta_A},$$

где

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} \frac{p_1^2}{1+G(0)e_1} - \omega^2 + p_{21}^2 & -p_{21}^2 & 0 \\ -p_2^2 & p_2^2 - \omega^2 + p_{32}^2 & -p_{32}^2 \\ 0 & -p_3^2 & p_3^2 - \omega^2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{p_1^2 \bar{G}(a-a_1)}{1+G(0)e_1} & -p_{21}^2 & 0 \\ 0 & p_2^2 - \omega^2 + p_{32}^2 & -p_{32}^2 \\ 0 & -p_3^2 & p_3^2 - \omega^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{p_1^2}{1+G(0)e_1} - \omega^2 + p_{21}^2 & \frac{p_1^2 \bar{G}(a-a_1)}{1+G(0)e_1} & 0 \\ -p_2^2 & 0 & -p_{32}^2 \\ 0 & 0 & p_3^2 - \omega^2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{p_1^2}{1+G(0)e_1} - \omega^2 + p_{21}^2 & -p_{21}^2 & \frac{p_1^2 \bar{G}(a-a_1)}{1+G(0)e_1} \\ -p_2^2 & p_2^2 - \omega^2 + p_{32}^2 & 0 \\ 0 & -p_3^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

## Выводы по главе

1. Произведен учет демпфирующих свойств в упругих связях в обобщенной математической модели (2.2.1). Структура гибридной системы дифференциальных уравнений, описывающей систему взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругодемпфирующими связями к упругому стержню, при этом принимает вид (3.1.2).

2. Для обобщенной математической модели, представляющую собой систему взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругодемпфирующими связями к упругому стержню (3.1.2), разработан аналитико-численный метод поиска комплексных частот системы.

3. Проведенный сравнительный анализ численных расчетов предложенным методом с расчетами проведенными другими способами, известными из литературы [90], показал достоверность и универсальность предлагаемого подхода.

4. Показана возможность применения метода исследования в случае вынужденных колебаний при гармоническом возмущении.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе на основе вывода и анализа уравнений движения, систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера-Бернулли для различных типовых схем, предложена обобщенная математическая модель, для которой разработан аналитико-численный метод построения частотного уравнения. Данный метод может рассматриваться как единый метод исследования класса механических систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера-Бернулли. На основе метода исследования обобщенной математической модели разработано алгоритмическое обеспечение исследования собственных колебаний взаимосвязанных систем твердых тел, соединенных с балкой Эйлера-Бернулли, которое реализовано в виде комплекса программ. Достоверность разработанного программного комплекса подтверждена численными расчетами для конкретных расчетных схем и их сравнения с результатами «ручного» счета с использованием MathCAD, приведенными в диссертационной работе, а также с имеющимися расчетами, известными из литературных источников.

**Основные научные результаты**, полученные в диссертационной работе, сводятся к следующему:

1. Впервые введена в рассмотрение обобщенная математическая модель, представляющая собой класс математических моделей различных систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера-Бернулли. Обобщенная математическая модель представлена в виде системы гибридных дифференциальных уравнений заданной структуры.

2. Разработан аналитико-численный метод исследования собственных колебаний взаимосвязанных систем твердых тел, соединенных с балкой Эйлера-Бернулли. Произведены все необходимые теоретические исследования, связанные с разработкой аналитико-численного метода исследования колебательных процессов в системах, описываемых системами гибридных дифференциальных уравнений, предложенного класса.



3. Приведено обобщение аналитико-численного метода исследования свободных колебаний на случай учета демпфирования в упругих связях в обобщенной математической модели.

4. На основе предложенного подхода к исследованию собственных колебаний разработан метод исследования вынужденных колебаний при гармоническом возмущении.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – 352с.
2. Айзерман М.А. Классическая механика. – Изд. 2-е, перераб. – М.: Наука, 1980. – 367 с.
3. Акуленко Л.Д., Коровина Л.И., Нестеров С.В. Собственные поперечные колебания вращающегося стержня. // Изв. РАН. МТТ. – 2007. – № 1. – С. 3-14.
4. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Учет дискретного размещения ребер при изучении напряженно-деформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек // Прикл. механика. 1998. – Т. 34. – № 4. – С. 3-22.
5. Андреев Л.В., Дышко А.Л., Павленко И.Д. Динамика пластин и оболочек с присоединенными массами. – М.: Машиностроение, 1988. – 195 с.
6. Антуфьев Б.А., Смиян А.Б. Динамика цилиндрической оболочки с консольно прикрепленными к ней пластинами. // Прикладная математика, механика, физика. 2009. – Т.16. – №3.
7. Ахатов И.Ш., Ахтямов А.М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикл. математика и механика. 2001. – Т. 65. – Вып. 2. – С. 290-298.
8. Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Тайхер М., Ямилова Л.С. Об одном методе определения по собственным частотам условий закрепления прямоугольной пластины // Изв. РАН. МТТ. – 2007. – №1. – С.100-113.
9. Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Ямилова Л.С. Определение вида и параметров закрепления стержня по собственным частотам его колебаний // Акустический журнал. 2008. – Т. 54. – № 2. – С. 181-188.
10. Ахтямов А.М., Ямилова Л.С. Диагностирование нераспадающегося закрепления стержня переменной жесткости // Приборы и системы. Контроль, управление, диагностика. 2006. – №2. – С. 56-58.
11. Баргуев С.Г., Аюшеев Т.В., Мижидон А.Д. Об одном обобщении для решения начально-краевой задачи о колебаниях произвольного числа осцилляторов на стержне // Вестник Бурятского государственного универси-

тета. Математика и информатика. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2012. – № 9. – С. 95-100.

12. Баргуев С.Г., Елтошкина Е.В., Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.) Исследование возможности гашения колебаний  $n$  масс установленных на упругом стержне // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: Изд-во ИрГУПС, 2010. – № 4. – С. 78-84.

13. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д. Вынужденные колебания консольной балки с массой и упруго закрепленным концом // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2014. – №9-1. – С. 18-21.

14. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д. К исследованию виброзащитной системы с упругим основанием // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: Изд-во ИрГУПС, 2009. – №2 (22). – С. 13-20.

15. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д. К исследованию вынужденных колебаний упругой механической системой каскадного типа // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2008. – №9. – С. 151-155.

16. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д. О собственных колебаниях механической системы каскадного типа, установленной на упругом стержне // Вестник ВСГТУ. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2010. – №1. – С. 26-33.

17. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д. Определение собственных частот и форм колебаний одной механической системы методом разложения в ряд Фурье // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2011. – № 10. – С. 224-229.

18. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д. Определение собственных частот простейшей механической системы на упругом основании // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2009. – 10. – С. 58-63.

19. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д. Решение начально-краевой задачи о колебаниях осциллятора на упругом стержне // Вестник Бурятского государ-

ственного университета. Математика и информатика. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2012. – № 2. – С. 63-68.

20. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.) О пределах применимости классической схемы расчета собственных частот в виброзащитной системе с двумя защищаемыми объектами // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2010. – № 9. – С. 135-141.

21. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.). Об одном способе определения собственных частот и форм колебаний стержня с осциллятором // Математика, ее приложение и математическое образование: Материалы IV Междунар. конф. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2011. – Ч.2. – С. 93-96.

22. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.). Сравнительный анализ к расчету собственных частот колебаний стержня с упруго присоединенной системой с двумя степенями свободы // Материалы V Междунар. конф. «Проблемы механики современных машин». – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2012. – Т. 1. – С. 186-189.

23. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д. Исследование собственных колебаний твердого тела на упругом стержне конечной массы двумя способами и их сравнительный анализ // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2006. – № 3.

24. Беленький И.М. Введение в аналитическую механику. – М.: Высшая школа, 1964. – 324 с.

25. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.

26. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339с.

27. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979 (перевод на английский язык).

28. Болотин В.В., Блехман И.И., Диментберг Ф.М., Колесников К.С., Лавендел Э.Э., Генкин Д.М., Фролов К.В. Вибрации в технике: справочник в 6 т. – М.: Машиностроение, 1978.
29. Борисов М.В. Разработка математической модели движения составного упругогокосмического аппарата: дис. ... канд. техн. наук. – Самара, 2009. – 122 с.
30. Бохнер С. Лекции об интеграле Фурье. – М.: Физматгиз, 1962. – 360 с.
31. Вест Ч. Голографическая интерферометрия: Пер. с англ.– М., 1982. – 504 с.
32. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512с.
33. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320с.
34. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Изд-во Технико-теоретической литературы, 1956. – 419 с.
35. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
36. Вольников М.И. Математическое моделирование динамики гетерогенных стержневых структур: дис. ... канд. техн. наук. – Пенза, 2007. – 176 с.
37. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 275 с.
38. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1959. – 470 с.
39. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 310 с.
40. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек. – Киев: Наукова Думка, 1964. – 288 с.
41. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 271с.

42. Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.). Теоретические основы исследования систем виброизоляции объектов, установленных на упругом стержне: Сб. статей III Всерос. науч.-практ. конф. Авиамашиностроение и транспорт Сибири – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2013. – С. 219-227.

43. Дабаева М.Ж. Построение частотных уравнений системы твердых тел, прикрепленных к упругому стержню // Проблемы механики современных машин: Материалы VI Междунар. конф. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2015. – Т. 3. – С. 132-137.

44. Дабаева М.Ж. Развитие общего подхода к исследованию собственных колебаний балки Тимошенко // Информационно-телекоммуникационные системы и технологии (ИТСиТ-2014): Материалы Всерос. науч.-практ. конф., г. Кемерово, 16-17 октября 2014 г.; Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т.Ф. Горбачева. – Кемерово, 2014. – С. 372-373.

45. Дабаева М.Ж., Елтошкина Е.В., Гармаева В.В. Теоретические основы построения алгоритмического обеспечения исследования собственных колебаний системы твердых тел, установленных на упругом стержне // Математика, ее приложения и математическое образование: Материалы V Междунар. конф. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2014. – С. 94-99.

46. Дирак П. Основы квантовой механики. – М.: Гостехиздат. 1932.

47. Дышко А.Л., Павленко И.Д., Селиванов Ю.М. Исследование резонансных колебаний оболочек с отверстиями // Смешанные задачи механики деформируемых сред: Сб. научн. тр. – Дніпропетровськ, 1995. – С. 58-66.

48. Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Соловьев А.Н. Об одном методе определения собственных частот упорядоченной системы нано-объектов // ЖТФ. 2007. – Т. 77. – Вып. 1. – С. 3-8.

49. Жигалко Ю.П., Соловьева С.И. Собственные колебания балки с гармоническим осциллятором // Известия высших учебных заведений. Математика. 2001.– № 10 (433). – С. 36-38.

50. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1957. – 541с.

51. Каиров А.С. Собственные колебания цилиндрических оболочек, ослабленных отверстиями // Зб. науков. пр. УДМТУ. Миколаїв, 1999. – № 2. – С. 118-124.

52. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 518с.

53. Крылов А.Н. О колебательном движении механических систем. – М.: СОРЕНА, 1932. –Т. 4. – С. 33-42.

54. Крылов А.Н. О применении способа последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения. ИАН. Отд. мат. и ест. наук. (7). – 1933. –Т.1. – С. 1-44.

55. Крылов А.Н. О продольных колебаниях стержней. М., Иав. Физ. инст. при Моск. жаучн инст. и Инст. биолог, ФИЗ. при Нар. ком. здрав. – 1921. – С. 801-319.

56. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании, 1930. – 127 с.

57. Кузьмин А.Н. Связанные колебания пластин и стержней: исслед. по теор. пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1975. – № 11. – С. 327-336.

58. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: ЧеРо, 1999. – 572с.

59. Мижидон А.Д. Исследование систем виброизоляции на упругом основании // Вторая Всесоюзная конференция «Проблемы виброизоляции машин и приборов»: Тезисы докладов. – Иркутск-Москва, 1989. – С. 113-114.

60. Мижидон А.Д., Ошоров Б.Б., Баргуев С.Г. Обобщенное решение одной гибридной системы дифференциальных уравнений: Международная конференция. Кубатурные формулы и дифференциальные уравнения. Энхалук. – Улан-Удэ, 2009. – С. 251-258.

61. Мижидон А.Д., Архипов С.В., Федоров М.Е. Математические модели механических систем, описываемых гибридными системами уравнений // Сб.науч.статей. Серия: Физико-математические науки. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 1999. – №3. – С. 52-61.

62. Мижидон А.Д., Баргуев С.Г. Исследование возможности гашения  $n$  масс, установленных на упругом стержне // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: Изд-во ИрГУПС, 2010. – №4 (28). – С. 78-84.

63. Мижидон А.Д., Баргуев С.Г. Краевая задача для одной гибридной системы дифференциальных уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2013. – № 9. – С. 130-137.

64. Мижидон А.Д., Баргуев С.Г. Математическая модель пластины с твердыми телами // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: Изд-во ИрГУПС, 2012. – №4(36). – С. 30-34.

65. Мижидон А.Д., Баргуев С.Г. О вынужденных колебаниях механической системы установленной на упругом стержне // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: Изд-во ИрГУПС, 2004. – №1. – С. 32-34.

66. Мижидон А.Д., Баргуев С.Г., Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.). Собственные колебания двухпролетной балки Тимошенко с присоединенным осциллятором // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: Изд-во ИрГУПС, 2013. – № 4(40). – С. 34-38.

67. Мижидон А.Д., Баргуев С.Г., Дабаева М.Ж., Гармаева В.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ: «Расчет собственных частот балки Эйлера-Бернулли с прикрепленными твердыми телами» №2015612387-18 фев. 2015г.

68. Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж. Математическое моделирование, учет демпфирующих свойств упругих связей в обобщенной математической модели системы твердых тел, установленных на упругом стержне // Вестник ВСГУТУ. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2015 – 2 (53). – С. 10-17.

69. Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.). Обобщенная математическая модель системы твердых тел, установленных на упругом стержне // Вестник ВСГУТУ. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2013. – № 6. – С. 5-12.



70. Миждон А.Д., Дабаева М.Ж. Установившиеся вынужденные колебания системы твердых тел, установленных на упругом стержне. // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2015. – №9. – С. 68-75.

71. Миждон А.Д. Теоретические основы вариационного исчисления. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2012. – 195 с.

72. Обобщенные функции в математической физике. Конспект лекций / На основе лекций А.Г. Аленицыным, В.Э. Грикуровым – СПб: Изд-во СПбГУ, 2001.

73. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. 3-е изд. – М.: Наука, 1991. – 256 с. – ISBN 5-02-014137-2.

74. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. 6-е изд. – М.: Ком-Книга, 2007. – 352 с. – ISBN 978-5-484-00857-5.

75. Преображенский И.Н, Грищак В.З. Устойчивость и колебания конических оболочек. – М., 1986. – 240 с.

76. Санкина Ю.Н., Югановой Н.А. Нестационарные колебания стержневых систем при соударении с препятствием / под общ. ред. Ю.Н. Санкина. – Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2010. – 174 с.

77. Селиванов Ю.М., Ключник Д.В. Голографический и конечно-элементный анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Зб. наук. праць ДНУ. – Дніпропетровськ, 2007. – Вип. 8. – С. 140-149.

78. Селиванов Ю.М., Ключник Д.В. Голографический и конечно-элементный анализ собственных колебаний конической оболочки, подкрепленной стрингерами переменной жесткости // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ, 2006. – Т.10. – С. 91-100.

79. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974.

80. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: КомКнига, 2006. – 440 с.
81. Тимошенко С.П. О вынужденных колебаниях призматических стержней. – Киев: тип. С.В. Кульженко, 1909. – 50 с.
82. Тимошенко С.П. Об устойчивости упругих систем // Изв. Киевского политехн. ин-та. – 1910. – № 4. – С. 375-560.
83. Тимошенко С.П. Статистические и динамические проблемы теории упругости. – Киев: Наукова думка, 1975. – 564 с.
84. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – 807 с.
85. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
86. Троценко Ю.В. Свободные колебания цилиндрической оболочки, соединяющей упругие балки. Акустический журнал. 2002. – Т. 5. – №2. – С. 54-72.
87. Ямилова Л.С. Восстановление краевых условий спектральной задачи по ее собственным значениям // Вестник БашГУ. 2005. – №1. – С. 35-38.
88. Ямилова Л.С. Диагностирование нераспадающегося закрепления неоднородного стержня // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2005. – Т.12. – С. 1140-1142.
89. Dirak P. The physical interpretation of quantum dynamics. Proc. Roy. Soc., Sect. A 113 (1926-1927). – P. 621-641.
90. Kukla S., Posiadala B. Free vibrations of beams with elastically mounted masses // J. Sound Vib. 1994. 175(4):557-564.
91. Lin H.Y., Tsai Y.C. Free vibration analysis of a uniform multi-span beam carrying multiple spring-mass systems // J. Sound Vib. 2007. 302:442-456.
92. M. Riesz L'integral de Riemann – Liouville et le probleme de Cauchy, Acta Math. 81 (1949), 1-222.
93. Meirovitch L. Fundamental of vibrations. McGraw-Hill Companies. New York, 2001.

94. Mizhidon A.D., Barguev S.G. Research of own vibrations for one hybrid system of the differential equations // Zbornik radova konferencije MIT. 2013. – P. 464-470.
95. Naguleswaran S. Transverse vibration of an Euler-Bernoulli uniform beam carrying several particles // Int. J. Mech. Sci. 2002. 44:2463-2478.
96. Naguleswaran S. Transverse vibration of an Euler-Bernoulli uniform beam on up a five resilient supports including end // J. Sound Vib. 2003. 261:372-384.
97. Philip D.Cha. Free vibrations of a uniform beam with multiple elastically mounted two-degree-of-freedom systems, Journal of Sound and Vibration 307 (2007) 386-392.
98. Schwartz L. Theorie des distributions, I-II, Paris, 1950-1951.
99. Sobolev S.L. Methode nouvelle a resoudre le problem de Cauchy pour les equations lineares hyperboliques normales, Matem. sb. 1 (1936), 39-72.
100. Su H., Banerjee J.R. Exact natural frequencies of structures consisting of two part beam-mass systems // Struct. Eng.and Mech. 2005. 19(5):551-566.
101. Wu J.-J., Whittaker A.R. The natural frequencies and mode shapes of a uniform cantilever beam with multiple two-DOF spring-mass systems, Journal of Sound and Vibration 227(1999) 361-381.
102. Wu J.S. Alternative approach for free vibration of beams carrying anumber of two-degree of freedom spring-mass systems. // J. Struct. Eng. 2002. 128:1604-1616.
103. Wu J.S., Chou H.M. A new approach for determining the natural frequencies and mode shape of a uniform beam carrying any number of spring masses // J.Sound Vib. 1999. 220:451-468.
104. Wu J.-S., Chen D.-W. Dynamic analysis of uniform cantilever Beam carrying a number of elastically mounted point masses with dampers. Journal of Sound and Vibration. – 2000. – 229 (3) – P.549-578.