

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу До Тиен Тхана

«Многошаговые методы решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и их приложения», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертационная работа посвящена многошаговым методам численного решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ). В работе предложены, обоснованы и реализованы в виде комплексов программ многошаговые методы численного решения сингулярных ИДУ двух видов:

а) уравнений, у которых перед производной стоит функция, обращающаяся в ноль в некоторых точках отрезка интегрирования;

б) систем ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью.

В первом случае уравнения описывают реальные природные процессы, а именно, изменение плотности микроскопических пузырьков в неоднородной жидкости. Во втором случае системы уравнений широко используются при моделировании электрических цепей. При численном решении таких уравнений многие методы приводят либо к неустойчивому процессу, либо к проблемам решения систем линейных алгебраических уравнений с тождественно вырожденной матрицей. Таким образом, разработка новых подходов к численному решению является весьма **актуальной**.

**Структура и содержание диссертации.** Диссертация изложена на 114 страницах, состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы (101 источник) и приложения.

Во **введении** автор приводит библиографический обзор по теме исследования и методологическую основу исследований, обосновывает актуальность выбранной темы. Также во введении дано краткое описание содержания диссертации, указаны цели работы. Приведен перечень российских и международных конференций и семинаров, на которых докладывались вынесенные на защиту научные результаты диссертации, также сформулированные во введении.

В **первой** главе приведены известные сведения из теории матричных пучков и многочленов. Основным результатом данной главы является выделение классов систем ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью (начальная задача), которые имеют единственное решение.

Во **второй** главе предложены оригинальные многошаговые методы решения задач, рассмотренных в первой главе. Проведен детальный анализ данных алгоритмов: доказаны сходимости к точному решению и порядок методов, построены области устойчивости для тестовых уравнений. Проведены многочисленные расчеты тестовых примеров, которые хорошо согласуются с теоретическими выкладками.

В **третьей** главе рассмотрена краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, заданного на полуоси, имеющая особенность в нуле. Такие постановки задач возникают при моделировании в пограничных средах «жидкость-газ». Разработанные к настоящему времени специальные алгоритмы численного решения таких дифференциальных уравнений достаточно трудны для программной реализации и требуют очень малого шага интегрирования, что приводит к большим вычислительным затратам и накоплению ошибок округления. В диссертационной работе эта задача переписана в виде сингулярного ИДУ. Для его численного решения автором предложены и реализованы в виде программных комплексов специальные алгоритмы



первого и второго порядков. Результаты вычислений по этим алгоритмам сравнивались с результатами вычислений по известным алгоритмам, которые для конкретных входных данных требовали шага интегрирования порядка  $10^{-6}$ . Предложенные в диссертации методы при шаге дискретизации  $10^{-2}$  давали практически те же самые результаты, т. е. их реализация требует существенно меньших вычислительных затрат.

В четвертой главе описаны принципы построения математических моделей многоконтурных электрических цепей. Эти модели представляют собой системы ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед производной. В диссертации предполагается, что для таких систем заданы согласованные с правой частью начальные условия. Были проведены численные расчеты трех- и четырехконтурных электрических цепей, представленных в виде графиков. Анализ данных расчетов, показал, что они адекватно отражают физическую сущность явлений.

**Заключение** содержит выводы по диссертационной работе.

В приложение вынесено описание программ, которые были разработаны в третьей главе.

Результаты, изложенные во второй и третьей главах, являются **новыми**. Ранее детальным построением многошаговых методов для сингулярных ИДУ никто не занимался (за исключением частного случая систем ИДУ с матричным пучком  $\lambda A(t) + B(t)$  индекса один). Полученные результаты являются **достоверными и обоснованными**: доказана их сходимость к точному решению, получена оценка скорости сходимости, построены области устойчивости. Доказательства всех утверждений соответствуют современному уровню математической строгости. Численные расчеты хорошо согласуются с теоретическими выкладками.

**Практическая значимость** диссертации обоснована тем, что ряд важных прикладных задач описывается именно такими сингулярными ИДУ. В частности, математическая модель многоконтурных электрических цепей описывается системами ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед производной, а математическая модель, описывающая контур пузыря (капли) в неоднородной жидкости (газе) описывается ИДУ, у которых перед производной стоит функция, обращающаяся в ноль в начальной точке отрезка интегрирования. Алгоритмы, предложенные в диссертации, реализованы в виде программных комплексов, эти программы зарегистрированы и их можно применять для численного решения задач, которые приведены выше.

По диссертации имеются следующие **замечания**.

1. Во второй главе автор обосновывает многошаговые методы систем ИДУ, однако ни слова не говорит о том, как находить стартовые значения  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$  для метода (2.15) (стр. 35).

2. В третьей главе (стр. 63-65) автор предлагает численные методы решения сингулярного ИДУ, которое является интегральной записью сингулярного ОДУ (3.17) с краевыми условиями (3.15), (3.18). На стр. 70 автор пишет, что для задачи (3.15), (3.17), (3.18) в статье [93] проводились вычисления с шагом  $h \leq 10^{-6}$ . Для наглядности следовало бы привести этот алгоритм и более детально пояснить преимущества предлагаемого подхода.

3. Рисунки на стр. 84-85 и 90-91 следовало бы сделать более крупными.

4. Диссертация содержит некоторое количество опечаток, которые, впрочем, не искажают сути написанного.

Сделанные замечания не снижают ценности полученных результатов и не влияют на положительную оценку диссертации в целом.



Основные результаты опубликованы в 15 работах, из которых 3 входят в список журналов, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ для опубликования результатов диссертаций. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Диссертация удовлетворяет паспорту специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а именно, пунктам областей исследования:

п. 2. развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей;

п. 3. разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий;

п. 5. комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Подводя итог, можно на основе изучения диссертации и опубликованных работ по теме диссертации утверждать, что диссертация написана автором самостоятельно и представляет собой законченное научное исследование. Диссертационная работа написана на высоком научном уровне, посвящена исследованию актуальной задачи и содержит новые научные результаты.

Диссертация соответствует требованиям постановления правительства РФ от 24.09.2013 № 842 «О порядке присуждения ученых степеней», включая оценку соответствия п. 9. Она представляет собой законченную научно-квалификационную работу, вносящую заметный вклад в область создания эффективных алгоритмов численного решения различных классов сингулярных ИДУ и в область математического моделирования процессов, которые могут быть описаны ИДУ.

Считаю, что диссертационная работа До Тиен Тхэня удовлетворяет всем требованиям ВАК Министерства образования и науки РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент:  
старший научный сотрудник  
отдела прикладной математики  
Института систем энергетики  
им. Л.А. Мелентьева СО РАН,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент

Е.В. Маркова

Маркова Евгения Владимировна  
664033, Иркутск, ИСЭМ СО РАН,  
ул. Лермонтова, 130  
(3952) 500-646, доп. 260  
markova@isem.irk.ru

