ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу До Тиен Тханя «Многошаговые методы решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и их приложения», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Актуальность темы. Интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ) возникают в различных разделах математической физики: теории упругости в механике, теории пограничных сред «жидкость - газ», колебаний жидкости при действии гравитационных сил в гидродинамике, исследование явления электрической и магнитной поляризации в теории электромагнитного поля и др. Начиная с работ В. Вольтерра и Фредгольма и по настоящее время, математическая теория решения этих уравнений хорошо развита. В технических приложениях такими уравнениями описываются энергосистемы, электрические цепи с существенными нелинейностями (гистерезис, люфты, зоны нечувствительности, нелинейные характеристики полупроводниковых приборов), в которых переходные процессы в системе зависят не только от ее состояния в текущий момент времени, но и от ее поведения во все предыдущие моменты.

Иначе дело обстоит с моделированием и машинным расчетом ИДУ. Первые статьи по данной тематике вышли совсем недавно: 10-15 лет тому назад, и к настоящему времени теория численного решения таких задач мало разработана. Проблема здесь состоит в учете разнотемповости протекания процессов, присущей любой физической системе; а также в учете влияния интегральной составляющей ИДУ на устойчивость численного решения.

Для описания разнотемповости процессов требуется привлечение двух типов функций: быстро убывающих (быстро осциллирующих) с большими производными и медленно убывающих с малыми производными. Это приводит к тому, что матрица при производных (не разрешенная относительно главной части) становится близка к вырожденной, а сами ИДУ сингулярными. Как следствие, при моделировании таких жестких систем ИДУ в нормальной форме Коши для получения устойчивого численного решения шаг интегрирования нужно выбирать очень маленьким, а вычислительные затраты становятся чрезвычайно большими. Кроме того, для систем ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью дополнительно требуется определять достаточные условия существования единственного решения.

Для численного решения жестких обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) (уравнений, в которых нелинейности учитываются алгебраическими связями) применяется два основных подхода:

1) системный метод численного интегрирования Ю.В. Ракитского, который требует представления ДАУ в интегральной форме Коши, и

позволяет через последовательные процедуры фильтрации быстрых составляющих с переменным шагом на каждой итерации получить устойчивое решение;

2) формула Ньютона-Лейбница, через аппроксимацию интегральной составляющей которой строятся линейные многошаговые формулы: на основе явных методов интегрирования - процедуры прогноза, на основе неявных методов - процедуры коррекции. Такие процедуры позволяют не разрешать ДАУ относительного главной части и для класса формул численного интегрирования, которые не требуют знания производных в предшествующие моменты времени, называются формулами дифференцирования назад (ФДН). ФДН (процедуры Гира) до 5 порядка включительно широко используются при исследовании жестких ДАУ (например, в пакетах MatLab, Easy 5). Однако для многошаговых процедур численного решения сингулярных ИДУ формулы прогноза-коррекции требуют модификации интерполяционных полиномов и учета интегральной составляющей для получения устойчивого численного решения. Этим и определяется актуальность выбранной темы исследования.

В диссертационной работе рассмотрены два типа интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Первый тип – это начальная задача для систем ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Для этого типа сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывно-дифференцируемого решения; предложены, обоснованы и программно реализованы оригинальные многошаговые методы, основанные на процедурах прогноза-коррекции и явных квадратурных многошаговых формулах Адамса.

Второй тип – это краевая задача для нелинейного ИДУ, у которого перед производной стоит функция, обращающаяся в нуль в начальной точке интегрирования. Для этого типа предложены численные оптимизационные методы решения, основанные на формулах интегрирования произведений.

Структура и содержание диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, приложения и изложена на 114 страницах.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, цель работы, приведены обзор литературы, апробация, список сокращений и основные результаты, выносимые на защиту.

Первый параграф главы 1 носит вспомогательный характер, в нем приведены известные сведения из теории матричных пучков и многочленов. Основной результат этой главы приведен во втором параграфе. В нем выделен класс систем ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью (начальная задача), в котором существует единственное решение.

Основным результатом второй главы является разработка и обоснование многошаговых методов для решения линейных задач, рассмотренных в первой главе. Приведено доказательство сходимости этих методов к точному решению и оценена скорость их сходимости. На модельном примере построены области устойчивости. Численные расчеты ряда тестовых примеров хорошо согласуются с теоретическими оценками.

Третья глава посвящена численному решению краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, заданного на полуоси, у которого перед производной стоит функция t. Такие задачи описывают профиль пузыря (капли) в неоднородной жидкости (газе). Ряд отечественных и зарубежных специалистов предлагали численные алгоритмы решения таких задач, однако все эти методы требовали очень маленького шага интегрирования, что приводило к большим вычислительным затратам и накоплению ошибок округления. В диссертации предложено представить данную задачу как оптимизационную: в виде сингулярного ИДУ, заданного уже на конечном отрезке интегрирования и с граничным условием на правом конце.

Для численного решения переформулированной таким образом задачи предложены и программно реализованы специальные методы оптимизации порядка один и два. Данные методы при шаге дискретизации $h = 0.05$ дают практически те же самые результаты, что и ранее разработанные алгоритмы, которые для конкретных входных данных требовали шага интегрирования порядка 10^{-6}. Таким образом, предложенный в диссертации подход является весьма перспективным, так как расчеты по этим методам требуют значительно меньших вычислительных затрат.

В четвертой главе приведены необходимые сведения из теории многоконтурных цепей и описаны принципы построения их математических моделей по законам Кирхгофа. Эти модели представляют собой системы ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед производной (начальная задача). Показано, что данные уравнения вписываются в класс ИДУ, которые были рассмотрены в первой главе, и для их численного решения можно применять предложенные во второй главе алгоритмы. Были проведены численные расчеты трех- и четырехконтурных электрических цепей. Результаты представлены в виде графиков. Анализ этих расчетов показал, что они хорошо согласуются с физикой колебательных процессов, протекающих в электрических контурах.

В заключении работы приведены результаты, которые выносятся на защиту, а в приложении приведено описание программ методов оптимизации, разработанных в третьей главе.

Научная новизна. Полагаю, что теоретические результаты, которые изложены в первой, второй и третьей главах являются новыми. Сформулированы более общие достаточные условия существования единственного решения начальной задачи для нелинейных систем ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед производной. Предложены эффективные многошаговые численные методы решения сингулярных ИДУ первого порядка. Они являются **достоверными и обоснованными**: доказана их сходимость к точному решению, получена оценка скорости сходимости вычислительных процедур, построены области устойчивости интерполяционных полиномов до четвертого порядка включительно. Многочисленные расчеты хорошо согласуются с теоретическими выкладками.

Практическая значимость диссертации обоснована тем, что:

1. Выделен класс физических систем, которые описываются сингулярными ИДУ первого порядка. Разработаны эффективные процедуры их решения, позволяющие на тестовых задачах получать численные результаты, совпадающие с решениями известных численных методов, но многократно лучшие по вычислительным затратам.
2. Эффективность предложенных численных методов решения сингулярных ИДУ подтверждена результатами моделирования многоконтурных электрических цепей (первый тип ИДУ) и разработкой программного обеспечения для исследования изменения плотности микроскопических пузырьков в неоднородной жидкости (второй тип ИДУ), о чем имеется свидетельство о государственной регистрации программы на ЭВМ.

Замечания и пожелания.

1. Все главы диссертации следовало бы снабдить выводами.
2. По тексту диссертации и автореферата много ссылок на работы других авторов и сокращений, что затрудняет восприятие полученных результатов. Так доказательство теоремы 1.2.2 (стр. 24 диссертации) следовало бы дать более детально и привести в качестве иллюстрации этого результата несколько примеров.
3. Перед изложением результатов, относящихся к численному решению сингулярного ИДУ (3.19) с условием (3.18), следовало бы привести разностные схемы для исходной задачи (3.14) - (3.16) и более детально пояснить сложности их программной реализации.
4. В автореферате на стр. 12 и в диссертации на стр. 43, 44 соответственно переход от формул (9) или (2.34) к характеристическому уравнению (10) или (2.35) тестового уравнения (8) или (2.33) не расшифрован. Поэтому не ясно, как определяются в интерполяционном полиноме (10) константы $\overline{\alpha}_j, \overline{\beta}_j, \overline{\gamma}_j$ и что принимается за функцию *p*.
5. При определении областей устойчивости относительно параметров z_1, z_2 интерполяционного полинома $\widetilde{C}(t) = \sum_{j=0}^{k+1} a_j t^{k-j+1}$ при k=2 (стр. 45 диссертации) параметры a_1 , a_3 полинома отрицательны, что противоречит условиям критерия устойчивости Рауса-Гурвица. Кроме того, для определения областей устойчивости более удобно применять критерий Льенара-Шипара.
6. Автор допустил ряд грамматических, синтаксических и стилистических ошибок:

а. По тексту диссертации написано: “E. Weinmuller”, следует писать “E. Weinmüller”;

б. На стр.4 (5-я строка) написано: “...неразрешенные”, следует писать: “не разрешенные”; на стр. 92 написано: “...по сравнению над ранее разработанными”, следует писать: “...по сравнению с ранее разработанными”; на стр. 113 написано: “График радиуса пузыря”, следует писать: “График изменения значений радиуса пузыря”;

в. В ряде случаев отсутствуют точки и запятые, например: на стр.27, конец первого предложения раздела 2.1; на стр. 32, 7-я строка снизу; на стр.38 в последней формуле и.т.д.

Однако число этих погрешностей не выходит за рамки разумного.

Основные результаты опубликованы в 14 работах, 3 из которых входят в список журналов, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация удовлетворяет паспорту специальности 05.13.18. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», пунктам областей:

п. 2. “Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей”;

п. 3. “Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий”;

п. 5. “Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента”.

Диссертация соответствует требованиям Постановления правительства РФ от 24.09.2013 № 842 “О порядке присуждения ученых степеней”, включая оценку соответствия п. 9. Она представляет собой законченную научно-квалификационную работу, вносящую заметный вклад в область создания эффективных алгоритмов численного решения различных классов сингулярных ИДУ и в область математического моделирования процессов, которые могут быть описаны этими уравнениями.

Полагаю, что диссертационная работа До Тиен Тханя является законченной научно-исследовательской работой, в которой решены актуальные задачи разработки эффективных численных методов решения сингулярных ИДУ, соответствует требованиям ВАК РФ к кандидатским диссертациям по специальности 05.13.18. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент:

профессор кафедры “Автоматизация производственных процессов” ФГБОУ ВПО “Иркутский государственный университет путей сообщения”,

д.т.н., доцент Сизых Виктор Николаевич

Домашний адрес: 664009, г. Иркутск, ул. Советская, 176/ 197, кв.1.
Телефон: д.т. 83952535767, с.т. 89148830351.
E-mail: sizykh_vn@mail.ru.

Подпись Сизых В.Н.
ЗАВЕРЯЮ:
Начальник общего отдела ИрГУПС
Подпись ______
« 01 » 12 2015 г.