



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

«Дальневосточный федеральный  
университет»  
(ДВФУ)

Суханова ул., д. 8, г. Владивосток, 690950  
Телефон (423) 2433472, Факс (423) 2432315

Эл. почта: [rectorat@dvfu.ru](mailto:rectorat@dvfu.ru)

Сайт: <http://www.dvfu.ru>

ОКПО 02067942, ОГРН 1022501297785

ИНН/КПП 2536014538/253601001

14.11.2015 № 12-06/4062

На № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ

Врио проректора ДВФУ по науке и  
инновациям



О.Л. Щека

13 ноября 2015 г.

## ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу До Тиен Тханя «Многошаговые методы решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и их приложения», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

**Актуальность темы.** Диссертационная работа посвящена разработке, обоснованию и тестированию многошаговых методов для численного решения сингулярных (не разрешенных относительно главной части) интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ). Рассмотрены два типа сингулярностей.

К первому типу относятся ИДУ, у которых перед производной стоит функция, обращающаяся в ноль в некоторых точках отрезка интегрирования. До Тиен Тхань рассмотрел конкретный случай, а именно, когда данная функция равна  $t$ ,  $t \in (0, M]$  и для этого ИДУ задано краевое условие на правом конце. Данная постановка задачи возникла в результате интегральной записи краевой задачи для сингулярного ОДУ, которое описывает профиль пузыря в неоднородной жидкости.

Ко второму типу рассматриваемых в диссертационной работе задач относятся взаимосвязанные интегро-дифференциальные уравнения и интегральные уравнения Вольтерра первого и второго родов, которые могут быть представлены в виде системы ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Такие системы встречаются в ряде важных приложений, в частности, они описывают процессы, протекающие в гидравлических и электрических цепях.

В диссертации для численного решения рассматриваемых задач предложены и обоснованы эффективные многошаговые численные методы, основанные на специальных квадратурных формулах и формулах численного дифференцирования. Ранее возможность применения многошаговых методов для численного решения поставленных задач не рассматривалась, поэтому тема диссертации актуальна.

**Научная новизна работы и основные результаты.** В работе предложены новые подходы к численному решению краевой задачи для одного класса сингулярных ОДУ второго порядка, а именно, с учетом краевых условий данная задача записана в виде сингулярного ИДУ с условием на правом конце. Далее, учитывая

специфику полученной задачи, построены дискретные алгоритмы первого и второго порядков. При реализации предложенных методов возникает проблема решения нелинейных трансцендентных уравнений. Показано, что такие уравнения можно решать достаточно простыми итерационными процессами (метод простой итерации и метод Ньютона), а начальное приближение выбирать как значение решения в предыдущей точке. Приведены примеры численных расчетов.

Для систем ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывно-дифференцируемого решения. Выделен класс задач, для которого предложены и обоснованы новые многошаговые методы, основанные на явном методе Адамса для интегрального слагаемого и на экстраполяционных формулах для главной части. Получена оценка скорости сходимости к точному решению для  $k$ -шаговых методов,  $k < 7$ . Исследованы свойства предложенных методов для ИДУ, которое содержит жесткие и (или) быстроосциллирующие компоненты и построены области устойчивости. Приведены многочисленные расчеты тестовых примеров, которые подтверждают результаты теоретического анализа.

#### **Теоретическая и практическая значимость результатов диссертационного исследования. Рекомендации к применению.**

Теоретическая значимость исследования обоснована тем, что сформулированы достаточные условия существования единственного решения систем ИДУ с тождественно вырожденной главной частью. Выделены классы таких задач, для которых впервые предложены  $k$ -шаговые методы ( $k < 7$ ) и получена оценка скорости сходимости данных методов к точному решению. Построены области устойчивости этих алгоритмов для модельного уравнения.

Предложена интегральная запись одного класса краевой задачи для сингулярных дифференциальных уравнений второго порядка. Для полученной задачи построены новые эффективные алгоритмы первого и второго порядков. Такой подход оказался весьма перспективным: он является достаточно простым в программной реализации и требует значительно меньшего объема вычислительных затрат, чем ранее разработанные методы.

Практическая значимость диссертации обоснована тем, что ряд важных прикладных задач описывается именно такими уравнениями, которые приведены в работе. Например, системы ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед производной описывают процессы, которые протекают в многоконтурных электрических цепях. Другая важная задача – это математическая модель, описывающая контур пузыря (капли) в неоднородной жидкости (газе). Данная модель представляет из себя сингулярное ИДУ (краевая задача). Предложенные в диссертации алгоритмы программно реализованы, программы зарегистрированы и их можно применять для численного решения указанных задач. Кроме этого, материалы диссертации могут быть использованы в учебном процессе при подготовке специалистов по вычислительной математике и математическому моделированию в различных областях и инженеров, специализирующихся в области теории электрических и гидравлических цепей.

Результаты диссертационной работы рекомендуются для использования в следующих организациях: Институт систем энергетики имени Л.А. Мелентьева СО РАН, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Институт вычислительной математики имени М.В. Келдыша РАН, а также в высших учебных заведениях и организациях, которые занимаются моделированием электро- и гидроцепей и моделированием процессов, протекающих в неоднородных жидкостях.

**Соответствие специальности.** Представленная диссертационная работа выполнена в рамках специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и соответствует следующим направлениям исследований из паспорта специальности:

п. 2. «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей»;

п. 3. «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»;

п. 5. «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

**Достоверность и обоснованность результатов и выводов.** Результаты, представленные в диссертации, обоснованы теоретическими выкладками, сформулированы в виде теорем и не противоречат известным научным фактам. Алгоритмы обоснованы и программно реализованы. Численные расчеты тестовых примеров хорошо согласуются с теоретическими выкладками, а численные расчеты прикладных задач, решение которых непредставимо в аналитическом виде, не противоречат физическому смыслу и согласуются с результатами расчетов, которые были получены ранее другими, более трудоемкими методами.

Изложение материала последовательно, достаточно подробно и проиллюстрировано на ряде примеров и численных расчетов. Результаты работы докладывались на ряде конференций и семинаров.

Основные результаты опубликованы в 14 работах, из которых 3 входят в список журналов, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Диссертация соответствует требованиям п.9 Положения о присуждении ученых степеней – представляет собой законченную научно-квалификационную работу, в которой были решены новые важные задачи, имеющие существенное значение в области создания эффективных алгоритмов численного решения различных классов интегро-дифференциальных уравнений и в области математического моделирования процессов, протекающих в средах «жидкость-газ» и электрических цепях.

**По материалам диссертационной работы имеются следующие замечания.**

1. В работе присутствует ряд синтаксических и грамматических ошибок. Например,

стр. 4, строка 5: написано «неразрешенные относительно производной», нужно «не разрешенные относительно производной»;

стр. 32, в строке 7 снизу нет запятой перед «... и мы его модифицировали»;

стр. 57, в первой строке нет запятой перед «... а также в других задачах»;

стр. 113, в листинге А.5 в строках 2 и 15 снизу неправильно написано слово «Плотность».

Впрочем, число таких ошибок не выходит за рамки.

2. По тексту изложения фигурируют словосочетания «радиус пузыря» и «профиль пузыря». Не указано, как связаны между собой эти понятия.

3. Доказательство теоремы 1.2.2 приведено очень сжато.

4. На стр. 26 написано: «Для иллюстрации приведем несколько примеров», однако фактически приведен только один пример.

5. Численные расчеты на стр. 46-49 приведены без пояснений и выводов.

6. Во второй главе следовало бы привести конкретный вид коллокационных разностных схем, разработанных ранее для численного решения сингулярного ОДУ второго порядка, которое описывает профиль пузыря.

7. На стр. 77 написано: «Для примера напишем уравнение цепи, которая приведена на рис. 4.4. Здесь ставится задача исследовать цепь при включении источника напряжения  $u_3$ ». Однако на рис. 4.4 отсутствует объект с обозначением  $u_3$ .

Сделанные замечания **не носят принципиального характера** и не влияют общую положительную оценку работы.

На основании вышеизложенного можно **заключить**, что диссертация До Тиен Тханя «Многошаговые методы решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и их приложения» является научно-квалификационной работой, которая соответствует требованиям Министерства образования и науки РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, установленным «Положением о порядке присуждения ученых степеней», а ее автор До Тиен Тхань заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Отзыв обсужден и утвержден 9 ноября 2015 года на семинаре кафедры информатики, математического и компьютерного моделирования ШЕН Дальневосточного федерального университета. Присутствовало на семинаре 15 человек. Результаты голосования: «за» - 15, «против» - 0, «воздержалось» - 0, протокол N3 от 9.11.2015.

**Отзыв составил:**

Д.ф.-м.н., профессор Чеботарев Александр Юрьевич

Адрес: 690041 Владивосток, ул.Радио, 7

Телефон: 89147064922

E-mail: chebotarev.ayu@dvfu.ru

ФГАОУ ВПО «Дальневосточный федеральный университет»

Зав.кафедрой информатики, математического  
и компьютерного моделирования ШЕН

А.Ю.Чеботарев

