

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
ДОРЖИ БАНЗАРОВА»

На правах рукописи

Казьмин Иван Дмитриевич

**МЕТОДЫ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В  
СИСТЕМАХ, ЛИНЕЙНЫХ ПО УПРАВЛЕНИЮ**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор А.С. Булдаев

Улан-Удэ

2024

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ЗАДАЧИ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ.....	11
1.1. Линейная по управлению задача оптимального управления.....	11
1.2. Задачи о неподвижной точке принципа максимума.....	14
1.3. Особые экстремальные управления.....	17
1.4. Билинейная задача оптимального управления.....	23
1.5. Примеры.....	29
ГЛАВА 2. МЕТОДЫ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ПРИНЦИПА МАКСИМУМА.....	40
2.1. Методы простых итераций.....	40
2.2. Методы неподвижных точек принципа максимума на основе операции максимизации.....	41
2.3. Методы неподвижных точек принципа максимума на основе операции проектирования.....	45
2.4. Методы неподвижных точек принципа максимума в билинейной задаче оптимального управления.....	53
2.5. Примеры.....	56
ГЛАВА 3. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК.....	61
3.1. Вычислительные особенности.....	61
3.2. Билинейная задача.....	61
3.3. Задача о колебательных движениях маятника.....	64
3.4. Нелинейная задача с особыми управлениями.....	67
3.5. Задача минимизации нормы конечного состояния системы.....	70

3.6. Задача оптимизации квантовой системы.....	75
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	83
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	86

## Введение

Многие математические модели динамических процессов в области биологии, экономики, медицины, энергетики описываются системами, линейными по управлению. Например, в работе [66] предложены математические модели управления социально-экономической системой в условиях массового заболевания. В рамках модели рассматриваются как социально-биологические факторы, характеризующие распространение заболевания и реакцию популяции на него, так и экономические факторы, к которым относятся меры контроля распространения заболевания и борьбы с ним. При этом, в случае необходимости выбора некоторой стратегии из множества возможных, возникает проблема определения наилучшего варианта. Для её разрешения необходимо ввести критерий качества, позволяющий определить оптимальный вариант управления системой на множестве управленческих решений [95, 105 - 106, 113].

Для решения линейных по управлению задач оптимального управления могут применяться разные подходы. Распространенные методы оптимального управления основываются на условиях оптимальности и улучшения управления. Необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума были получены в 1960-х годах Понтрягиным Л.С. и его учениками [5, 32, 73 - 74]. Данная теория получила развитие в работах [1, 3, 14, 25, 27 - 28, 31, 43, 47, 63, 67, 69, 78 - 79, 94, 108]. Достаточные условия оптимальности управляемых процессов, позволяющие находить глобальное решение в задачах оптимального управления, были разработаны Кротовым В.Ф. [61]. Полученные Кротовым В.Ф. достаточные условия оптимальности послужили основой для построения методов принципа расширения [10, 39, 62]. Позже на их основе были разработаны методы слабого и сильного улучшения первого и второго порядков [38, 40, 42, 86].

Известный подход основывается на применении методов математического программирования к задачам, получающимся после сведения исходной задачи с помощью различных способов дискретизации как по состоянию, так и по управлению [15, 58, 75, 107]. Также следует выделить градиентные методы, такие как метод условного градиента и метод проекции градиента [28, 31, 72, 90]. Еще одним подходом к решению линейных по управлению систем является метод динамического программирования [12 - 13, 56, 65].

Также можно выделить исследования и вычислительные методы в других классах задач: задачи управления гибридными системами [29 - 30, 41, 48, 68], задачи с импульсными управлениями и разрывными траекториями [44 - 45], методы глобального поиска решения в невыпуклых задачах оптимизации в работах Стрекаловского А.С. [83 - 85, 110 - 112].

Отдельным аспектам изучения линейно-квадратичных задач оптимального управления посвящен ряд исследований, ссылки на которые можно найти в работах [57, 93]. В работе [79] на основе построения нестандартных формул приращения целевого функционала, не содержащих остаточных членов разложений, разработаны эффективные методы нелокального улучшения управления в линейно-квадратичных задачах. Улучшение управления достигается решением специальных задач Коши для фазовых и сопряженных систем в пространстве состояний. Алгоритмическое и численное решение линейно-квадратичных задач оптимального управления можно найти в работах [4, 25 - 26, 33 - 36, 45 - 46, 60, 63 - 64, 70 - 71, 80, 87 - 89, 90 - 91].

В работе [102] рассматривается подход к решению задачи оптимального управления методом синтезированного управления. Синтезированное управление является универсальным подходом к решению задачи оптимального управления в классе реализуемых систем, однако в каждом конкретном случае оно может иметь несколько решений. Впервые задача синтеза стабилизации движения по оптимальной траектории была рассмотрена в работе [103]. Была получена система управления, включающая эталонную модель для генерации оптимальной траектории во времени. Исследования показали, что система стабилизации зависит от вида оптимальной траектории. Для устранения данного недостатка в работе [104] было предложено использовать универсальную систему стабилизации. Универсальность системы стабилизации заключается в том, что для конкретного объекта получается одна система стабилизации движения для различных типов траекторий.

В работах Булдаева А.С. [17, 18, 97] предлагается подход, основанный на решении специальных операторных задач о неподвижной точке в пространстве управлений. Новый подход неподвижных точек [19] применяется и развивается более десяти лет для различных классов непрерывных, дискретных и дискретно-непрерывных задач оптимального управления, в том числе включающих терминальные и фазовые

ограничения, смешанные управляющие функции и параметры, нефиксированное время окончания процесса управления и другие особенности.

Для рассматриваемого класса линейных по управлению задач оптимального управления поиск экстремальных решений существенно усложняется в особых задачах оптимального управления, в которых необходимые условия оптимальности в форме классического принципа максимума не позволяют определять экстремальные решения. В частности, метод краевой задачи принципа максимума и градиентные методы становятся не эффективными в особых задачах.

В настоящей работе в классе линейных по управлению задач оптимального управления разрабатываются новые методы оптимизации на основе представления условий принципа максимума в форме задач о неподвижной точке.

**Целью диссертационной работы** является разработка условий принципа максимума в форме операторных и поточечных задач о неподвижной точке и методов поиска экстремальных управлений, в том числе особых экстремальных управлений, в классе задач оптимального управления, линейных по управлению.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Конструирование операторных и поточечных задач о неподвижной точке принципа максимума.
2. Определение и анализ понятий особых управлений на основе новых форм принципа максимума в виде задач о неподвижной точке
3. Разработка и обоснование итерационных методов оптимизации.
4. Сравнительный анализ эффективности предлагаемых методов оптимизации на тестовых и модельных задачах оптимального управления.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Условия принципа максимума в форме операторных и поточечных задач о неподвижной точке в классе задач оптимального управления, линейных по управлению.
2. Понятия особого управления на основе разработанных условий принципа максимума в виде задач о неподвижной точке.
3. Итерационные методы оптимизации линейных по управлению систем на основе задач о неподвижной точке.

4. Автоматизированные комплексы алгоритмов и программ, реализующие разработанные методы неподвижных точек принципа максимума для поиска экстремальных управлений.

**Работа соответствует пунктам 1, 2, 3 паспорта научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:**

П. 1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (физико-математические науки).

П. 2. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

П. 3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

**Методы исследования.** При выполнении диссертационной работы использовался математический аппарат теории и методов оптимального управления, функционального и численного анализа. Программная реализация итерационных методов осуществлялась на языке программирования Fortran версии PowerStation 4.0.

**Научная новизна результатов, выносимых на защиту:**

1. Получены новые формы принципа максимума в виде задач о неподвижной точке в классе задач оптимального управления, линейных по управлению и доказана их эквивалентность классическим условиям принципа максимума.

2. Определены новые понятия особых управлений на основе новых форм принципа максимума в виде задач о неподвижной точке и доказана их эквивалентность классическому определению особого управления в классе задач оптимального управления, линейных по управлению.

3. Разработаны новые итерационные алгоритмы и вычислительные технологии на основе задач о неподвижной точке для поиска экстремальных управлений, в том числе особых управлений, и доказаны теоремы сходимости итерационных алгоритмов.

**Теоретическая и практическая значимость результатов.** Полученные в работе результаты вносят определенный вклад в теорию и методы оптимизации в линейных по управлению задачах оптимального управления. Разработанное алгоритмическое и программное обеспечение может использоваться в экспертных автоматизированных системах принятия решений на основе математических моделей оптимального управления.

Полученные научные результаты опубликованы в рецензируемых зарубежных и российских журналах, материалах международных и российских конференций и могут быть использованы в учебных курсах при подготовке и повышении квалификации профильных специалистов.

**Достоверность** полученных результатов подтверждается строгим обоснованием теоретических понятий и утверждений, проведенными численными экспериментами в рамках тестовых и модельных задач.

**Апробация результатов.** Результаты работы были представлены и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

— VII Международная конференция «Математика, ее приложения и математическое образование» (г. Улан-Удэ, оз. Байкал, 29 июня-4 июля 2020 г.);

— 3-я Международная конференция «Динамические системы и компьютерные науки: Теория и Приложения» (DYSC 2021, г. Иркутск, 13-17 сентября 2021 г.);

— The XII International Conference "Optimization and Applications" (OPTIMA-2021, Petrovac, Montenegro, September 27-October 1, 2021);

— The 7th International Conference on Optimization, Simulation and Control ICOSC-2022 (Ulaanbaatar, Mongolia, June 20-22, 2022) ;

— Научная конференция с международным участием «Математическое образование в условиях цифровизации» (г. Улан-Удэ, оз. Байкал, 1-3 июля 2022 г.);

— VIII Международная конференция «Проблемы механики современных машин» (г. Улан-Удэ, оз. Байкал, 4-9 июля 2022 г.).

— 4-я Международная конференция «Динамические системы и компьютерные науки: Теория и Приложения» (DYSC 2022, г. Иркутск, 19-23 сентября 2022 г.);

— The 3th International Conference on Applied Sciences and Engineering ICASE-2023 (Ulaanbaatar, Mongolia, June 16-17, 2023) ;

— VIII Международная конференция «Математика, ее приложения и математическое образование» (г. Улан-Удэ, оз. Байкал, 26 июня-1 июля 2023 г.);

— The International Conference on Computational and Applied Mathematics ICCAM-2023 (Ulaanbaatar, Mongolia, September 22-24, 2023) ;

— 5-я Международная конференция «Динамические системы и компьютерные науки: Теория и Приложения» (DYSC 2023, г. Иркутск, 18-23 сентября 2023 г.);



— 6-я Международная конференция «Динамические системы и компьютерные науки: Теория и Приложения» (DYSC 2024, г. Иркутск, 16-20 сентября 2024 г.);

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 16 работах, включая статьи в журналах, трудах конференций, симпозиумов, семинаров [20-24,49-54,98-101] и свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [77]. В том числе 6 статей в изданиях, включенных в Перечень ВАК Минобрнауки РФ [23-24,98-101].

**Объем и структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Страниц — 94, рисунков — 9, таблиц — 4, в списке литературы 113 наименований.

**Глава 1** посвящена построению и анализу новых форм принципа максимума в виде задач о неподвижной точке в системах, линейных по управлению.

В параграфе 1.1 рассматривается постановка класса линейных по управлению задач оптимального управления. Определяются используемые обозначения и отображения на основе операций максимизации и проектирования, с помощью которых формулируются известные условия принципа максимума и понятия особых управлений в рассматриваемом классе линейных по управлению задач.

В параграфе 1.2. конструируются новые формы принципа максимума в виде операторных задач о неподвижной точке в пространстве управлений. Доказываются теоремы об эквивалентности рассматриваемых форм принципа максимума известному условию принципа максимума.

В параграфе 1.3 определяются понятия особых экстремальных управлений на основе сконструированных задач о неподвижной точке. Доказываются утверждения об эквивалентности введенных понятий с известным определением особого экстремального управления в рассматриваемом классе линейных по управлению задач.

В параграфе 1.4 рассматривается подкласс билинейных задач оптимального управления. С помощью рассматриваемых обозначений постановки билинейных задач формулируются условия принципа максимума и условия улучшения управления в форме задач о неподвижной точке, понятия особых управлений, которые используются для конструирования итерационных методов поиска экстремальных управлений в рассматриваемом подклассе билинейных задач.

В параграфе 1.5 проводится анализ экстремальных управлений на тестовых примерах. Иллюстрируются индивидуальные подходы к поиску особых экстремальных управлений в случаях, когда известный прием последовательного дифференцирования тождества, определяющего особые управления, не работает. Представляются условия принципа максимума в форме задач о неподвижной точке, которые являются основой для конструирования новых итерационных методов для поиска экстремальных управлений.

**В Главе 2** конструируются и анализируются итерационные методы решения задач о неподвижной точке.

В параграфе 2.1 описывается метод последовательных приближений с анализом сходимости для решения общей операторной задачи о неподвижной точке.

В параграфах 2.2 и 2.3 соответственно конструируются и анализируются методы решения задач о неподвижной точке принципа максимума на основе операций максимизации и на основе операции проектирования.

В параграфе 2.4 проводится сравнительных анализ с известными методами и анализ сходимости методов решения задач о неподвижной точке в классе билинейных управляемых систем.

В параграфе 2.5 приводятся модельные примеры вычисления итерационных приближений управления, иллюстрирующие сравнительную эффективность предлагаемых методов.

**В главе 3** представлены результаты численных расчетов на тестовых и модельных задачах: билинейная задача с особыми управлениями, задача о колебательных движениях маятника, нелинейная задача с аналитически определяемыми значениями особых управлений, задача минимизации нормы конечного состояния линейной по управлению системы, задача оптимизации квантовой системы.

**В заключении** представлены основные научные результаты работы.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Александру Сергеевичу Булдаеву за обсуждение и конструктивные замечания к работе.

## Глава 1. Задачи о неподвижной точке

### 1.1. Линейная по управлению задача оптимального управления

Рассматривается класс линейных по управлению задач оптимального управления:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T (\langle a(x(t), t), u(t) \rangle + d(x(t), t)) dt \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (1.1.1)$$

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u(t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset R^m, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1.1.2)$$

в котором  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  - вектор состояния системы,  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  - вектор управления. В качестве допустимых управлений  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  рассматривается множество  $V$  кусочно- непрерывных функций на интервале  $T$  со значениями в компактном и выпуклом множестве  $U \subset R^m$ . Начальное состояние  $x^0$  и интервал  $T$  заданы. Функция  $\varphi(x)$  дифференцируема на  $R^n$ , функции  $a(x, t)$ ,  $d(x, t)$ ,  $A(x, t)$ ,  $b(x, t)$  дифференцируемы по переменной  $x$  и непрерывны по переменной  $t$  на множестве  $R^n \times T$ .

Функция Понтрягина с сопряженной переменной  $\psi$  в задаче (1.1.1), (1.1.2) представляется в следующем виде:

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + \langle H_1(\psi, x, t), u \rangle,$$

$$H_0(\psi, x, t) = \langle \psi, b(x, t) \rangle - d(x, t), \quad H_1(\psi, x, t) = A^T(x, t)\psi - a(x, t).$$

Стандартная сопряженная система рассматривается в следующей форме:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \quad (1.1.3)$$

Введем следующие обозначения для  $v \in V$ :

- $x(t, v)$ ,  $t \in T$  - решение системы (1.1.2) при  $u(t) = v(t)$ ;
- $\psi(t, v)$ ,  $t \in T$  - решение системы (1.1.3) при  $x(t) = x(t, v)$ ,  $u(t) = v(t)$ .

Будем использовать следующее обозначение частного приращения произвольной вектор-функции  $h(y_1, \dots, y_l)$  по переменным  $y_{s_1}$ ,  $y_{s_2}$ :

$$\Delta_{z_{s_1}, z_{s_2}} h(y_1, \dots, y_l) = h(y_1, \dots, z_{s_1}, \dots, z_{s_2}, \dots, y_l) - h(y_1, \dots, y_{s_1}, \dots, y_{s_2}, \dots, y_l).$$

Стандартная формула приращения функционала [28, 31] на управлениях  $u \in V$ ,  $v \in V$  в рассматриваемом классе задач (1.1.1), (1.1.2) может быть представлена в

следующем виде:

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_T \langle H_1(\psi(t, u), x(t, u), t), v(t) - u(t) \rangle dt + o\left(\int_T \|v(t) - u(t)\| dt\right) \quad (1.1.4)$$

Формула приращения (1.1.4) является основой для получения известных условий принципа максимума.

Рассмотрим отображение на основе операции максимизации:

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} \langle H_1(\psi, x, t), w \rangle, \quad x \in R^n, \psi \in R^n, t \in T.$$

В частном случае для скалярного управления ( $m=1$ ) с областью значений  $U = [u^-, u^+]$  (двусторонние ограничения) имеем:

$$u^*(\psi, x, t) = \text{sign}(H_1(\psi, x, t)) = \begin{cases} u^-, & H_1(\psi, x, t) < 0, \\ u^+, & H_1(\psi, x, t) > 0, \\ w \in U, & H_1(\psi, x, t) = 0. \end{cases}$$

При этом если  $U = [-l, l]$ , то отображение  $u^*$  можно представить в форме:

$$u^*(\psi, x, t) = l \cdot \text{sign}(H_1(\psi, x, t)).$$

С помощью отображения  $u^*$  условие известного принципа максимума для управления  $u \in V$  в задаче (1.1.1), (1.1.2) можно записать в виде:

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T. \quad (1.1.5)$$

Обозначим  $P_Y$  - оператор проектирования на множество  $Y \subset R^k$  в евклидовой норме:

$$P_Y(z) = \arg \min_{y \in Y} (\|y - z\|), \quad z \in R^k.$$

Важным свойством оператора проектирования является выполнение неравенства:

$$\langle y - P_Y(z), z - P_Y(z) \rangle \leq 0, \quad y \in Y.$$

Определим отображение  $u^\alpha$  с параметром  $\alpha > 0$  на основе операции проектирования:

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(w + \alpha H_1(\psi, x, t)), \quad x \in R^n, \psi \in R^n, w \in U, t \in T.$$

С помощью отображения  $u^\alpha$  условие принципа максимума (1.1.5) в задаче (1.1.1), (1.1.2) можно записать в эквивалентном виде:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T. \quad (1.1.6)$$

Управление  $u \in V$ , удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности, называется экстремальным. Классическим подходом к поиску экстремальных управлений является поиск решения известной краевой задачи принципа максимума [73], принимающей в задаче (1.1.1), (1.1.2) следующий вид:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^*(\psi(t), x(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.1.7)$$

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \quad (1.1.8)$$

Трудности решения краевой задачи принципа максимума (1.1.7), (1.1.8) известными методами (метод стрельбы, метод линеаризации, конечно-разностный метод), в том числе и в случае гладкости и однозначности правых частей краевой задачи, связаны с вычислительной неустойчивостью методов, обусловленной наличием положительных вещественных значений собственных чисел соответствующей матрицы Якоби.

Альтернативный подход состоит в построении релаксационной последовательности управлений, являющихся решениями последовательных задач улучшения управления. Здесь наиболее известными являются градиентные методы [28,31].

Поиск экстремальных решений существенно усложняется в особых задачах оптимального управления, в которых необходимые условия оптимальности в форме классического принципа максимума не позволяют определять экстремальные решения. В частности, метод краевой задачи принципа максимума и градиентные методы становятся не эффективными в особых задачах.

Рассмотрим функцию переключения:

$$g(\psi, x, t) = H_1(\psi, x, t).$$

В соответствии с известным определением особого управления [28], управление  $u \in V$  в задаче (1.1.1), (1.1.2) назовем особым, если для этого управления существует интервал времени  $[\theta_1, \theta_2] \subset T$  ненулевой меры, на котором выполняется условие:

$$g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0.$$

Для особого экстремального управления условия (1.1.5) и (1.1.6) на особом интервале выполняются тривиально и не могут служить для определения значений экстремального управления на особом интервале. Задача (1.1.1), (1.1.2) называется особой, если существует хотя бы одно особое экстремальное управление.

## 1.2. Задачи о неподвижной точке принципа максимума

Определим отображения  $X$ ,  $\Psi$ ,  $V^*$  следующими соотношениями:

$$X(u) = x, u \in V, x(t) = x(t, u), t \in T,$$

$$\Psi(u) = \psi, u \in V, \psi(t) = \psi(t, u), t \in T,$$

$$V^*(\psi, x) = v^*, \psi \in C(T), x \in C(T), v^*(t) = u^*(\psi(t), x(t), t), t \in T,$$

где  $C(T)$  — пространство непрерывных на  $T$  функций.

С помощью введенных отображений условие принципа максимума (1.1.5) можно представить как задачу о неподвижной точке с оператором управления  $G_1^*$ :

$$u = V^*(\Psi(u), X(u)) = G_1^*(u), u \in V. \quad (1.2.1)$$

Введем оператор  $X^*$ :

$$X^*(\psi) = x, \quad \psi \in C(T), x \in C(T),$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  — решение специальной фазовой задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^*(\psi(t), x(t), t) + b(x(t), t), x(t_0) = x^0.$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления  $G_2^*$ :

$$u = V^*(\Psi(u), X^*(\Psi(u))) = G_2^*(u), u \in V. \quad (1.2.2)$$

Далее введем оператор  $\Psi^*$ :

$$\Psi^*(x) = \psi, \quad x \in C(T), \psi \in C(T),$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  — решение специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления  $G_3^*$ :

$$u = V^*(\Psi^*(X(u)), X(u)) = G_3^*(u), u \in V. \quad (1.2.3)$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 1.1.** Задачи о неподвижной точке (1.2.2) и (1.2.3) являются эквивалентными условию принципа максимума (1.1.5).

Покажем, что задача о неподвижной точке (1.2.2) эквивалентна условию принципа максимума (1.1.5).

Действительно, пусть  $u \in V$  удовлетворяет условию (1.1.5), т. е. пара  $(x(t, u), \psi(t, u))$ ,  $t \in T$  является решением краевой задачи (1.1.7), (1.1.8).

Это значит, что функция  $x(t, u)$ ,  $t \in T$  является решением задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^*(\psi(t, u), x(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0,$$

т. е.  $X(u) = X^*(\Psi(u))$ .

Следовательно, получаем, что

$$V^*(\Psi(u), X(u)) = V^*(\Psi(u), X^*(\Psi(u))) = u.$$

Обратно, пусть  $u \in V$  является решением уравнения (1.2.2), т. е.

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^*(\psi(t, u), x(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Следовательно,  $x(t) = x(t, u)$ ,  $t \in T$ , т.е.  $X^*(\Psi(u)) = X(u)$ . Получаем следующее:

$$V^*(\Psi(u), X^*(\Psi(u))) = V^*(\Psi(u), X(u)) = u.$$

Аналогично покажем эквивалентность задачи о неподвижной точке (1.2.3) и условия принципа максимума (1.1.5).

Действительно, пусть  $u \in V$  удовлетворяет условию (1.1.5), т. е. пара  $(x(t, u), \psi(t, u))$ ,  $t \in T$  является решением краевой задачи (1.1.7), (1.1.8).

Это значит, что функция  $\psi(t, u)$ ,  $t \in T$  является решением задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^*(\psi(t), x(t, u), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)),$$

т. е.  $\Psi(u) = \Psi^*(X(u))$ .

Следовательно, получаем, что

$$V^*(\Psi(u), X(u)) = V^*(\Psi^*(X(u)), X(u)) = u.$$

Обратно, пусть  $u \in V$  является решением уравнения (1.2.3), т. е.

$$u(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t), \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^*(\psi(t), x(t, u), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)).$$

Следовательно,  $\psi(t) = \psi(t, u)$ ,  $t \in T$ , т.е.  $\Psi^*(X(u)) = \Psi(u)$ . Получаем следующее:

$$V^*(\Psi^*(X(u)), X(u)) = V^*(\Psi(u), X(u)) = u.$$

Доказательство окончено.

Введем вспомогательный оператор  $V^\alpha$ ,  $\alpha > 0$  соотношением:

$$V^\alpha(\psi, x, u) = v^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad u \in V, \quad v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

где  $C(T)$  — пространство непрерывных на  $T$  функций.

С помощью введенных отображений условие принципа максимума (1.1.6) можно представить как задачу о неподвижной точке с оператором управления  $G_1^\alpha$ :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = G_1^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (1.2.4)$$

Введем отображение  $X^\alpha$  следующим образом:

$$X^\alpha(\psi, u) = x, \quad \psi \in C(T), \quad u \in V,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления  $G_2^\alpha$ :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u) = G_2^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (1.2.5)$$

Построим оператор  $\Psi^\alpha$  по правилу:

$$\Psi^\alpha(x, u) = \psi, \quad x \in C(T), \quad u \in V,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  — решение сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления  $G_3^\alpha$ :

$$u = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u) = G_3^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (1.2.6)$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 1.2.** Задачи о неподвижной точке (1.2.5) и (1.2.6) являются эквивалентными условию принципа максимума (1.1.6).

Условие принципа максимума в проекционной форме (1.1.6) является эквивалентным следующей дифференциально-алгебраической краевой задаче:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u(t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.2.7)$$

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)), \quad (1.2.8)$$

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T.$$

Покажем, что задача о неподвижной точке (1.2.5) эквивалентна условию принципа максимума (1.1.6).

Действительно, пусть  $u \in V$  удовлетворяет условию (1.1.6), т. е. тройка  $(x(t, u), \psi(t, u), u(t))$ ,  $t \in T$  является решением краевой задачи (1.2.7), (1.2.8). Это значит, что функция  $x(t, u)$ ,  $t \in T$  является решением задачи Коши



$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0,$$

т. е.  $X(u) = X^\alpha(\Psi(u), u)$ .

Следовательно, получаем, что

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u).$$

Обратно, пусть  $u \in V$  является решением уравнения (1.2.5), т. е.

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Следовательно,  $x(t) = x(t, u)$ ,  $t \in T$ , т. е.  $X^\alpha(\Psi(u), u) = X(u)$ . Получаем следующее:

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u) = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u).$$

Аналогично покажем эквивалентность задачи о неподвижной точке (1.2.6) и условия принципа максимума (1.1.6).

Действительно, пусть  $u \in V$  удовлетворяет условию (1.1.6), т. е. тройка  $(x(t, u), \psi(t, u), u(t))$ ,  $t \in T$  является решением краевой задачи (1.2.7), (1.2.8).

Это значит, что функция  $\psi(t, u)$ ,  $t \in T$  является решением задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)).$$

т. е.  $\Psi(u) = \Psi^\alpha(X(u), u)$ .

Следовательно, получаем, что

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u).$$

Обратно, пусть  $u \in V$  является решением уравнения (1.2.6), т. е.

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)).$$

Следовательно,  $\psi(t) = \psi(t, u)$ ,  $t \in T$ , т. е.  $\Psi^\alpha(X(u), u) = \Psi(u)$ . Получаем следующее:

$$u = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u) = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u).$$

Доказательство окончено.

### 1.3. Особые экстремальные управления

Операторная задача о неподвижной точке (1.2.2) может быть представлена в следующей поточечной форме:

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^*(\psi(t, u), x(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (1.3.1)$$

Для управления  $u \in V$  введем функцию переключения  $g_1(x, t) = g(\psi(t, u), x, t)$ . В соответствии с известным определением особого решения задачи Коши [79], решение  $x(t)$ ,  $t \in T$  задачи Коши (1.3.1) назовем особым, если существует интервал времени  $[\theta_1, \theta_2] \subset T$  ненулевой меры, на котором выполняется условие:

$$g_1(x(t), t) = 0.$$

Управление  $u \in V$  назовем особым для задачи Коши (1.3.1), если существует особое решение  $x(t)$ ,  $t \in T$  этой задачи Коши.

Экстремальное управление  $u \in V$ , удовлетворяющее условию (1.2.2), называется особым, если управление  $u \in V$  является особым для соответствующей задачи Коши (1.3.1).

Для особого экстремального управления  $u \in V$ , удовлетворяющего условию (1.2.2) с соответствующей задачей Коши (1.3.1), соотношение  $u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t)$  не позволяет определить значения экстремального управления на особом интервале.

Покажем, что понятие особого экстремального управления, удовлетворяющего условию (1.1.5), и понятие особого экстремального управления, удовлетворяющего условию (1.2.2) с соответствующей задачей Коши (1.3.1), являются эквивалентными. Докажем следующее утверждение.

**Лемма 1.1.** Особое экстремальное управление  $u \in V$ , удовлетворяющее условию (1.1.5), является особым экстремальным управлением, удовлетворяющим условию (1.2.2) с соответствующей задачей Коши (1.3.1), и наоборот. При этом соответствующие особые интервалы совпадают.

Действительно, пусть экстремальное управление  $u \in V$  является особым на основе функции переключения  $g(\psi, x, t)$ , т.е.  $g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$ . В силу экстремальности управления  $u \in V$  выполняется соотношение  $u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t)$ . Следовательно, функция  $x(t) = x(t, u)$ ,  $t \in T$  удовлетворяет задаче Коши (1.3.1) для соотношения  $u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t)$ . При этом получаем  $g_1(x(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$ .

Обратно, пусть экстремальное управление  $u \in V$ , удовлетворяющее условию (1.2.2) с соответствующей задачей Коши (1.3.1), является особым, т.е.  $g_1(x(t), t) = g(\psi(t, u), x(t), t) = 0$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$ , где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением задачи Коши (1.3.1). В силу системы (1.3.1) и условия экстремальности  $u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t)$  имеем  $x(t) = x(t, u)$ ,  $t \in T$ . Следовательно, получаем  $0 = g_1(x(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t)$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$  и условие экстремальности  $u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t)$ .

Доказательство окончено.

Задача о неподвижной точке (1.2.5) в поточечной форме принимает вид:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (1.3.2)$$

Решение  $x(t)$ ,  $t \in T$  задачи Коши (1.3.2) назовем особым, если существует интервал времени  $[\theta_1, \theta_2] \subset T$  ненулевой меры, на котором выполняется условие:

$$g_1(x(t), t) = 0.$$

Управление  $u \in V$  назовем особым для задачи Коши (1.3.2), если существует особое решение  $x(t)$ ,  $t \in T$  этой задачи Коши.

Экстремальное управление  $u \in V$ , удовлетворяющее условию (1.2.5), называется особым, если управление  $u \in V$  является особым для соответствующей задачи Коши (1.3.2).

Для особого экстремального управления, удовлетворяющего условию (1.2.5) с соответствующей задачей Коши (1.3.2), соотношение  $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t)$  выполняется тождественно и не может служить для определения значений экстремального управления на особом интервале.

Имеет место утверждение, аналогичное Лемме 1.1.

**Лемма 1.2.** Особое экстремальное управление, удовлетворяющее условию (1.1.6), является особым экстремальным управлением, удовлетворяющим условию (1.2.5) с соответствующей задачей Коши (1.3.2), и наоборот. При этом соответствующие особые интервалы совпадают.

Доказательство с очевидными изменениями повторяет доказательство Леммы 1.1.

Действительно, пусть экстремальное управление  $u \in V$  является особым на основе функции переключения  $g(\psi, x, t)$ , т.е.  $g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$ . В силу экстремальности управления  $u \in V$  выполняется соотношение  $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$ . Следовательно, функция  $x(t) = x(t, u)$ ,  $t \in T$  удовлетворяет задаче Коши (1.3.2) для соотношения  $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$ . При этом получаем  $g_1(x(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$ .

Обратно, пусть экстремальное управление  $u \in V$ , удовлетворяющее условию (1.2.5) с соответствующей задачей Коши (1.3.2), является особым, т.е.  $g_1(x(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$ , где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением задачи Коши (1.3.2). В силу системы (1.3.2) и условия экстремальности  $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$  имеем  $x(t) = x(t, u)$ ,  $t \in T$ . Следовательно, получаем  $0 = g_1(x(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t)$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$  и условие экстремальности  $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$ .

Доказательство окончено.

Задача о неподвижной точке (1.2.3) в поточечной форме имеет следующий вид:

$$u(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t), \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^*(\psi(t), x(t, u), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)). \quad (1.3.3)$$

Введем функцию переключения  $g_2(\psi, t) = g(\psi, x(t, u), t)$ . Решение  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  задачи Коши (1.3.3) назовем особым, если существует интервал времени  $[\theta_1, \theta_2] \subset T$  ненулевой меры, на котором выполняется условие:

$$g_2(\psi(t), t) = 0.$$

Управление  $u \in V$  назовем особым для задачи Коши (1.3.3), если существует особое решение  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  этой задачи Коши.

Экстремальное управление  $u \in V$ , удовлетворяющее условию (1.2.3), называется особым, если управление  $u \in V$  является особым для соответствующей задачи Коши (1.3.3).

Для особого экстремального управления, удовлетворяющего условию (1.2.3) с соответствующей задачей Коши (1.3.3), соотношение  $u(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t)$  не позволяет определить значения экстремального управления на особом интервале.

Докажем следующее утверждение.

**Лемма 1.3.** Особое экстремальное управление  $u \in V$ , удовлетворяющее условию (1.1.6), является особым экстремальным управлением, удовлетворяющим условию (1.2.3) с соответствующей задачей Коши (1.3.3), и наоборот. При этом соответствующие особые интервалы совпадают.

Действительно, пусть экстремальное управление  $u \in V$  является особым на основе функции переключения  $g(\psi, x, t)$ , т.е.  $g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$ . В силу экстремальности управления  $u \in V$  имеем соотношение  $u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t)$ . Следовательно, функция  $\psi(t) = \psi(t, u)$ ,  $t \in T$  удовлетворяет задаче Коши (1.3.3) для соотношения  $u(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t)$ . При этом получаем  $g_2(\psi(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$ .

Обратно, пусть экстремальное управление  $u \in V$ , удовлетворяющее условию (1.2.3) с соответствующей задачей Коши (1.3.3), является особым, т.е.  $g_2(\psi(t), t) = g(\psi(t, u), x(t), t) = 0$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$ , где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением задачи Коши (1.3.3). В силу системы (1.3.3) и условия экстремальности  $u(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t)$  имеем  $\psi(t) = \psi(t, u)$ ,  $t \in T$ . Следовательно, получаем  $0 = g_2(\psi(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t)$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$  и условие экстремальности  $u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t)$ .

Доказательство окончено.

Задача о неподвижной точке (1.2.6) в поточечной форме принимает вид:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)). \quad (1.3.4)$$

Решение  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  задачи Коши (1.3.4) назовем особым, если существует интервал времени  $[\theta_1, \theta_2] \subset T$  ненулевой меры, на котором выполняется условие:

$$g_2(\psi(t), t) = 0.$$

Управление  $u \in V$  назовем особым для задачи Коши (1.3.4), если существует особое решение  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  этой задачи Коши.

Экстремальное управление  $u \in V$ , удовлетворяющее условию (1.2.6), называется особым, если управление  $u \in V$  является особым для соответствующей задачи Коши (1.3.4).

Для особого экстремального управления, удовлетворяющего условию (1.2.6) с соответствующей задачей Коши (1.3.4), соотношение  $u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t)$  выполняется тождественно и не может служить для определения значений экстремального управления на особом интервале.

Имеет место утверждение, аналогичное Лемме 1.3.

**Лемма 1.4.** Особое экстремальное управление  $u \in V$ , удовлетворяющее условию (1.1.6), является особым экстремальным управлением, удовлетворяющим условию (1.2.6) с соответствующей задачей Коши (1.3.4), и наоборот. При этом соответствующие особые интервалы совпадают.

Доказательство с очевидными изменениями повторяет доказательство Леммы 1.3.

Действительно, пусть экстремальное управление  $u \in V$  является особым на основе функции переключения  $g(\psi, x, t)$ , т.е.  $g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$ . В силу экстремальности управления  $u \in V$  имеем соотношение  $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$ . Следовательно, функция  $\psi(t) = \psi(t, u)$ ,  $t \in T$  удовлетворяет задаче Коши (1.3.4) для соотношения  $u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t)$ . При этом получаем  $g_2(\psi(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$ .

Обратно, пусть экстремальное управление  $u \in V$ , удовлетворяющее условию (1.2.6) с соответствующей задачей Коши (1.3.4), является особым, т.е.  $g_2(\psi(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$ , где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением задачи Коши (1.3.4). В силу системы (1.3.4) и условия экстремальности  $u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t)$  имеем  $\psi(t) = \psi(t, u)$ ,  $t \in T$ . Следовательно, получаем  $0 = g_2(\psi(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t)$ ,  $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset T$  и условие экстремальности  $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$ .

Доказательство окончено.

Доказанные свойства эквивалентности сконструированных новых форм принципа максимума в виде задач о неподвижной точке и введенных новых понятий особых экстремальных управлений на основе указанных задач о неподвижной точке дают возможность конструировать новые подходы к поиску экстремальных управлений, в том числе особых экстремальных управлений, в рассматриваемом классе линейных по управлению задач оптимального управления.

#### 1.4. Билинейная задача оптимального управления

Важным классом линейных по управлению задач оптимального управления является класс билинейных задач. Билинейные задачи рассматриваются во многих актуальных приложениях в областях биологии, экономики, медицины, энергетики [81, 92].

Распространенные методы решения билинейных задач оптимального управления связаны с дискретизацией управления и переходом к специальным задачам линейного программирования.

В работе [79] в классе билинейных управляемых систем разработаны эффективные методы нелокального улучшения управления на основе построения нестандартных формул приращения целевого функционала, не содержащих остаточных членов разложений. Нелокальное улучшение управления достигается решением специальных задач Коши для фазовых и сопряженных систем в пространстве состояний. В работе [16] нелокальные условия улучшения управления рассматриваются как задачи о неподвижной точке в пространстве управлений. Такое представление позволяет конструировать новые итерационные методы улучшения управления по сравнению с известными методами, важные для повышения эффективности решения билинейных задач оптимального управления.

Класс билинейных задач оптимального управления рассматривается в следующей форме:

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1) \rangle + \int_T (\langle \tilde{a}(u(t), t), x(t) \rangle + \tilde{d}(u(t), t)) dt \rightarrow \inf_{u \in V} \quad (1.4.1)$$

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(u(t), t)x(t) + \tilde{b}(u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset R^m, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1.4.2)$$

в которой функции  $\tilde{a}(x, t)$ ,  $\tilde{d}(x, t)$ ,  $\tilde{A}(u, t)$ ,  $\tilde{b}(u, t)$  линейны по переменной  $x$  и непрерывны по переменной  $t$ ,  $c \in R^n$  является заданным вектором. Вектор  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  является вектором состояния системы, в качестве допустимых управлений  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  рассматривается множество  $V$  кусочно-непрерывных функций на интервале  $T$  со значениями в компактном и выпуклом множестве  $U \subset R^m$ . Начальное состояние  $x^0$  и интервал  $T$  заданы.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной  $\psi$  в задаче (1.4.1), (1.4.2) является линейной по переменной  $x$  и линейной по переменной  $u$  и ее можно представить в следующем альтернативном виде:

$$H(\psi, x, u, t) = \tilde{H}_0(\psi, u, t) + \langle \tilde{H}_1(\psi, u, t), x \rangle,$$

$$\tilde{H}_0(\psi, u, t) = \langle \psi, \tilde{b}(u, t) \rangle - \tilde{d}(u, t), \quad \tilde{H}_1(\psi, u, t) = \tilde{A}^T(u, t)\psi - \tilde{a}(u, t).$$

Стандартная сопряженная система не зависит от переменной  $x$  и принимает вид:

$$\dot{\psi}(t) = -\tilde{A}^T(u(t), t)\psi(t) + \tilde{a}(u(t), t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -c. \quad (1.4.3)$$

Функция переключения в задаче (1.4.1), (1.4.2) определяется соотношением:

$$\tilde{g}(\psi, x, t) = H_u(\psi, x, u, t).$$

Отображение  $u^*$  можно представить в форме:

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} \langle \tilde{g}(\psi, x, t), w \rangle. \quad (1.4.4)$$

Отображение  $u^\alpha$  с параметром  $\alpha > 0$  принимает вид:

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(w + \alpha \tilde{g}(\psi, x, t)). \quad (1.4.5)$$

Условие принципа максимума можно записать в виде:

$$u(t) = u^*(\psi(t), x(t), t), \quad t \in T,$$

где пара  $(x(t), \psi(t))$ ,  $t \in T$  является решением краевой задачи принципа максимума:

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(u^*(\psi(t), x(t), t), t)x(t) + \tilde{b}(u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0,$$

$$\dot{\psi}(t) = -\tilde{A}^T(u^*(\psi(t), x(t), t), t)\psi(t) + \tilde{a}(u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -c.$$

В рассматриваемом классе задач (1.4.1), (1.4.2) для управлений  $u \in V$  и  $v \in V$  имеют место две нестандартные формулы приращения функционала, которые не содержат остаточных членов разложений [79], которые могут быть представлены в следующем виде:

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_T \langle \tilde{g}(\psi(t, u), x(t, v), t), v(t) - u(t) \rangle dt, \quad (1.4.6)$$

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_T \langle \tilde{g}(\psi(t, v), x(t, u), t), v(t) - u(t) \rangle dt. \quad (1.4.7)$$

Для управления  $u \in V$  рассмотрим допустимое управление, удовлетворяющее условию:



$$v(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, v), t), \quad t \in T. \quad (1.4.8)$$

Для этого управления на основе формулы (1.4.6) получаем неравенство  $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$ .

Рассмотрим допустимое управление, удовлетворяющее условию:

$$v(t) = u^*(\psi(t, v), x(t, u), t), \quad t \in T. \quad (1.4.9)$$

Для этого управления на основе формулы (1.4.7) получаем неравенство  $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$ .

Далее рассмотрим допустимые управления с параметром  $\alpha > 0$ , соответственно определяющиеся условиями:

$$v(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, v), u(t), t), \quad t \in T, \quad (1.4.10)$$

$$v(t) = u^\alpha(\psi(t, v), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T. \quad (1.4.11)$$

Тогда соответственно для этих управлений на основе формул (1.4.6), (1.4.7) и свойства операции проектирования получаем неравенство:

$$\Delta_v \Phi(u) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v(t) - u(t)\|^2 dt. \quad (1.4.12)$$

Таким образом, на основе нестандартных формул приращения (1.4.6) и (1.4.7) получаем четыре условия нелокального улучшения управления (1.4.8) - (1.4.11). Форма полученных условий улучшения управления (1.4.8) - (1.4.11) позволяет рассматривать эти условия как задачи о неподвижной точке на множестве допустимых управлений.

Покажем, что для решения уравнения (1.4.8) на множестве допустимых управлений достаточно решить специальную задачу Коши:

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(u^*(\psi(t, u), x(t), t), t)x(t) + \tilde{b}(u^*(\psi(t, u), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (1.4.13)$$

и наоборот. В этом смысле уравнение (1.4.8) является эквивалентным задаче Коши (1.4.13).

Действительно, пусть  $v \in V$  - решение уравнения (1.4.8). Тогда функция  $x(t, v)$ ,  $t \in T$ , очевидно, является решением специальной задачи Коши (1.4.13).

Обратно, пусть  $x(t)$ ,  $t \in T$  - решение задачи Коши (1.4.13). Сформируем выходное управление по правилу:

$$v(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T.$$

Предположим, что  $v \in V$ . Тогда  $x(t) = x(t, v)$ ,  $t \in T$ . Следовательно,  $v \in V$  является

решением уравнения (1.4.8).

Аналогично показывается, что для решения уравнения (1.4.9) на множестве допустимых управлений достаточно решить специальную сопряженную задачу Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -\tilde{A}^T(u^*(\psi(t), x(t, u), t), t)\psi(t) + \tilde{a}(u^*(\psi(t), x(t, u), t), t), \quad \psi(t_1) = -c. \quad (1.4.14)$$

и наоборот. В этом смысле уравнение (1.4.9) является эквивалентным задаче Коши (1.4.14).

Далее покажем, что для решения уравнения (1.4.10) на множестве допустимых управлений достаточно решить специальную задачу Коши:

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), t)x(t) + \tilde{b}(u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (1.4.15)$$

и наоборот. В этом смысле уравнение (1.4.10) является эквивалентным задаче Коши (1.4.15).

Действительно, пусть  $v^\alpha \in V$  - решение уравнения (1.4.10). Тогда очевидно, что функция  $x(t, v^\alpha)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши (1.4.15)

Обратно, пусть  $x(t)$ ,  $t \in T$  - решение задачи Коши (1.4.15). Сформируем выходное управление по правилу:

$$v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T.$$

Имеем, что  $v^\alpha \in V$  и  $x(t) = x(t, v^\alpha)$ ,  $t \in T$ . Таким образом,  $v^\alpha \in V$  является решением уравнения (1.4.10).

Аналогично показывается, что для решения уравнения (1.4.11) на множестве допустимых управлений достаточно решить специальную сопряженную задачу Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -\tilde{A}^T(u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t)\psi(t) + \tilde{a}(u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -c. \quad (1.4.16)$$

и наоборот. В этом смысле уравнение (1.4.11) является эквивалентным задаче Коши (1.4.16).

Отметим, что в силу свойств оператора проектирования (однозначность, условие Липшица) задачи Коши (1.4.15) и (1.4.16) имеют единственное решение и однозначно определяют соответствующие выходные управления  $v^\alpha \in V$ .

В результате, получаем следующее утверждение.

**Теорема 1.3.** Уравнения (1.4.10) и (1.4.11) имеют единственное решение.

Отметим, что метод решения уравнения (1.4.8) по правилу:

$$v(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  - решение специальной задачи Коши (1.4.13), совпадает с известным  $x$  - методом нелокального улучшения управления [79], рассматриваемым применительно к билинейной задаче (1.4.1), (1.4.2).

Метод решения уравнения (1.4.9) по правилу:

$$v(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t), t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  - решение задачи Коши (1.4.14), совпадает с другим известным  $\psi$  - методом нелокального улучшения управления [79], рассматриваемым применительно к билинейной задаче (1.4.1), (1.4.2).

Аналогично отметим, что метод решения уравнения (1.4.10) по правилу:

$$v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  - решение специальной задачи Коши (1.4.15), совпадает с известным [79] проекционным методом нелокального улучшения управления, рассматриваемым применительно к билинейной задаче (1.4.1), (1.4.2).

Далее отметим, что метод решения уравнения (1.4.11) по правилу:

$$v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  - решение задачи Коши (1.4.16), совпадает с другим известным [79] проекционным методом нелокального улучшения управления, рассматриваемым применительно к билинейной задаче (1.4.1), (1.4.2).

На основе полученных условий нелокального улучшения управления (1.4.8) - (1.4.11) получаем соответствующие новые методы нелокального улучшения управления, которые заключаются соответственно в решении этих уравнений в пространстве управлений.

При этом отметим важное отличие предлагаемых методов от указанных выше известных методов нелокального улучшения управления [79] в классе билинейных задач оптимального управления. Методы [79] заключаются в решении соответствующих специальных задач Коши (1.4.13) – (1.4.16) в пространстве состояний и могут рассматриваться в качестве одного из способов решения соответствующих уравнений (1.4.8) - (1.4.11). Для решения указанных уравнений могут применяться и другие способы. В частности, итерационные методы неподвижных точек, из которых наиболее известными являются методы простых итераций [2,55,59,76].

Рассмотрим условия принципа максимума в форме задач о неподвижной точке в классе билинейных задач (1.4.1), (1.4.2).

Операторная задача о неподвижной точке (1.2.2) в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши (1.4.13).

Операторная задача о неподвижной точке (1.2.3) в поточечной форме имеет следующий вид:

$$u(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t), \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной сопряженной задачи Коши (1.4.14).

Проекционная задача о неподвижной точке (1.2.5) в поточечной форме принимает вид:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши (1.4.15).

Проекционная задача о неподвижной точке (1.2.6) в поточечной форме имеет вид:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной сопряженной задачи Коши (1.4.16).

Сформулируем понятия особых управлений в рамках рассматриваемой постановки задачи (1.4.1), (1.4.2).

Управление  $u \in V$  в задаче (1.4.1), (1.4.2) является особым, если для этого управления существует интервал времени  $[\theta_1, \theta_2] \subset T$  ненулевой меры, на котором выполняется условие:

$$\tilde{g}(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0.$$

Аналогично предыдущему параграфу определяются понятия особого управления  $u \in V$  на основе задач Коши (1.4.13) и (1.4.15) с помощью функции переключения:

$$\tilde{g}_1(x, t) = \tilde{g}(\psi(t, u), x, t).$$

Понятия особого управления  $u \in V$  на основе задач Коши (1.4.14) и (1.4.16) определяются с помощью функции переключения:

$$\tilde{g}_2(\psi, t) = \tilde{g}(\psi, x(t, u), t).$$

Представленные формы принципа максимума в рассматриваемом классе билинейных задач (1.4.1), (1.4.2) могут использоваться для разработки и обоснования эффективных итерационных методов поиска экстремальных управлений, в том числе особых экстремальных управлений, которые приобретают важное для повышения эффективности свойство улучшения управления на каждой итерации.

### 1.5. Примеры

В рассматриваемых примерах анализируются условия принципа максимума и существование особых экстремальных управлений. Иллюстрируются новые формы принципа максимума в форме задач о неподвижной точке.

*Пример 1.1. (Билинейная задача с особыми экстремальными управлениями).*

Рассматривается модификация известной билинейной задачи [79]::

$$\Phi(u) = \int_0^2 u(t)x(t)dt \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad (1.5.1)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 2]. \quad (1.5.2)$$

Функция Понтрягина и сопряженная система соответственно имеют вид:

$$H(\psi, x, u, t) = (\psi - x)u,$$

$$\dot{\psi}(t) = u(t), \quad \psi(2) = 0.$$

Отображение  $u^*$  представляется в форме

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in [-1, 1]} \langle \psi - x, w \rangle = \text{sign}(\psi - x).$$

Условие принципа максимума имеет вид:

$$u(t) = \text{sign}(\psi(t, u) - x(t, u)), \quad t \in T. \quad (1.5.3)$$

Функция переключения представляется в виде:

$$g(\psi, x, t) = \psi - x.$$

Краевая задача принципа максимума принимает вид:

$$\dot{x}(t) = \text{sign}(\psi(t) - x(t)), \quad x(0) = 1,$$

$$\dot{\psi}(t) = \text{sign}(\psi(t) - x(t)), \quad \psi(2) = 0.$$

Анализ краевой задачи показывает, что ее решения удовлетворяют условию:

$$\psi(t) - x(t) = 0, \quad t \in T.$$

Следовательно, экстремальными управлениями являются допустимые управления  $u \in V$ , удовлетворяющие условию:

$$g(\psi(t, u), x(t, u), t) = \psi(t, u) - x(t, u) = 0, \quad t \in T. \quad (1.5.4)$$

Таким образом, все экстремальные управления являются особыми с особыми интервалами, равными интервалу  $T$ . При этом условие принципа максимума (1.5.3) не может использоваться для эффективного определения значений экстремального управления.

Стандартный прием дифференцирования тождества (1.5.4) не позволяет определить значений экстремального управления. Рассмотрим следующий подход к поиску особых экстремальных управлений.

Предположим, что особое экстремальное управление  $u \in V$  существует. Из дифференциальных уравнений и тождества (1.5.4) получаем:

$$x(t, u) = \psi(t, u) = \int_0^t u(\theta) d\theta + 1, \quad \psi(2, u) = \int_0^2 u(\theta) d\theta + 1 = 0.$$

Таким образом, управление удовлетворяет равенству:

$$\int_0^2 u(\theta) d\theta = -1. \quad (1.5.5)$$

Будем искать управления  $u \in V$ , удовлетворяющие условию (1.5.5), в различных классах функций.

В классе постоянных функций вида  $u(t) = k$ ,  $t \in T$  получаем:

$$u(t) = -\frac{1}{2}, \quad x(t, u) = -\frac{1}{2}t + 1, \quad \Phi(u) = -\frac{1}{2}.$$

В классе линейных функций вида  $u(t) = kt$ ,  $t \in T$  получаем:

$$u(t) = -\frac{1}{2}t, \quad x(t, u) = -\frac{1}{4}t^2 + 1, \quad \Phi(u) = -\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим класс кусочно-постоянных функций с одной точкой переключения  $0 < \tau < 2$  с максимального допустимого значения на минимальное допустимое значение, имеющих вид:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau), \\ -1, & t \in [\tau, 2]. \end{cases}$$

В этом классе получаем:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & t \in [\frac{1}{2}, 2]; \end{cases}$$

$$x(t, u) = \begin{cases} t+1, & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ -t+2, & t \in [\frac{1}{2}, 2]; \end{cases} \quad \Phi(u) = -\frac{1}{2}.$$

Представим эквивалентные условия принципа максимума в форме задач о неподвижной точке.

Задача о неподвижной точке (1.2.2) в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = \text{sign}(\psi(t, u) - x(t)), \quad t \in T, \quad (1.5.6)$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = \text{sign}(\psi(t, u) - x(t)), \quad x(0) = 1.$$

Задача о неподвижной точке (1.2.3) в поточечной форме имеет следующий вид:

$$u(t) = \text{sign}(\psi(t) - x(t, u)), \quad t \in T, \quad (1.5.7)$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = \text{sign}(\psi(t) - x(t, u)), \quad \psi(2) = 0.$$

Проекционная форма условия принципа максимума с параметром  $\alpha > 0$  принимает вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t, u))), \quad t \in T. \quad (1.5.8)$$

При этом для экстремальных управлений это условие выполняется тождественно и не может служить для определения значений экстремального управления.

Задача о неподвижной точке (1.2.5) в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t))), \quad t \in T, \quad (1.5.9)$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t))), \quad x(0) = 1.$$

Задача о неподвижной точке (1.2.6) в поточечной форме имеет следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u))), \quad t \in T. \quad (1.5.10)$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u))), \quad \psi(2) = 0.$$

Представленные формы принципа максимума (1.5.3), (1.5.6)-(1.5.10), рассматриваемые как задачи о неподвижной точке с различными операторами, могут использоваться для построения новых итерационных методов поиска особых экстремальных управлений в задаче (1.5.1), (1.5.2).

*Пример 1.2. (Задача минимизации нормы конечного состояния линейной по управлению системы).*

Задача рассматривается в следующей постановке:

$$\Phi(u) = 0.5(x_1^2(t_1) + x_2^2(t_1)) \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (1.5.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= -1, \end{aligned} \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, t_1]. \quad (1.5.12)$$

Конечный момент времени  $t_1 > 0$  фиксирован.

Задача для  $t_1 = 2$  рассматривалась в работе [82], где применялся метод параметризации управляющей функции и были получены следующие результаты:

$$u(t) = 3/13, \quad t \in [0, 1), \quad u(t) = 1, \quad t \in [1, 2], \quad \Phi(u) = 0.03846.$$

Функция Понтрягина и отображение  $u^*(\psi, x, t)$  имеют вид:



$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \quad u^*(\psi, x, t) = \text{sign } \psi_2.$$

Стандартная сопряженная система:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= 0, & \psi_1(2) &= -x_1(2), \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1(t), & \psi_2(2) &= -x_2(2). \end{aligned}$$

Условие принципа максимума принимает вид:

$$u(t) = \text{sign } \psi_2(t, u), \quad t \in T. \quad (1.5.13)$$

Функция переключения имеет вид:

$$g(\psi, x, t) = \psi_2.$$

Краевая задача принципа максимума:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2, \\ \dot{x}_2(t) &= \text{sign } \psi_2(t), & x_2(0) &= -1, \\ \dot{\psi}_1(t) &= 0, & \psi_1(t_1) &= -x_1(t_1), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), & \psi_2(t_1) &= -x_2(t_1). \end{aligned}$$

Эта задача эквивалентна краевой задаче:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2, \\ \dot{x}_2(t) &= \text{sign}(x_1(t_1)t - x_1(t_1)t_1 - x_2(t_1)), & x_2(0) &= -1, \end{aligned}$$

Анализ краевой задачи для  $t_1 = 2$  показывает существование неособого экстремального управления:

$$u(t) = -1, \quad t \in [0, \tau), \quad u = 1, \quad t \in [\tau, 2], \quad \tau \approx 0.55775, \quad \Phi(u) \approx 0.0098.$$

Существование особых экстремальных управлений для произвольного  $t_1 > 0$  определяется возможностью выполнения тождества на интервале ненулевой меры:

$$x_1(t_1)t - x_1(t_1)t_1 - x_2(t_1) = 0.$$

Это тождество является эквивалентным условиям:

$$x_1(t_1) = 0, \quad x_2(t_1) = 0.$$

Для анализа существования особых экстремальных управлений рассмотрим вспомогательную задачу оптимального быстродействия:

$$\Phi(u) = t_1 \rightarrow \min .$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2, & x_1(t_1) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= -1, & x_2(t_1) &= 0. \end{aligned}$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, t_1].$$

Функция Понтрягина и сопряженная система имеют вид:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u ;$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= 0, \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t). \end{aligned}$$

Условие принципа максимума и краевая задача принципа максимума в задаче быстродействия принимают вид:

$$u(t) = \text{sign}(\psi_2(t, u)), \quad t \in T ;$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2, & x_1(t_1) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) &= \text{sign}(\psi_2(t)), & x_2(0) &= -1, & x_2(t_1) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= 0, \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t). \end{aligned}$$

Так как  $\psi_2(t)$  линейная функция, то она может менять свой знак на отрезке  $T$  не более чем в одной точке. Значит, возможны четыре типа управлений:

- 1)  $u(t) = 1, t \in T$ ;
- 2)  $u(t) = -1, t \in T$ ;
- 3)  $u(t) = 1, t \in [0, \tau), u(t) = -1, t \in [\tau, t_1]$ ;
- 4)  $u(t) = -1, t \in [0, \tau), u(t) = 1, t \in [\tau, t_1]$ .

Проанализировав эти случаи, получаем управление:

$$u(t) = -1, t \in [0, \tau), u(t) = 1, t \in [\tau, t_1], \tau \approx 0.581139, t_1 \approx 2.16228.$$

Таким образом, из анализа вспомогательной задачи быстродействия следует, что допустимые управления могут переводить систему в нулевое состояние только за время

$t_1 \geq 2.16228$ . Следовательно, для случая  $t_1 = 2$  особых экстремальных управлений нет, и указанное выше неособое экстремальное управление в силу единственности является оптимальным.

Анализ краевой задачи принципа максимума при  $t_1 = 3$  показывает отсутствие неособых оптимальных управлений. При этом из анализа вспомогательной задачи оптимального быстрогодействия и системы уравнений фазовой системы можно легко получить особое экстремальное управление:

$$u(t) = -1, t \in [0, \tau), u(t) = 1, t \in [\tau, t_1), u(t) = 0, t \in [t_1, 3], \tau \approx 0.581139, t_1 \approx 2.16228.$$

Очевидно, что это управление является оптимальным:  $\Phi(u) = 0$ .

Поиск других особых управлений с помощью стандартной операции последовательного дифференцирования тождества:

$$g(\psi(t, u), x(t, u), t) = \psi_2(t, u) = 0$$

в силу фазовой и сопряженной систем приводит к соотношениям, выполняющимся тождественно, которые не позволяют определять особые значения экстремального управления.

Для поиска особых экстремальных управлений, учитывая полученные выше условия существования особых экстремальных управлений, рассмотрим вспомогательную краевую задачу:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2, & x_1(3) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= -1, & x_2(3) &= 0. \end{aligned}$$

Из уравнений фазовой системы получаем  $\ddot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = u(t)$ . Отсюда следует:

$$x_1(t) = \int_0^t \left( \int_0^\xi u(\tau) d\tau - 1 \right) d\xi + 2,$$

$$x_2(t) = -1 + \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

Будем искать управление  $u(t)$  в классе линейных функций, т.е.  $u(t) = k_1 t + k_2$ . Тогда найдем  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , и, воспользовавшись условиями:  $x_1(3) = 0$  и  $x_2(3) = 0$ , получим:

$$\frac{27}{2} k_1 + 9k_2 - 3 = 0,$$

$$\frac{9}{2}k_1 + 3k_2 - 1 = 0.$$

Отсюда находим  $k_1 = \frac{2}{9}$ ,  $k_2 = 0$ .

Таким образом, для случая  $t_1 = 3$  получаем второе особое экстремальное управление, которое является оптимальным:

$$u = \frac{2}{9}t, \quad t \in [0, 3], \quad \Phi(u) = 0.$$

Рассмотрим эквивалентные условия принципа максимума в форме задач о неподвижной точке, которые могут служить основой для конструирования новых итерационных методов поиска экстремальных управлений, в том числе особых экстремальных управлений.

Операторная задача о неподвижной точке (1.2.2) в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = \text{sign } \psi_2(t, u).$$

Эта задача совпадает со стандартной формой принципа максимума (1.5.13). При этом соответствующие операторы задач (1.2.1) и (1.2.2) совпадают.

Операторная задача о неподвижной точке (1.2.3) в поточечной форме имеет следующий вид:

$$u(t) = \text{sign } \psi_2(t), \quad t \in T, \quad (1.5.14)$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= 0, & \psi_1(t_1) &= -x_1(t_1, u), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), & \psi_2(t_1) &= -x_2(t_1, u). \end{aligned}$$

При этом соответствующие операторы задач (1.2.3) и (1.2.1) отличаются друг от друга.

Проекционная форма условия принципа максимума с параметром  $\alpha > 0$  принимает вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha \psi_2(t, u)), \quad t \in T. \quad (1.5.15)$$

Для экстремальных управлений это условие выполняется тождественно и не может служить для определения значений экстремального управления.

Операторная задача о неподвижной точке (1.2.5) в поточечной форме совпадает с указанной стандартной проекционной формой условия принципа максимума (1.5.15). При этом соответствующие операторы задач (1.2.5) и (1.2.4) совпадают.

Операторная задача о неподвижной точке (1.2.6) в поточечной форме имеет следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha \psi_2(t)), \quad t \in T, \quad (1.5.16)$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= 0, & \psi_1(t_1) &= -x_1(t_1, u), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), & \psi_2(t_1) &= -x_2(t_1, u). \end{aligned}$$

При этом соответствующий оператор задачи (1.2.6) отличается от соответствующего оператора задачи (1.2.4).

Таким образом, для данного примера (1.5.11), (1.5.12) новые итерационные методы принципа максимума могут конструироваться на основе представленных условий принципа максимума (1.5.13)-(1.5.16), которые рассматриваются как задачи о неподвижной точке с различными операторами.

*Пример 1.3. (линейно-квадратичная задача с особым экстремальным управлением)*

Рассматривается задача [79]:

$$\Phi(u) = 0.5 \int_0^1 u(t)x^2(t)dt \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad (1.5.17)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad u(t) \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 1]. \quad (1.5.18)$$

Функция Понтрягина и сопряженная система соответственно имеют вид:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi u - 0.5x^2u,$$

$$\dot{\psi} = \psi u, \quad \psi(1) = 0.$$

Отображение  $u^*$  представляется в форме:

$$u^*(\psi, x, t) = \text{sign}(\psi - 0.5x^2).$$

Условие принципа максимума принимает вид:

$$u(t) = \text{sign}(\psi(t, u) - 0.5x^2(t, u)).$$

Очевидно, что управление  $u(t) = 0$ ,  $t \in T = [0, 1]$  является особым экстремальным управлением. Анализ краевой задачи принципа максимума показывает, что оптимальным управлением является неособое управление  $u(t) = -1$ ,  $t \in T = [0, 1]$ .

Задача о неподвижной точке (1.2.2) в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = \text{sign}(\psi(t, u) - 0.5x^2(t)), \quad t \in T, \quad (1.5.19)$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = \text{sign}(\psi(t, u) - 0.5x^2(t)), \quad x(0) = 0.$$

Задача о неподвижной точке (1.2.3) в поточечной форме имеет следующий вид:

$$u(t) = \text{sign}(\psi(t) - 0.5x^2(t, u)), \quad t \in T, \quad (1.5.20)$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = x(t, u) \cdot \text{sign}(\psi(t) - 0.5x^2(t, u)), \quad \psi(1) = 0.$$

Проекционная форма условия принципа максимума с параметром  $\alpha > 0$  принимает вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - 0.5x^2(t, u))), \quad t \in T. \quad (1.5.21)$$

Задача о неподвижной точке (1.2.5) в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha((\psi(t, u) - 0.5x^2(t))), \quad t \in T, \quad (1.5.22)$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = P_U(u(t) + \alpha((\psi(t, u) - 0.5x^2(t))), \quad x(0) = 0.$$

Задача о неподвижной точке (1.2.6) в поточечной форме имеет следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t) - 0.5x^2(t, u))), \quad t \in T. \quad (1.5.23)$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = x(t, u) \cdot P_U(u(t) + \alpha(\psi(t) - 0.5x^2(t, u))), \quad \psi(1) = 0.$$

Таким образом, для данного примера (1.5.17), (1.5.18) подход неподвижных точек позволяет конструировать новые формы принципа максимума в виде задач о неподвижной точке с различными операторами управления. Представленные новые формы принципа максимума (1.5.19)-(1.5.23) являются основой для конструирования новых итерационных методов поиска экстремальных управлений.

## Глава 2. Методы неподвижных точек принципа максимума

### 2.1. Методы простых итераций

В соответствии с известными работами, например [2, 55, 59, 76], методом простой итерации для решения уравнения, рассматриваемого на множестве  $V_E$  в полном нормированном пространстве  $E$  с нормой  $\|\cdot\|_E$ , называется метод сведения рассматриваемого уравнения к эквивалентному уравнению, имеющего вид задачи о неподвижной точке:

$$v = G(v), \quad v \in V_E, \quad (2.1.1)$$

в которой  $G: V_E \rightarrow V_E$  является оператором, действующим на множестве  $V_E$ , и итерационного поиска решения уравнения по правилу:

$$v^{k+1} = G(v^k), \quad v^0 \in V_E, \quad k \geq 0. \quad (2.1.2)$$

Сведение уравнения к эквивалентной задаче о неподвижной точке (2.1.1) может производиться различными способами, которые определяют различные операторы  $G$  и соответствующие различные методы простой итерации с итерационными процессами (2.1.2).

Например, распространенным способом является переход от задачи (2.1.1) с оператором  $G$  к эквивалентной задаче о неподвижной точке с параметром  $\delta \in R$ ,  $\delta \neq 0$ :

$$v = v + \delta(v - G(v)) = \tilde{G}(v), \quad v \in V_E, \quad k \geq 0.$$

Метод простой итерации для преобразованной задачи определяется итерационным процессом:

$$v^{k+1} = v^k + \delta(v^k - G(v^k)) = \tilde{G}(v^k), \quad v^0 \in V_E, \quad k \geq 0.$$

Выбором параметра  $\delta \neq 0$  можно регулировать сходимость указанной модификации метода простой итерации.

Условия сходимости итерационного процесса (2.1.2) можно исследовать на основе известного принципа сжимающих отображений [59, 96, 109]. В частности, для задачи (2.1.1) можно доказать следующий аналог известной теоремы [76].



**Теорема 2.1.** Пусть оператор  $G:V_E \rightarrow V_E$ , действующий на множестве  $V_E$  в полном нормированном пространстве  $E$  с нормой  $\|\cdot\|_E$ , удовлетворяет условию Липшица в шаре:

$$B(v_0, l) = \{v \in V_E : \|v - v_0\|_E \leq l, v_0 \in V_E, l > 0\}$$

с константой  $0 < M = M(v_0, l) < 1$ :

$$\|G(v) - G(u)\|_E \leq M \|v - u\|_E, \quad v \in B(v_0, l), u \in B(v_0, l). \quad (2.1.3)$$

При этом выполняется условие:

$$\|G(v_0) - v_0\|_E \leq (1 - M)l. \quad (2.1.4)$$

Тогда задача о неподвижной точке (2.1.1) имеет единственное решение  $\bar{v} \in B(v_0, l)$  и итерационный процесс (2.1.2) сходится к  $\bar{v}$  в норме  $\|\cdot\|_E$  для любого начального приближения  $v^0 \in B(v_0, l)$ . Для погрешности метода выполняется оценка:

$$\|v^k - \bar{v}\|_E \leq M^k \|v^0 - \bar{v}\|_E, \quad k \geq 0.$$

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы ([76], с. 196-198) с необходимыми очевидными изменениями, связанными с рассматриваемой формулировкой задачи (1.2.1), и поэтому не приводится.

Отметим, что условие (2.1.4) вводится для того, чтобы обеспечить невыход итерационных приближений процесса (2.1.2) за пределы множества  $B(v_0, l)$ , на котором выполняется условие Липшица (2.1.3).

Рассматриваемые в главе 1 задачи о неподвижной точке принципа максимума с различными операторами являются основой для конструирования различных итерационных методов простой итерации для поиска экстремальных управлений. Сходимость соответствующих итерационных процессов этих методов можно исследовать на основе принципа сжатых отображений в форме теоремы 2.1.

## **2.2. Методы неподвижных точек принципа максимума на основе операции максимизации**

Для решения задач о неподвижной точке принципа максимума (1.2.1), (1.2.2) и (1.2.3) рассмотрим соответствующие итерационные процессы метода простой итерации при  $k \geq 0$ :

$$v^{k+1} = V^*(\Psi(v^k), X(v^k)), v^0 \in V; \quad (2.2.1)$$

$$v^{k+1} = V^*(\Psi(v^k), X^*(\Psi(v^k))), v^0 \in V; \quad (2.2.2)$$

$$v^{k+1} = V^*(\Psi^*(X(v^k)), X(v^k)), v^0 \in V; \quad (2.2.3)$$

Процесс (2.2.1) в поточечной форме имеет вид:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t, v^k), t), t \in T. \quad (2.2.4)$$

Этот процесс в пространстве управлений является эквивалентным известному методу последовательных приближений Крылова-Черноусько в пространстве фазовых и сопряженных состояний для решения краевой задачи принципа максимума. При этом отметим, что такая эквивалентность позволяет исследовать сходимость метода Крылова-Черноусько с помощью анализа сходимости итерационного процесса (2.2.4).

Процесс (2.2.2) в поточечной форме принимает вид:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t), t), t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^*(\psi(t, v^k), x(t), t) + b(x(t), t), x(t_0) = x^0.$$

В соответствии с определением отображений имеет место следующее соотношение:

$$X(V^*(\Psi(v), X^*(\Psi(v)))) = X^*(\Psi(v)), v \in V. \quad (2.2.5)$$

Действительно, для любого  $p \in C(T)$  по определению получаем:

$$X^*(p) \Big|_t = x(t), t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^*(p(t), x(t), t) + b(x(t), t), x(t_0) = x^0.$$

Далее, согласно определению, имеем:

$$V^*(p, X^*(p)) \Big|_t = u^*(p(t), x(t), t), t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^*(p(t), x(t), t) + b(x(t), t), x(t_0) = x^0.$$

Следовательно:

$$x(t) = X^*(V^*(p, X^*(p)))|_t, \quad t \in T.$$

Таким образом, из поточечных равенств получаем операторное равенство:

$$X(V^*(p, X^*(p))) = X^*(p), \quad p \in C(T),$$

из которого следует (2.2.5).

На основе соотношения (2.2.5) получаем:

$$X^*(\Psi(v^k)) = X(V^*(\Psi(v^k), X^*(\Psi(v^k)))) = X(v^{k+1}).$$

Следовательно, итерационный процесс (2.2.2) может быть записан в следующем неявном виде:

$$v^{k+1} = V^*(\Psi(v^k), X(v^{k+1})), \quad v^0 \in V,$$

или в поточечной форме:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), t), \quad v^0 \in V, \quad t \in T. \quad (2.2.6)$$

Процесс (2.2.3) в поточечной форме имеет вид:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t), x(t, v^k), t), \quad t \in T, \quad (2.2.7)$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, v^k), u^*(\psi(t), x(t, v^k), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, v^k)). \quad (2.2.8)$$

В классе билинейных задач для решения  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  имеет место очевидное соотношение:

$$\psi(t) = \psi(t, v^{k+1}), \quad t \in T.$$

Следовательно, в классе билинейных задач итерационный процесс (2.2.7), (2.2.8) может быть записан в следующей неявной поточечной форме:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), t), \quad v^0 \in V, \quad t \in T. \quad (2.2.9)$$

Для оценки вычислительной эффективности итерационных алгоритмов важно отметить, что трудоемкость реализации одной итерации методов (2.2.2) и (2.2.3) составляет две задачи Коши для фазовых и сопряженных переменных.

Действительно, на  $k$ -й итерации при  $k \geq 0$  процесса (2.2.2) после вычисления решения задачи Коши  $\psi(t, v^k)$ ,  $t \in T$  находится решение  $x(t)$ ,  $t \in T$  фазовой системы:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^*(\psi(t, v^k), x(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Затем строится выходное управление по правилу:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t), t), \quad t \in T.$$

При этом в силу построения выполняется соотношение:

$$x(t) = x(t, v^{k+1}), \quad t \in T.$$

Аналогично, на  $k$ -й итерации процесса (2.2.3) после вычисления  $x(t, v^k)$ ,  $t \in T$  находится решение  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  сопряженной системы:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, v^k), u^*(\psi(t), x(t, v^k), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, v^k)).$$

Затем строится выходное управление по правилу:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t), x(t, v^k), t), \quad t \in T.$$

Для сравнительного анализа характерных особенностей предлагаемых операторных методов неподвижных точек (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) рассмотрим структуру известного градиентного метода в используемых обозначениях.

Стандартный метод условного градиента [28, 31] на каждой итерации описывается соотношениями:

$$\bar{v}^k(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t, v^k), t), \quad t \in T, \quad v^0 \in V, \quad k \geq 0,$$

$$v_\lambda^k(t) = v^k(t) + \lambda(\bar{v}^k(t) - v^k(t)), \quad t \in T,$$

$$\lambda \in [0, 1]: \Phi(v_\lambda^k) \leq \Phi(v^k) \Rightarrow v^{k+1}(t) = v_\lambda^k(t), \quad t \in T.$$

Характерным для указанного известного метода является поиск первого приближения  $\bar{v}^k$  управления, которое затем варьируется в окрестности улучшаемого управления  $v^k$  с целью улучшения по целевому функционалу задачи.

В предлагаемых операторных методах неподвижных точек (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3), в отличие от метода условного градиента, не гарантируется релаксация по целевому функционалу на каждой итерации методов. Компенсируют свойство релаксации нелокальность последовательных приближений управления и отсутствие на каждой итерации достаточно трудоемкой операции выпуклого или игольчатого варьирования управления в окрестности текущего управления.

Для анализа сходимости итерационных процессов (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) к решениям соответствующих задач о неподвижной точке можно применить известные в вычислительной математике методы возмущений и продолжения по параметру.

### 2.3. Методы неподвижных точек принципа максимума на основе операции проектирования

Для численного решения задач о неподвижной точке принципа максимума (1.2.4), (1.2.5) и (1.2.6) рассмотрим соответствующие итерационные процессы метода простой итерации при  $k \geq 0$ :

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X(v^k), v^k), \quad (2.3.1)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X^\alpha(\Psi(v^k), v^k), v^k), \quad (2.3.2)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(v^k), v^k), X(v^k), v^k). \quad (2.3.3)$$

Процесс (2.3.1) в поточечной форме имеет вид:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T. \quad (2.3.4)$$

В отличие от известного метода проекции градиента [28, 31] на каждой итерации процесса (2.3.4) не производится варьирование полученного приближения управления  $v^{k+1}(t)$  с целью улучшения значения функционала  $\Phi(v^k)$ . Это является существенным фактором повышения вычислительной эффективности итерационного процесса (2.3.4), оцениваемой суммарным количеством расчетных фазовых и сопряженных задач Коши, по сравнению с методом проекции градиента.

Процесс (2.3.2) в поточечной форме имеет вид:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Аналогично получению соотношения (2.2.5) можно получить следующее операторное соотношение:

$$X(V^\alpha(p, X^\alpha(p, v), v)) = X^\alpha(p, v), \quad p \in C(T), \quad v \in V. \quad (2.3.5)$$

Тогда из (2.3.5) следует:

$$X^\alpha(\Psi(v^k), v^k) = X(V^\alpha(\Psi(v^k), X^\alpha(\Psi(v^k), v^k), v^k)) = X(v^{k+1}).$$

Следовательно, итерационный процесс (2.3.2) может быть записан в следующем неявном виде:

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X(v^{k+1}, v^k)), \quad v^0 \in V, \quad \alpha > 0,$$

или в поточечной форме:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), v^k(t), t), \quad v^0 \in V, \quad \alpha > 0, \quad t \in T. \quad (2.3.6)$$

Процесс (2.3.3) в поточечной форме принимает вид:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T, \quad (2.3.7)$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, v^k), u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, v^k)). \quad (2.3.8)$$

Аналогично процессу (2.2.7), (2.2.8), в классе билинейных задач для решения  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  имеет место очевидное соотношение:

$$\psi(t) = \psi(t, v^{k+1}), \quad t \in T.$$

Следовательно, в классе билинейных задач итерационный процесс (2.3.7), (2.3.8) может быть записан в следующей неявной поточечной форме:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad v^0 \in V, \quad \alpha > 0, \quad t \in T. \quad (2.3.9)$$

Трудоёмкость вычислительной реализации одной итерации неявных проекционных методов (2.3.2) и (2.3.3) составляют две задачи Коши для фазовых и сопряженных переменных.

Для сравнения разработанных проекционных методов неподвижных точек представим в используемых обозначениях стандартный метод проекции градиента с  $\alpha > 0$  [28]:

$$v_\alpha^k(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

$$\alpha \in (0, \infty): \quad \Phi(v_\alpha^k) \leq \Phi(v^k) \Rightarrow v^{k+1} = v_\alpha^k.$$

На каждой итерации рассматриваемого метода проекции градиента проекционный параметр  $\alpha > 0$  варьируется для обеспечения улучшения имеющегося управления.

В построенных проекционных методах неподвижных точек (2.3.1), (2.3.2) и (2.3.3), в отличие от стандартного метода проекции градиента, параметр проектирования  $\alpha > 0$  фиксируется в итерационном процессе последовательных приближений управления. Таким образом, на каждой итерации предлагаемых методов релаксация по целевому функционалу не гарантируется, но это свойство компенсируется нелокальностью последовательных приближений управления, отсутствием операции варьирования управления в окрестности текущего приближения для обеспечения улучшения по функционалу задачи, возможностью получения экстремальных управлений при достаточно малых параметрах проектирования, обеспечивающих принципиальную сходимость итерационных процессов.

Анализ сходимости построенных итерационных процессов (2.3.1), (2.3.2) и (2.3.3) можно осуществить на основе известного принципа сжимающих отображений.

Докажем с помощью теоремы 2.1 следующие утверждения о сходимости указанных процессов к решениям соответствующих задач о неподвижной точке на подмножестве непрерывных допустимых управлений:

$$V_C = \{v \in C(T) : v(t) \in U, t \in T\} \subset V$$

с нормой  $\|v\|_C = \max_{t \in T} \|v(t)\|$ ,  $v \in V_C$ .

Пусть семейство фазовых траекторий системы (1.1.2) на множестве  $V$  является ограниченным:

$$x(t, v) \in X, t \in T, v \in V, \quad (2.3.10)$$

где  $X \subset R^n$  — выпуклое компактное множество.

Отметим, что достаточным условием ограниченности (2.3.10) может быть выполнение известной оценки [3, 18] с константой  $C > 0$ :

$$\|A(x, t)u + b(x, t)\| \leq C(\|x\| + 1), x \in R^n, u \in U, t \in T.$$

Предположим дополнительно, что функции  $a(x, t)$ ,  $d(x, t)$ ,  $A(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $\varphi(x)$  дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных на соответствующих множествах  $R^n \times T$  и  $R^n$ .

При выполнении ограничения (2.3.10) на основе достаточного условия применительно к сопряженной системе с учетом ее линейности получаем условие ограниченности семейства траекторий сопряженной системы:

$$\psi(t, v) \in P, \quad t \in T, v \in V, \quad (2.3.11)$$

где  $P \subset R^n$  — выпуклое компактное множество.

При сделанных предположениях можно показать аналогично [28], что операторы  $X, \Psi$  удовлетворяют условию Липшица с константами  $C_1 > 0, C_2 > 0$ :

$$\|X(v) - X(u)\|_C \leq C_1 \|v - u\|_C, \quad v \in V_C, u \in V_C,$$

$$\|\Psi(v) - \Psi(u)\|_C \leq C_2 \|v - u\|_C, \quad v \in V_C, u \in V_C.$$

Для отображения  $X^\alpha$ , определяемого соотношением:

$$X^\alpha(\psi, u) = x, \quad \psi \in C(T), u \in V,$$

обозначим  $x(t) = x(t, \psi, u), t \in T$  - решение специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Для отображения  $\Psi^\alpha$ , определяемого по правилу:

$$\Psi^\alpha(x, u) = \psi, \quad x \in C(T), u \in V,$$

обозначим  $\psi(t) = \psi(t, x, u), t \in T$  — решение сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Используя условие Липшица для оператора проектирования  $P_U$  и условий ограниченности (2.3.10) и (2.3.11), получаем:

$$\begin{aligned} & \|x(t, p, u) - x(t, q, v)\| = \\ & = \|x(t, V^\alpha(p, X^\alpha(p, u), u)) - x(t, V^\alpha(q, X^\alpha(q, v), v))\| \leq \\ & \leq M_1 \int_T \|V^\alpha(p, X^\alpha(p, u), u)|_t - V^\alpha(q, X^\alpha(q, v), v)|_t\| dt \leq \\ & \leq M_2 \int_T \|u(t) - v(t)\| dt + \\ & + \alpha M_2 \int_T \|H_1(p(t), x(t, p, u), t) - H_1(q(t), x(t, q, v), t)\| dt, \end{aligned}$$

где  $t \in T, u, v \in V_C, p, q \in C(T), M_1 = \text{const} > 0, M_2 = \text{const} > 0$ .

Аналогично получаем:



$$\begin{aligned}
& \|\psi(t, x, u) - \psi(t, y, v)\| = \\
& = \|\psi(t, V^\alpha(\Psi^\alpha(x, u), x, u)) - \psi(t, V^\alpha(\Psi^\alpha(y, v), y, v))\| \leq \\
& \leq M_3 \int_T \|V^\alpha(\Psi^\alpha(x, u), x, u)|_t - V^\alpha(\Psi^\alpha(y, v), y, v)|_t\| dt \leq \\
& \leq M_4 \int_T \|u(t) - v(t)\| dt + \\
& + \alpha M_4 \int_T \|H_1(\psi(t, x, u), x(t), u(t), t) - H_1(\psi(t, y, v), y(t), v(t), t)\| dt,
\end{aligned}$$

где  $t \in T$ ,  $u, v \in V_C$ ,  $x, y \in C(T)$ ,  $M_3 = \text{const} > 0$ ,  $M_4 = \text{const} > 0$ .

Отсюда нетрудно обосновать при достаточно малом  $\alpha > 0$  оценки:

$$\begin{aligned}
\|X^\alpha(\Psi(u), u) - X^\alpha(\Psi(v), v)\|_C & \leq \frac{(1 + \alpha)M_5}{(1 - \alpha M_6)} \|u - v\|_C, \\
\|\Psi^\alpha(X(u), u) - \Psi^\alpha(X(v), v)\|_C & \leq \frac{(1 + \alpha)M_7}{(1 - \alpha M_8)} \|u - v\|_C,
\end{aligned}$$

где  $u \in V_C$ ,  $v \in V_C$ , константы  $M_i > 0$ ,  $i = 5, 6, 7, 8$ .

На основании выполнения известного условия Липшица для оператора проектирования  $P_U$  получаем:

$$\begin{aligned}
& \|u^\alpha(p, x, u, t) - u^\alpha(q, y, v, t)\|^2 \leq \|(u - v) + \alpha(H_1(p, x, t) - H_1(q, y, t))\|^2 \leq \\
& \leq \|u - v\|^2 + 2\alpha \langle u - v, H_1(p, x, t) - H_1(q, y, t) \rangle + \\
& + \alpha^2 \|H_1(p, x, t) - H_1(q, y, t)\|^2, \tag{2.3.12} \\
& u, v \in U, p, q \in P, x, y \in X, t \in T.
\end{aligned}$$

Предположим, что в шаре  $B(v_0, l) \subset V_C$  радиусом  $l > 0$  с центром в точке  $v_0 \in V_C$  для вектор-функции  $H_1(\psi, x, t)$  выполняется условие:

$$\begin{aligned}
& \langle u(t) - v(t), H_1(\psi, x, t) - H_1(q, y, t) \rangle \leq \\
& \leq -K_1 \|u(t) - v(t)\|^2, u, v \in B(v_0, l), t \in T,
\end{aligned}$$

где  $K_1 = \text{const} > 0$ .

Тогда на основе неравенства (2.3.12) при достаточно малом  $\alpha > 0$  можно получить оценку:

$$\|V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) - V^\alpha(\Psi(v), X(v), v)\|_C \leq (1 - 2\alpha K_1 + \alpha^2 K_2)^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_C,$$

где  $K_2 = \text{const} > 0$ ,  $u, v \in B(v_0, l)$ .

Аналогично предположим, что в шаре  $B(v_0, l) \subset V_C$  радиуса  $l > 0$  с центром в точке  $v_0 \in V_C$  для вектор-функции  $H_1(\psi, x, t)$  выполняется условие:

$$\begin{aligned} & \langle u(t) - v(t), H_1(\psi(t, u), x(t, V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u)), t) - \\ & - H_1(\psi(t, v), x(t, V^\alpha(\Psi(v), X^\alpha(\Psi(v), v), v)), t) \rangle \leq -K_2 \|u(t) - v(t)\|^2, \end{aligned} \quad u, v \in B(v_0, l), t \in T,$$

где  $K_2 = \text{const} > 0$ .

Тогда на основе неравенства (2.3.12) при достаточно малом  $\alpha > 0$  можно получить оценку:

$$\begin{aligned} & \|V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u) - V^\alpha(\Psi(v), X^\alpha(\Psi(v), v), v))\|_C \leq \\ & \leq (1 - 2\alpha K_2 + \alpha^2 M_{10})^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_C \end{aligned}$$

где  $M_{10} = \text{const} > 0$ ,  $u, v \in B(v_0, l)$ .

Также предположим, что в шаре  $B(v_0, l) \subset V_C$  радиуса  $l > 0$  с центром в точке  $v_0 \in V_C$  для вектор-функции  $H_1(\psi, x, t)$  выполняется условие:

$$\begin{aligned} & \langle u(t) - v(t), H_1(\psi(t, V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u)), x(t, u), t) - \\ & - H_u(\psi(t, V^\alpha(\Psi^\alpha(X(v), v), X(v), v)), x(t, v), t) \rangle \leq -K_3 \|u(t) - v(t)\|^2, \end{aligned} \quad u, v \in B(v_0, l), t \in T,$$

где  $K_3 = \text{const} > 0$ .

Тогда на основе неравенства (2.3.12) при достаточно малом  $\alpha > 0$  можно получить оценку:

$$\begin{aligned} & \|V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u) - V^\alpha(\Psi^\alpha(X(v), v), X(v), v))\|_C \leq \\ & \leq (1 - 2\alpha K_3 + \alpha^2 M_{11})^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_C \end{aligned}$$

где  $M_{11} = \text{const} > 0$ ,  $u, v \in B(v_0, l)$ .

Таким образом, в сделанных предположениях при достаточно малых  $\alpha > 0$  операторы  $G_1^\alpha$ ,  $G_2^\alpha$ ,  $G_3^\alpha$  удовлетворяют условию Липшица с константой меньше единицы на множестве  $B(v_0, l)$ .

В силу определения при достаточно малых  $\alpha > 0$  операторы  $G_1^\alpha$ ,  $G_2^\alpha$ ,  $G_3^\alpha$  удовлетворяют условию (2.1.4) в норме  $\|\cdot\|_C$  пространства непрерывных функций  $C(T)$  для любого  $v_0 \in V_C$ .

Таким образом, при достаточно малых  $\alpha > 0$  итерационные приближения процессов (2.3.1), (2.3.2) и (2.3.3) остаются в пределах множества  $B(v_0, l)$  для любого начального приближения  $v^0 \in B(v_0, l)$ .

В результате на основе теоремы 2.1 можно сформировать следующее утверждение о сходимости итерационного процесса (2.3.1).

**Теорема 2.2.** Пусть:

- 1) семейство фазовых траекторий в задаче (1.1.1), (1.1.2) ограничено:  
 $x(t, u) \in X$ ,  $t \in T$ ,  $u \in V$ , где  $X \subset R^n$  — выпуклое компактное множество;
- 2) функции  $a(x, t)$ ,  $d(x, t)$ ,  $A(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $\varphi(x)$  дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных на соответствующих множествах  $R^n \times T$  и  $R^n$ ;
- 3) для вектор-функции  $H_1(\psi, x, t)$  в шаре  $B(v_0, l) \subset V_C$  радиусом  $l > 0$  с центром в точке  $v_0 \in V_C$  выполняется условие:

$$\langle u(t) - v(t), H_1(\psi(t, u), x(t, u), t) - H_1(\psi(t, v), x(t, v), t) \rangle \leq -K \|u(t) - v(t)\|^2,$$

$$u, v \in B(v_0, l), t \in T,$$

где  $K = const > 0$ .

Тогда для достаточно малых параметрах проектирования  $\alpha > 0$  итерационный процесс (2.3.1) сходится в норме  $\|\cdot\|_C$  к единственному решению  $\bar{v}^\alpha \in B(v_0, l)$  задачи о неподвижной точке (2.1.4) для любого начального приближения  $v^0 \in B(v_0, l)$  при  $k = 0$ .

Утверждения о сходимости итерационных процессов (2.3.2) и (2.3.3) на основе теоремы 2.1 формулируются аналогично.

**Теорема 2.3.** Пусть

- 1) семейство фазовых траекторий в задаче (1.1.1), (1.1.2) ограничено:  
 $x(t, u) \in X$ ,  $t \in T$ ,  $u \in V$ , где  $X \subset R^n$  — выпуклое компактное множество;
- 2) функции  $a(x, t)$ ,  $d(x, t)$ ,  $A(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $\varphi(x)$  дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных на соответствующих множествах  $R^n \times T$  и  $R^n$ ;
- 3) для вектор-функции  $H_1(\psi, x, t)$  в шаре  $B(v_0, l) \subset V_C$  радиуса  $l > 0$  с центром в точке  $v_0 \in V_C$  выполняется условие:

$$\langle u(t) - v(t), H_1(\psi(t, u), \tilde{x}(t, u), t) - H_1(\psi(t, v), \tilde{x}(t, v), t) \rangle \leq -K \|u(t) - v(t)\|^2,$$

$$u, v \in B(v_0, l), t \in T,$$

где  $K = \text{const} > 0$ , функция  $\tilde{x}(t, u)$ ,  $t \in T$  - решение специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Тогда для достаточно малых параметрах проектирования  $\alpha > 0$  итерационный процесс (2.3.2) сходится в норме  $\|\cdot\|_C$  к единственному решению  $\bar{v}^\alpha \in B(v_0, l)$  задачи о неподвижной точке (2.1.5) для любого начального приближения  $v^0 \in B(v_0, l)$  при  $k = 0$ .

**Теорема 2.4.** Пусть

- 1) семейство фазовых траекторий в задаче (1.1.1), (1.1.2) ограничено:  
 $x(t, u) \in X$ ,  $t \in T$ ,  $u \in V$ , где  $X \subset R^n$  — выпуклое компактное множество;
- 2) функции  $a(x, t)$ ,  $d(x, t)$ ,  $A(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $\varphi(x)$  дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных на соответствующих множествах  $R^n \times T$  и  $R^n$ ;
- 3) для вектор-функции  $H_1(\psi, x, t)$  в шаре  $B(v_0, l) \subset V_C$  радиуса  $l > 0$  с центром в точке  $v_0 \in V_C$  выполняется условие:

$$\langle u(t) - v(t), H_1(\tilde{\psi}(t, u), x(t, u), t) - H_1(\tilde{\psi}(t, v), x(t, v), t) \rangle \leq -K \|u(t) - v(t)\|^2,$$

$$u, v \in B(v_0, l), t \in T,$$

где  $K = \text{const} > 0$ , функция  $\tilde{\psi}(t, u)$ ,  $t \in T$  - решение специальной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)).$$

Тогда для достаточно малых параметрах проектирования  $\alpha > 0$  итерационный процесс (2.3.3) сходится в норме  $\|\cdot\|_C$  к единственному решению  $\bar{v}^\alpha \in B(v_0, l)$  задачи о неподвижной точке (2.1.6) для любого начального приближения  $v^0 \in B(v_0, l)$  при  $k = 0$ .

*Следствие.* Пусть в условиях теорем 2.2, 2.3 и 2.4 центр  $v_0 \in V_C$  шара  $B(v_0, l)$  удовлетворяет условию принципа максимума. Тогда  $\bar{v}^\alpha = v_0$ .

Действительно, в условиях теорем 2.2, 2.3, 2.4 итерационные процессы для непрерывных начальных приближений  $v^0 \in B(v_0, l)$  при  $k = 0$  могут сходиться только к непрерывным экстремальным управлениям.

Результаты теорем 2.2, 2.3 и 2.4 могут быть обобщены на более широкий класс измеримых функций:

$$V \subset V_L = \{v \in L_\infty(T) : v(t) \in U, t \in T\}$$

с нормой  $\|v\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in T} \|v(t)\|$ ,  $v \in V_L$ . В этом случае появляется принципиальная возможность сходимости итерационных процессов (2.3.1), (2.3.2) и (2.3.3) к экстремальным управлениям в классе кусочно-непрерывных управлений.

Таким образом, при достаточно малых параметрах проектирования  $\alpha > 0$  операторы процессов (2.3.1), (2.3.2) и (2.3.3) определяют последовательности итерационных приближений, однозначно определенных и непрерывно зависящих от параметра проектирования, которые обладают принципиальной сходимостью к экстремальному управлению, удовлетворяющему принципу максимума. Результаты сходимости итерационных процессов зависят от выбора начального приближения процессов. В частности, в случае не единственного решения задач о неподвижной точке, сходимость итерационных процессов к тому или иному экстремальному управлению определяется выбором начального приближения.

#### **2.4. Методы неподвижных точек принципа максимума в билинейной задаче оптимального управления**

В соответствии с формулами (2.2.6) и (2.3.6) итерационные процессы в поточечной форме при  $k \geq 0$  для решения соответствующих задач о неподвижной точке (1.2.2) и (1.3.2) имеют следующий неявный вид:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), t), v^0 \in V, t \in T, \quad (2.4.1)$$

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), v^k(t), t), v^0 \in V, \alpha > 0, t \in T. \quad (2.4.2)$$

В классе билинейных систем в соответствии с формулами (2.2.9) и (2.3.9) итерационные процессы в поточечной форме при  $k \geq 0$  для решения соответствующих задач о неподвижной точке (1.2.3) и (1.3.3) принимают следующий неявный вид:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), t), v^0 \in V, t \in T, \quad (2.4.3)$$

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), v^k(t), t), v^0 \in V, \alpha > 0, t \in T. \quad (2.4.4)$$

В рассматриваемом классе билинейных задач форма условий (2.4.1) - (2.4.4) аналогична условиям нелокального улучшения управления (1.4.8) - (1.4.11). Таким образом, процессы (2.4.1) - (2.4.4) на каждой итерации приобретают свойство нелокального улучшения управления  $v^k \in V$ .

При этом для процессов (2.4.1) и (2.4.3) на основе формул приращения (1.4.6) и

(1.4.7) получаем соответствующие оценки улучшения целевого функционала:

$$\Delta_{v^{k+1}}\Phi(v^k) = \int_T \langle H_1(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \rangle dt \leq 0,$$

$$\Delta_{v^{k+1}}\Phi(v^k) = \int_T \langle H_1(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \rangle dt \leq 0.$$

Для процессов (2.4.2) и (2.4.4) с параметром проектирования  $\alpha > 0$  на основе формул приращения (1.4.6) и (1.4.7) и известного свойства операции проектирования получаем соответствующие усиленные оценки улучшения целевого функционала:

$$\Delta_{v^{k+1}}\Phi(v^k) = \int_T \langle H_1(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \rangle dt \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v^{k+1}(t) - v^k(t)\|^2 dt, \quad (2.4.5)$$

$$\Delta_{v^{k+1}}\Phi(v^k) = \int_T \langle H_1(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \rangle dt \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v^{k+1}(t) - v^k(t)\|^2 dt. \quad (2.4.6)$$

Сходимость итерационных процессов (2.4.2) и (2.4.4) можно анализировать с помощью известного принципа сжимающих отображений на подмножестве непрерывных допустимых управлений:

$$V_C = \{v \in C(T) : v(t) \in U, t \in T\} \subset V$$

с нормой  $\|v\|_C = \max_{t \in T} \|v(t)\|$ ,  $v \in V_C$ .

В частности, можно показать, аналогично предыдущему разделу, что при определенных условиях и достаточно малых параметрах проектирования  $\alpha > 0$  процессы (2.4.2) и (2.4.4) могут сходиться в норме  $\|\cdot\|_C$  к решениям соответствующих задач о неподвижной точке (1.3.2) и (1.3.3).

В рассматриваемом классе билинейных систем, используя свойство релаксации по целевому функционалу, сходимость итерационных процессов (2.4.2) и (2.4.4) можно исследовать по специальной величине невязки принципа максимума на итерационных приближениях управления.

Для каждого  $k \geq 0$  рассмотрим величину

$$\delta(v^k) = \Phi(v^k) - \Phi(v^{k+1}) \geq 0.$$

Если  $\delta(v^k) = 0$ , то в силу оценок (2.4.5) и (2.4.6) получаем, что  $v^k = v^{k+1}$ , т.е. управление  $v^k$  удовлетворяет условию принципа максимума. Таким образом, величина  $\delta(v^k)$  характеризует невязку (меру) выполнения принципа максимума на управлении  $v^k$ .

**Теорема 2.5.** Релаксационные процессы (2.4.2) и (2.4.4) для любого параметра проектирования  $\alpha > 0$  сходятся по невязке принципа максимума:

$$\delta(v^k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Доказательство. В билинейной задаче семейство фазовых траекторий системы в совокупности ограничено:

$$x(t, u) \in X, t \in T, u \in V,$$

где  $X \in R^n$  - выпуклое компактное множество. В силу ограниченности семейства фазовых траекторий последовательности  $\Phi(v^k)$ ,  $k \geq 1$  ограничены снизу. Следовательно, с учетом релаксации, эти последовательности являются сходящимися, т.е.

$$\delta(v^k) = \Phi(v^k) - \Phi(v^{k+1}) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Доказательство окончено.

Практическим критерием окончания расчета итерационных приближений управления является выполнение условия:

$$\delta(v^k) = |\Phi(v^{k+1}) - \Phi(v^k)| \leq \varepsilon |\Phi(v^k)|,$$

где  $\varepsilon > 0$  - заданная относительная точность расчета целевого функционала.

В соответствии с разделом 1.4 для вычисления приближения  $v^{k+1}$  на  $k$ -й итерации процесса (2.4.2) достаточно решить специальную задачу Коши:

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), t)x(t) + \tilde{b}(u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), t)), \quad x(t_0) = x^0. \quad (2.4.7)$$

Пусть  $x(t)$ ,  $t \in T$  - решение задачи Коши. Тогда получаем:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), t \in T.$$

Для вычисления приближения  $v^{k+1}$  на  $k$ -й итерации процесса (2.4.4) достаточно решить специальную сопряженную задачу Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -\tilde{A}^T(u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t)\psi(t) + \tilde{a}(u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t)), \quad \psi(t_1) = -c. \quad (2.4.8)$$

Пусть  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  - решение сопряженной задачи Коши. Тогда получаем:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t \in T.$$

При таком способе вычисления приближения  $v^{k+1}$  трудоемкость  $k$ -й итерации процессов (2.4.2) и (2.4.4) оценивается расчетом двух задач Коши.

Другой способ вычисления приближения  $v^{k+1}$  основывается на представлении уравнений (2.4.2) и (2.4.4) в виде задач о неподвижной точке относительно управления  $v^{k+1}$ . Для решения этих задач можно применить известные методы простых итераций.

Преимуществом такого подхода неподвижных точек является возможность решения на каждой итерации указанных методов простых итераций обычной задачи

Коши с предварительно вычисленным управлением, в отличие от достаточно трудоемкого решения специальных задач Коши (2.4.7) и (2.4.8) с проекционным оператором в правой части систем дифференциальных уравнений.

Другим преимуществом такого подхода неподвижных точек является возможность строгого улучшения экстремального управления  $v^k$  за счет выбора начального приближения методов простой итерации. Специальные задачи Коши (2.4.7) и (2.4.8) не могут строго улучшить экстремальное управление  $v^k$  в силу свойства единственности решения.

## 2.5. Примеры

Рассматриваются простые примеры, иллюстрирующие работу и свойства предлагаемых методов неподвижных точек принципа максимума.

*Пример 2.1. (улучшение управления методом неподвижных точек)*

Рассматривается билинейная задача:

$$\Phi(u) = -2x(2) - \int_0^2 x(t)(u(t) - 2)dt \rightarrow \inf_{u \in V},$$

$$\dot{x}(t) = 2u(t), \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 2].$$

Функция Понтрягина и сопряженная система имеют вид:

$$H(\psi, x, u, t) = 2\psi u + xu - 2x,$$

$$\dot{\psi}(t) = -u(t) + 2, \quad \psi(2) = 2.$$

Отображение  $u^*$  представляется в форме:

$$u^*(\psi, x, t) = \text{sign}(2\psi + x).$$

Принцип максимума имеет вид:

$$u(t) = \text{sign}(2\psi(t, u) + x(t, u)).$$

Рассмотрим метод неподвижных точек принципа максимума на основе задачи о неподвижной точке (1.1.2). Задача о неподвижной точке принципа максимума (1.1.2) в поточечной форме представляется в следующем виде:

$$u(t) = \text{sign}(2\psi(t, u) + x(t)),$$



где  $x(t)$ ,  $t \in T$  - решение специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = 2 \operatorname{sign}(2\psi(t, u) + x(t)), \quad x(0) = 1.$$

Итерационный процесс (2.4.1) при  $k \geq 0$  для решения задачи о неподвижной точке принимает вид:

$$v^{k+1}(t) = \operatorname{sign}(2\psi(t, v^k) + x(t, v^{k+1})), \quad v^0 \in V.$$

Проведем одну итерацию с начальным приближением  $v^0(t) = -\frac{1}{2}$  с соответствующим решением  $\psi(t, v^0) = \frac{3}{2}t - 1$ , решая специальную задачу Коши:

$$\dot{x}(t) = 2 \operatorname{sign}(3t - 2 + x(t)), \quad x(0) = 1.$$

Введем функцию переключения:

$$g(x, t) = 3t - 2 + x.$$

Имеем  $g|_{t=0} = -1$ . Следовательно, получаем следующую задачу Коши в окрестности точки  $t = 0$ :

$$\dot{x}(t) = -2, \quad x(0) = 1.$$

Задача Коши имеет решение  $x(t) = -2t + 1$ . Отсюда следует:

$$g|_{t>0} = t - 1 < 0, \quad 0 < t < 1.$$

Поскольку  $g|_{t=1} = 0$ , а знак нуля не определен, то имеем три возможных случая при  $t > 1$ :

1)  $g|_{t>1} < 0$ ,

2)  $g|_{t>1} > 0$ ,

3)  $g|_{t>1} = 0$ .

Рассмотрим первый случай  $g|_{t>1} < 0$ . Тогда получаем задачу Коши:

$$\dot{x}(t) = -2, \quad x(1) = -1.$$

Следовательно,  $x(t) = -2t + 1$  и функция переключения  $g|_{t>1} = t - 1 < 0$  при  $t > 1$ .

Полученное противоречие показывает, что этот случай невозможен.

Рассмотрим второй случай  $g|_{t>1} > 0$ . Тогда имеем задачу Коши:

$$\dot{x}(t) = 2, \quad x(1) = -1.$$

Следовательно,  $x(t) = 2t - 3$  и функция переключения  $g|_{t>1} = 5t - 5 > 0$  при  $t > 1$ .

Таким образом, получаем решение задачи Коши при  $t > 1$ .

Рассмотрим третий возможный случай  $g|_{t>1} = 0$ . Тогда, дифференцируя по переменной  $t$  это тождество, получаем тождество:

$$3 + \dot{x}(t) = 3 + 2u(t) = 0.$$

Возможное управление  $u(t) = -\frac{3}{2}$ ,  $t > 1$ , реализующее это тождество, не является допустимым. Следовательно, данный случай невозможен.

В результате проведенного анализа, получаем единственное решение специальной задачи Коши:

$$x(t) = \begin{cases} -2t + 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2t - 3, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Отсюда определяется выходное управление:

$$v^1(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

При этом получаем улучшение начального управления:

$$\Phi(v^1) = -2 < \Phi(v^0) = 0.$$

*Пример 2.2. (улучшение управления проекционным методом неподвижных точек)*

Рассматривается билинейная задача:

$$\Phi(u) = \int_0^1 x(t)(u(t) - 1)dt \rightarrow \inf_{u \in V},$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 1].$$

Функция Понтрягина и сопряженная система имеют вид:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi u - x u + x,$$

$$\dot{\psi}(t) = u(t) - 1, \quad \psi(1) = 0.$$

Отображение  $u^\alpha$  с параметром проектирования  $\alpha > 0$  представляется в форме:

$$u^\alpha(\psi, x, u, t) = P_{[-1,1]}(u + \alpha(\psi - x))$$

Принцип максимума в проекционной форме имеет вид:

$$u(t) = P_{[-1,1]}(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t, u))).$$

Рассмотрим метод неподвижных точек принципа максимума на основе задачи о неподвижной точке (1.1.4). Задача о неподвижной точке принципа максимума (1.1.4) в поточечной форме представляется в следующем виде:

$$u(t) = P_{[-1,1]}(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t)))$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  - решение специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = P_{[-1,1]}(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t))), \quad x(0) = 1.$$

Итерационный процесс (2.4.2) при  $k \geq 0$  для решения задачи о неподвижной точке принимает вид:

$$v^{k+1}(t) = P_{[-1,1]}(v^k(t) + \alpha(\psi(t, v^k) - x(t, v^{k+1}))), \quad v^0 \in V.$$

Проведем одну итерацию с начальным приближением  $v^0(t) = 0$  с соответствующим решением  $\psi(t, v^0) = 1 - t$ , решая специальную задачу Коши:

$$\dot{x}(t) = P_{[-1,1]}(\alpha(1-t) - \alpha x(t)), \quad x(0) = 1.$$

Для достаточно малых  $\alpha > 0$  получаем решение специальной задачи Коши:

$$x(t) = \frac{\alpha(-t) - e^{-\alpha t} + \alpha + 1}{\alpha}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Отсюда определяется выходное управление:

$$v^1(t) = e^{-\alpha t} - 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Функционал на выходном управлении имеет значение:

$$\Phi(v^1) = \frac{3 - 2\alpha - 2\alpha^2 + e^{-2\alpha} - 4e^{-\alpha}}{2\alpha^2}.$$

Несложный анализ функции  $\Phi(v^1)$  показывает, что  $\Phi(v^1) \rightarrow -1$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . При этом  $\Phi(v^1)$  является убывающей функцией при достаточно малых  $\alpha > 0$ . Следовательно, при достаточно малых  $\alpha > 0$  выполняется улучшение начального управления:

$$\Phi(v^1) < \Phi(v^0) = -1.$$

### Глава 3. Сравнительный анализ вычислительной эффективности методов неподвижных точек

#### 3.1 Вычислительные особенности

Программная реализация основных методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривалась в работах [6 - 9]. В предлагаемых методах неподвижных точек принципа максимума численное решение фазовых и сопряженных задач Коши осуществлялось с помощью модуля DIVPRK из библиотеки IMSL языка программирования FortranPowerStation 4.0 [9]. Данный модуль реализует метод Рунге - Кутты - Вернера (5–6) порядка точности. Значения вычисляемых фазовых, сопряженных и управляемых переменных запоминались в узлах заданной равномерной сетки  $T_h$  с шагом дискретизации  $h$ . В промежутках между соседними узлами сетки  $T_h$  значение управления принималось постоянным и равным значению в левом узле.

Итерационные процессы последовательных приближений управления при  $k \geq 0$  осуществлялись до выполнения следующего критерия остановки:

$$\max \left\{ |v^{k+1}(t) - v^k(t)|, t \in T_h \right\} \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$  — заданная точность расчета задачи о неподвижной точке.

Альтернативным критерием остановки расчета также являлось достижение достаточно малого значения невязки принципа максимума для управления  $v^k$  в следующей форме:

$$\max \left\{ \left\langle H_1(\psi(t, v^k), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \right\rangle, t \in T_h \right\} \leq \varepsilon.$$

Значение параметра проектирования  $\alpha > 0$  в проекционных методах неподвижных точек фиксировалось и выбиралось экспериментально в ходе расчетов.

#### 3.2 Билинейная задача

Рассматривается билинейная задача из раздела 1.5:

$$\Phi(u) = \int_0^2 u(t)x(t)dt \rightarrow \inf_{u \in V},$$

$$\dot{x}(t) = u(t), x(0) = 1, u(t) \in U = [-1, 1], t \in T = [0, 2].$$

Функция Понтрягина и сопряженная система соответственно имеют вид:

$$H(\psi, x, u, t) = (\psi - x)u; \quad g(\psi, x, t) = \psi - x;$$

$$\dot{\psi}(t) = u(t), \quad \psi(2) = 0.$$

Отображение  $u^*$  представляется в форме

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in [-1, 1]} \langle \psi - x, w \rangle = \text{sign}(\psi - x).$$

Условие принципа максимума имеет вид:

$$u(t) = \text{sign}(\psi(t, u) - x(t, u)), \quad t \in T.$$

Экстремальными управлениями являются допустимые управления  $u \in V$ , удовлетворяющие условию:

$$g(\psi(t, u), x(t, u), t) = \psi(t, u) - x(t, u) = 0, \quad t \in T.$$

Таким образом, все экстремальные управления являются особыми с особыми интервалами, равными интервалу  $T$ .

Для численного расчета особых экстремальных управлений рассмотрим эквивалентные условия принципа максимума в форме проекционных задач о неподвижной точке.

Задача о неподвижной точке (1.2.4) с параметром  $\alpha > 0$  в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t, u))), \quad t \in T.$$

Задача о неподвижной точке (1.2.5) в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t))), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t))), \quad x(0) = 1.$$

Задача о неподвижной точке (1.2.6) в поточечной форме имеет следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u))), \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u))), \psi(2) = 0.$$

Соответствующие итерационные методы поиска особых экстремальных управлений (2.3.1) - (2.3.3) при  $k \geq 0$  в поточечной форме рассматриваются в виде:

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha(\psi(t, v^k) - x(t, v^k))), t \in T; \quad (3.2.1)$$

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha(\psi(t, v^k) - x(t))), t \in T, \quad (3.2.2)$$

$$\dot{x}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha(\psi(t, v^k) - x(t))), x(0) = 1; \quad (3.2.3)$$

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, v^k))), t \in T, \quad (3.2.4)$$

$$\dot{\psi}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, v^k))), \psi(2) = 0. \quad (3.2.5)$$

Результаты расчета рассматриваемыми методами сравнивались с результатами расчета стандартным методом проекции градиента.

Расчеты проводились при  $\alpha = 0.8$ . Для численного решения фазовых и сопряженных задач Коши применялся метод Рунге-Кутты-Вернера переменного (5-6) порядка точности, который реализовывался с помощью программы DIVPRK библиотеки IMSL Fortran PowerStation 4.0 [9]. Значения вычисленных управляемых, фазовых и сопряженных переменных запоминались в узлах заданной на интервале  $T$  равномерной сетки  $T_h$  с шагом дискретизации  $h = 10^{-3}$ . При численном решении задач Коши значения управления в промежутках между соседними узлами сетки  $T_h$  принимались равным значению в левом узле. Критерием остановки расчета для всех рассматриваемых методов являлось достижение достаточно малого значения невязки принципа максимума для управления  $v^k$ :

$$\max \left\{ \left\langle g(\psi(t, v^k), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \right\rangle, t \in T_h \right\} \leq 10^{-13}.$$

Для стартовых управлений  $u^0 = 1$ ,  $u^0 = 0$  и  $u^0 = -1$  расчетные управления метода проекции градиента, метода (3.2.1) и метода (3.2.2), (3.2.3) практически совпадают с особым экстремальным управлением  $u(t) = 0.23t - 0.73, t \in T$ . Для тех же стартовых управлений расчетные управления метода (3.2.4), (3.2.5) практически совпадают с другим особым экстремальным управлением  $u(t) = -0.23t - 0.27, t \in T$ .

В таблице 1 приведены результаты расчетов сравниваемыми методами при различных стартовых управлениях  $v^0$ .  $NC$  - суммарное количество расчетных задач

Коши,  $NI$  - суммарное количество итераций улучшения управления,  $\hat{\Phi}$  - расчетное значение функционала.

Таблица 1. Сравнительные результаты расчетов. 1 – метод (3.2.2), (3.2.3); 2 – метод (3.2.4), (3.2.5); 3 – метод (3.2.1); 4- метод проекции градиента.

$v^0$	1: $NC, NI, \hat{\Phi}$	2: $NC, NI, \hat{\Phi}$	3: $NC, NI, \hat{\Phi}$	4: $NC, NI, \hat{\Phi}$
-1	13,6, -0.499999999	13,6, -0.499999999	25,12, -0.499999999	48, 15, -0.499999999
0	11,5, -0.499999999	11,5, -0.499999999	23,11, -0.499999999	46, 14, -0.499999999
0. 5	13, 6, -0.499999999	13, 6 , -0.499999999	29, 14, -0.499999999	62, 22, -0.499999999
1	15,7, -0.499999999	15,7, -0.499999999	35,17, -0.499999999	70, 26, -0.499999999

Итерационные методы неподвижных точек (3.2.2), (3.2.3) и (3.2.4), (3.2.5) показывают существенно лучшую вычислительную эффективность по количеству расчетных задач Коши в сравнении с методом проекции градиента и методом (3.2.1).

Метод условного градиента не работает в данном примере ввиду неопределенности особых значений управления при достаточно малых значениях функции переключения.

### 3.3 Задача о колебательных движениях маятника

Рассматривается известный модельный пример с нелинейной системой [25], который имеет следующий вид:



$$\Phi(u) = x_1^2(5) + x_2^2(5) \rightarrow \inf_{u \in U},$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, 5],$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 5,$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) - \sin x_1(t), \quad x_2(0) = 0.$$

Здесь  $x_1$  - угол отклонения маятника от нижнего устойчивого положения равновесия,  $x_2$  - скорость отклонения, функция  $u(t) \in U = [-1, 1]$  характеризует воздействие внешней силой.

Функция Понтрягина в задаче имеет вид:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - \psi_2 \sin x_1.$$

Стандартная сопряженная система записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= \psi_2(t) \cos x_1(t), & \psi_1(5) &= -2x_1(5), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), & \psi_2(5) &= -2x_2(5). \end{aligned}$$

В данной задаче имеем:

$$u^*(\psi, x, t) = \text{sign } \psi_2, \quad g(\psi, x, t) = \psi_2,$$

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_{[-1,1]}(w + \alpha \psi_2).$$

Принцип максимума в форме задачи о неподвижной точке на основе операции максимизации имеет вид:

$$u(t) = \text{sign}(\psi_2(t, u)), \quad t \in T.$$

Принцип максимума в форме задачи о неподвижной точке на основе операции проектирования имеет вид:

$$u(t) = P_{[-1,1]}(u(t) + \alpha \psi_2(t, u)), \quad t \in T.$$

В данной задаче другие формы принципа максимума в виде задач о неподвижной точке совпадают с указанными выше.

Соответствующие итерационные методы неподвижных точек при  $k \geq 0$  принимают вид:

$$v^{k+1}(t) = \text{sign}(\psi_2(t, v^k)), \quad t \in T, \quad (3.3.1)$$

$$v^{k+1}(t) = P_{[-1,1]}(v^k(t) + \alpha \psi_2(t, v^k)), t \in T. \quad (3.3.2)$$

Значения фазовых, сопряженных и управляемых переменных запоминались в узлах заданной равномерной сетки  $T_h$  с шагом дискретизации  $h = 10^{-2}$ . В промежутках между соседними узлами сетки  $T_h$  значение управления принималось постоянным и равным значению в левом узле.

Критерием остановки расчета для рассматриваемых методов являлось достижение достаточно малого значения невязки принципа максимума для управления  $v^k$ :

$$\max \left\{ \left\langle g(\psi(t, v^k), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \right\rangle, t \in T_h \right\} \leq 10^{-3}.$$

Можно показать, что в данном примере нет особых интервалов. Следовательно, метод (3.3.1) реализуется следующим образом:

$$v^{k+1}(t) = \begin{cases} 1, & \psi_2(t, v^k) > 0, \\ -1, & \psi_2(t, v^k) < 0. \end{cases}$$

Ниже приведены результаты расчетов методом (3.3.1) при различных стартовых управлениях  $v^0$ .  $NI$  - суммарное количество итераций улучшения управления,  $\Phi^*$  - расчетное значение функционала,  $u^*$  - расчетное управление.

1.  $v^0 = 0$ :  $NI = 3$ ,  $\Phi^* = 21.829$ ,  $u^*(t) = -1, t \in [0, 4.98]$ ,  $u^*(t) = 1, t \in (4.98, 5]$ .

2.  $v^0 = 1$ :  $NI = 3$ ,  $\Phi^* = 21.829$ ,  $u^*(t) = -1, t \in [0, 4.98]$ ,  $u^*(t) = 1, t \in (4.98, 5]$ .

3.  $v^0 = -1$ :  $NI = 2$ ,  $\Phi^* = 21.829$ ,  $u^*(t) = -1, t \in [0, 4.98]$ ,  $u^*(t) = 1, t \in (4.98, 5]$ .

Далее показаны результаты расчетов методом (3.3.2) при  $\alpha = 10^{-1}$  при тех же стартовых управлениях  $v^0$ .

1.  $v^0 = 0$ :  $NI = 17$ ,  $\Phi^* = 11.873$ ,  $u^*(t) = 1, t \in [0, 0.98]$ ,  $u^*(t) = -1, t \in (0.98, 4.55]$ ,  
 $u^*(t) = 1, t \in (4.55, 5]$ .

2.  $v^0 = 1$ :  $NI = 12$ ,  $\Phi^* = 21.829$ ,  $u^*(t) = -1, t \in [0, 4.98]$ ,  $u^*(t) = 1, t \in (4.98, 5]$ .

3.  $v^0 = -1$ :  $NI = 14$ ,  $\Phi^* = 21.829$ ,  $u^*(t) = -1, t \in [0, 4.98]$ ,  $u^*(t) = 1, t \in (4.98, 5]$ .

Результаты расчетов демонстрируют сходимость итерационных процессов к двум возможным неособым экстремальным управлениям в зависимости от стартового

управления. При этом проекционный метод неподвижных точек позволяет получить со стартового управления  $u(t) = 0$  оптимальное управление для этого примера, указанное в [25].

### 3.4 Нелинейная задача с особыми управлениями

Рассматривается упрощенная задача из книги [37] без терминального ограничения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \cos x_2(t), & x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= 0, \\ |u(t)| &\leq 1, & t \in T &= [0, 3\pi], & U &= \{|u| \leq 1\}, \end{aligned}$$

$$\Phi(u) = x_1(3\pi) \rightarrow \inf_{u \in U}$$

Функция Понtryгина записывается в виде:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 \cos x_2 + \psi_2 u, \quad g(\psi, x, t) = \psi_2.$$

Стандартная сопряженная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= 0, & \psi_1(3\pi) &= -1, \\ \dot{\psi}_2(t) &= \psi_1(t) \sin x_2(t), & \psi_2(3\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\psi_1(t) = -1, \quad t \in T; \quad \dot{\psi}_2(t) = -\sin x_2(t), \quad \psi_2(3\pi) = 0.$$

Условия принципа максимума представляются в двух эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{sign}(\psi_2(t, u)), \quad t \in T; \\ u(t) &= P_U(u(t) + \alpha \psi_2(t, u)), \quad t \in T. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Особые управления характеризуются тождеством:

$$g(\psi(t, u), x(t, u), t) = \psi_2(t, u) = 0, \quad t \in T.$$

Дифференцирование тождества (3.4.1) позволяет получить возможные особые значения управления:  $u(t) = 0$ . Других особых значений нет.

Краевая задача принципа максимума сводится к вспомогательной краевой задаче:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \text{sign}(\psi_2(t)), \quad x_2(0) = 0, \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\sin x_2(t), \quad \psi_2(3\pi) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично методике работы [37] можно получить следующее решение этой краевой задачи:

$$\begin{aligned}x_2(t) &= t, \quad t \in [0, \pi], \quad x_2(t) = \pi, \quad t \in [\pi, 3\pi], \\ \psi_2(t) &= \cos t + 1, \quad t \in [0, \pi], \quad \psi_2(t) = 0, \quad t \in [\pi, 3\pi].\end{aligned}$$

Этому решению соответствует особое экстремальное управление с особым интервалом  $[\pi, 3\pi]$ :

$$u(t) = 1, \quad t \in [0, \pi), \quad u(t) = 0, \quad t \in [\pi, 3\pi], \quad \Phi(u) = -2\pi.$$

Аналогично можно получить второе решение краевой задачи и второе особое экстремальное управление с особым интервалом  $[\pi, 3\pi]$ :

$$\begin{aligned}x_2(t) &= -t, \quad t \in [0, \pi], \quad x_2(t) = -\pi, \quad t \in [\pi, 3\pi], \\ \psi_2(t) &= -\cos t - 1, \quad t \in [0, \pi], \quad \psi_2(t) = 0, \quad t \in [\pi, 3\pi]; \\ u(t) &= -1, \quad t \in [0, \pi), \quad u(t) = 0, \quad t \in [\pi, 3\pi], \quad \Phi(u) = -2\pi.\end{aligned}$$

Задача допускает очевидное нулевое решение:

$$x_2(t) = 0, \quad \psi_2(t) = 0, \quad t \in T.$$

Этому решению соответствует особое экстремальное управление  $u(t) = 0$ ,  $t \in T$ ,  $\Phi(u) = 3\pi$ .

Вспомогательная краевая задача допускает также два симметричных решения, которым соответствуют неособые экстремальные управления:

$$\begin{aligned}u(t) &= 1, \quad x_2(t) = t, \quad \psi_2(t) = \cos t + 1, \quad t \in T, \quad \Phi(u) = 0; \\ u(t) &= -1, \quad x_2(t) = -t, \quad \psi_2(t) = -\cos t - 1, \quad t \in T, \quad \Phi(u) = 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим результаты численного расчета рассматриваемой задачи оптимального управления.

Задачи о неподвижной точке (1.2.4) - (1.2.6) в поточечной форме совпадают между собой и имеют вид (3.4.1). Следовательно, итерационные процессы (2.3.1) - (2.3.3) в поточечной форме также совпадают между собой и принимают вид:

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha \psi_2(t, v^k)), \quad t \in T. \quad (3.4.2)$$

При этом для повышения точности расчетные приближения управления вычислялись одновременно с расчетом специальной задачи Коши по правилу (2.2.7), (2.2.8).

Эффективность итерационного метода неподвижных точек (3.4.2) (ПМНТ) сравнивалась с эффективностью метода условного градиента (МУГ) и метода проекции градиента (МПГР). Расчеты проводились при  $\alpha = 10^{-2}$ . Сетка  $T_h$  рассматривалась с шагом дискретизации  $h = 10^{-2}$ . В методе условного градиента при значениях функции переключения:

$$|g(\psi(t, u), x(t, u), t) = \psi_2(t, u)| < 10^{-4}$$

значение управления выбиралось равным особому значению:  $u(t) = 0$ . Критерием остановки расчета для всех рассматриваемых методов являлось достижение достаточно малого значения невязки принципа максимума для управления  $u^k$ :

$$\max \left\{ \left\langle g(\psi(t, v^k), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \right\rangle, t \in T_h \right\} \leq 10^{-8}.$$

В таблице 2 приведены результаты расчетов сравниваемыми методами при различных стартовых управлениях  $v^0$ .  $\hat{\Phi}$  - расчетное значение функционала,  $NI$  - суммарное количество итераций улучшения управления,  $NC$  - суммарное количество расчетных задач Коши.

Таблица 2. Сравнительные результаты расчетов.

$v^0$	$NC, NI, \hat{\Phi}$ (ПМНТ)	$NC, NI, \hat{\Phi}$ (МПГР)	$NC, NI, \hat{\Phi}$ (МУГ)
-1	3,1,0	3,1,0	3,1,0
-0.5	743, 371, -6.28	4712, 1068, -6.28	33011, 3677, -6.28
0	3,1,9.42	3,1,9.42	3,1,9.42
0.5	743, 371, -6.28	4712, 1068, -6.28	33011, 3677, -6.28
1	3,1,0	3,1,0	3,1,0

Для стартовых управлений  $-1 < v^0 < 0$  расчетные управления практически совпадают с первым особым экстремальным управлением, указанным выше. На рисунке 1 представлены расчетные управления, полученные сравниваемыми методами при стартовом управлении  $v^0 = -0.5$ .

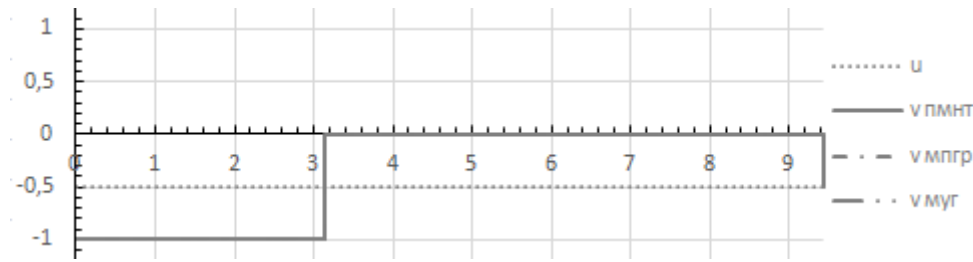


Рис. 1.  $u$  - стартовое управление,  $v_{\text{пмнт}}$  – расчетное управление проекционного метода неподвижных точек,  $v_{\text{мпгр}}$  – расчетное управление метода проекции градиента,  $v_{\text{муг}}$  – расчетное управление метода условного градиента.

Для стартовых управлений  $1 > v^0 > 0$  расчетные управления практически совпадают со вторым особым экстремальным управлением, указанным выше. На рисунке 2 представлены расчетные управления, полученные сравниваемыми методами при стартовом управлении  $v^0 = 0.5$ .

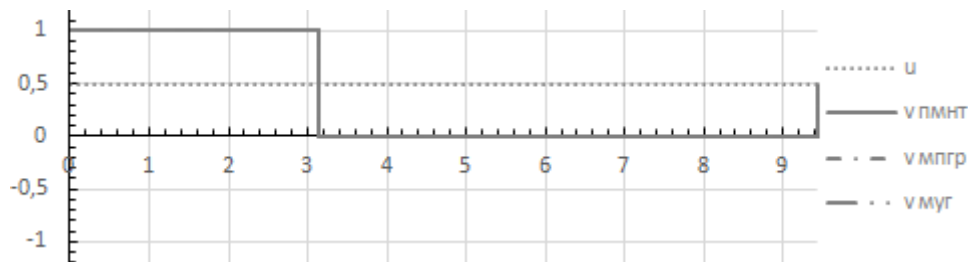


Рис. 2.  $u$  - стартовое управление,  $v_{\text{пмнт}}$  – расчетное управление проекционного метода неподвижных точек,  $v_{\text{мпгр}}$  – расчетное управление метода проекции градиента,  $v_{\text{муг}}$  – расчетное управление метода условного градиента.

Результаты расчета особых управлений демонстрируют существенно лучшую вычислительную эффективность итерационного метода неподвижных точек по суммарному количеству расчетных задач Коши в сравнении с градиентными методами.

### 3.5. Задача минимизации нормы конечного состояния системы

Рассматривается задача минимизации нормы конечного состояния системы, линейной по управлению, из раздела 1.5:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= -1, \end{aligned}$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, 3], \quad U = \{|u| \leq 1\},$$

$$\Phi(u) = 0.5(x_1^2(3) + x_2^2(3)) \rightarrow \inf_{u \in U}.$$

Задача для  $T = [0, 2]$  рассматривалась в работе [82].

Функция Понтрягина и сопряженная система имеют вид:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u; \quad g(\psi, x, t) = \psi_2;$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= 0, & \psi_1(3) &= -x_1(3), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), & \psi_2(3) &= -x_2(3). \end{aligned}$$

Условия принципа максимума на основе операции максимизации и на основе операции проектирования соответственно принимают вид:

$$u(t) = \text{sign}(\psi_2(t, u)), \quad t \in T;$$

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha \psi_2(t, u)), \quad t \in T. \quad (3.5.1)$$

Анализ краевой задачи принципа максимума:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2, \\ \dot{x}_2(t) &= \text{sign}(\psi_2(t)), & x_2(0) &= -1, \\ \dot{\psi}_1(t) &= 0, & \psi_1(3) &= -x_1(3), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), & \psi_2(3) &= -x_2(3) \end{aligned}$$

показывает, что экстремальные управления могут быть только особыми с особыми интервалами, равными  $T$ . При этом последовательное дифференцирование тождества:

$$g(\psi(t), x(t), t) = \psi_2(t) = 0$$

в силу фазовой и сопряженной систем приводит к соотношениям, выполняющимся тождественно, которые не позволяют определять особые значения экстремального управления.

Существование особых экстремальных управлений определяется возможностью выполнения тождества на интервале ненулевой меры:

$$x_1(3)t - x_1(3)t_1 - x_2(3) = 0.$$

Это тождество является эквивалентным условиям:

$$x_1(3) = 0, \quad x_2(3) = 0.$$

Особые управления могут быть найдены на основе вспомогательной краевой задачи:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2, & x_1(3) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= -1, & x_2(3) &= 0, \end{aligned}$$

которая сводится к системе уравнений:

$$\int_0^3 \left( \int_0^\xi u(\tau) d\tau - 1 \right) d\xi + 2 = 0,$$

$$-1 + \int_0^3 u(\tau) d\tau = 0.$$

В классе линейных функций  $u(t) = k_1 t + k_2$  этим условиям удовлетворяет особое управление:

$$u = \frac{2}{9} t, \quad t \in [0, 3], \quad \Phi(u) = 0,$$

которое является оптимальным.

Для численного поиска особых экстремальных управлений рассматривались итерационные методы (2.3.1)-(2.3.3).

Соответствующие задачи о неподвижной точке (1.2.4) и (1.2.5) в поточечной форме совпадают между собой и имеют вид (3.5.1). Следовательно, итерационные процессы (2.3.1) - (2.3.3) в поточечной форме также совпадают между собой и принимают вид:

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha \psi_2(t, v^k)), \quad t \in T. \quad (3.5.2)$$

Эффективность итерационного метода (3.5.2) сравнивалась с эффективностью стандартного метода проекции градиента. В обоих методах значения фазовых, сопряженных и управляемых переменных запоминались в узлах заданной равномерной сетки  $T_h$  с шагом дискретизации  $h = 0.01$ . В промежутках между соседними узлами сетки  $T_h$  значение управления принималось постоянным и равным значению в левом узле. Итерационные процессы последовательных приближений управления осуществлялись до выполнения следующего критерия остановки:

$$\max \left\{ \left\langle g(\psi(t, v^k), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \right\rangle, t \in T_h \right\} \leq 10^{-32}.$$



Для повышения точности расчетные приближения управления вычислялись методом (2.3.7), (2.3.8).

В таблицах 3 и 4 приведены результаты расчета методом (3.5.1) при  $\alpha = 0.1$  и методом проекции градиента при различных стартовых управлениях  $v^0$ .  $\hat{\Phi}$  - расчетное значение функционала,  $NI$  - суммарное количество итераций улучшения управления,  $NC$  - суммарное количество расчетных задач Коши.

Таблица 3. Результаты расчета методом (2.3.7), (2.3.8).

$v^0$	$\Phi(v^0)$	$\hat{\Phi}$	$NI$	$NC$
0	1.0	5.03571446 6779315E-032	173	349
0.5	0.90625	5.33865689 9819406E-032	156	315
-0.5	8.40625	1.95337117 3377661E-032	181	365
1.0	8.125	3.83589222 5614343E-032	151	305
-1.0	23.125	5.09543899 0260161E-032	186	375

Таблица 4. Результаты расчета методом проекции градиента

$v^0$	$\Phi(v^0)$	$\hat{\Phi}$	$NI$	$NC$
0	1.0	2.5368576 22943042E-029	272	1246
0.5	0.90625	1.3623660 37348309E-030	270	1239
-0.5	8.40625	4.4578973 60122761E-031	266	1211

1.0	8.125	4.4578973 60122761E-031	265	1209
-1.0	23.125	4.4578973 60122761E-031	266	1211

Расчетное управление в обоих методах практически совпадает с особым оптимальным управлением  $u = \frac{2}{9}t$ ,  $t \in [0,3]$ . На рисунке 3 представлено расчетное управление, полученное обоими методами при стартовом управлении  $v^0 = -0.5$ .

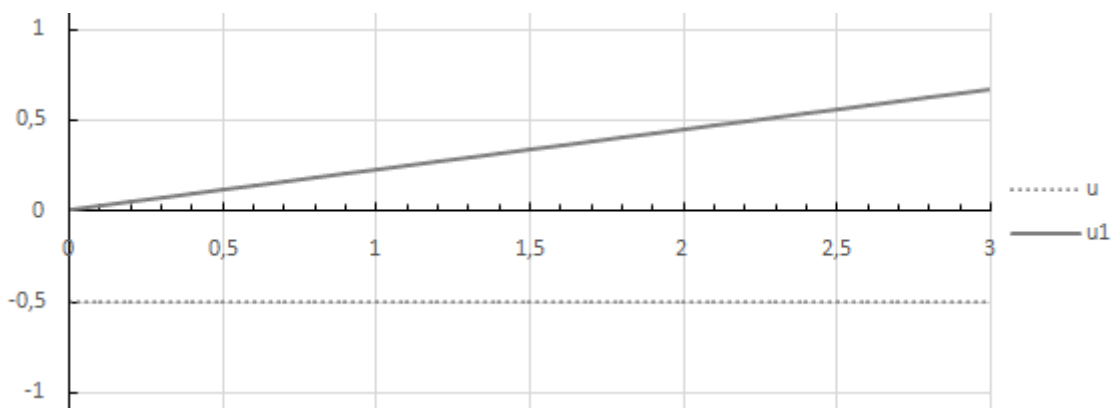


Рис. 3.  $u$  - стартовое управление,  $u_1$  – расчетное управление.

Итерационный метод неподвижных точек показывает существенно лучшую вычислительную эффективность по количеству расчетных задач Коши в сравнении с градиентным методом. Также можно отметить по расчетным значениям функционала, что с разных стартовых управлений метод неподвижных точек позволяет получить практически одно и тоже расчетное управление. Расчетные управления градиентного метода с разных стартовых управлений отличаются по расчетному значению функционала на величину до двух порядков.

### 3.6. Задача оптимизации квантовой системы

Рассматривается известная особая задача управления системой спинов квантовых частиц [11], которая может быть представлена в следующем виде:

$$\Phi(u) = 1 - \langle x(t_1), Lx(t_1) \rangle \rightarrow \min ,$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u(t)x_3(t) + x_4(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) - u(t)x_4(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -u(t)x_1(t) - x_2(t), \\ \dot{x}_4(t) &= -x_1(t) + u(t)x_2(t), \end{aligned} \quad L = \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 & 0 & a_1b_2 - b_1a_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 & a_2^2 + b_2^2 & a_2b_1 - b_2a_1 & 0 \\ 0 & a_2b_1 - b_2a_1 & b_1^2 + a_1^2 & b_1b_2 + a_1a_2 \\ a_1b_2 - b_1a_2 & 0 & b_1b_2 + a_1a_2 & b_2^2 + a_2^2 \end{pmatrix},$$

$$x_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0, \quad t \in T = [0, t_1], \quad t_1 = 1.5.$$

$$a_1 = 0.6, \quad b_1 = -0.3, \quad a_2 = 0.1, \quad b_2 = \sqrt{0.54}.$$

Вектор  $x(t)$  описывает состояние квантовой системы, функция  $u(t) \in U = [-30, 30]$  характеризует воздействие внешним полем.

Функция Понтрягина в задаче имеет вид:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1(ux_3 + x_4) + \psi_2(x_3 - ux_4) + \psi_3(-ux_1 - x_2) + \psi_4(-x_1 + ux_2).$$

Стандартная сопряженная система записывается в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= u(t)\psi_3(t) + \psi_4(t), & \dot{\psi}_2(t) &= \psi_3(t) - u(t)\psi_4(t), \\ \dot{\psi}_3(t) &= -u(t)\psi_1(t) - \psi_2(t), & \dot{\psi}_4(t) &= u(t)\psi_2(t) - \psi_1(t), \end{aligned} \quad t \in T,$$

$$\psi_1(t_1) = 2(a_1^2 + b_1^2)x_1(t_1) + 2(a_1a_2 + b_1b_2)x_2(t_1) + 2(a_1b_2 - b_1a_2)x_4(t_1),$$

$$\psi_2(t_1) = 2(a_1a_2 + b_1b_2)x_1(t_1) + 2(a_2^2 + b_2^2)x_2(t_1) + 2(a_2b_1 - b_2a_1)x_3(t_1),$$

$$\psi_3(t_1) = 2(a_2b_1 - b_2a_1)x_2(t_1) + 2(b_1^2 + a_1^2)x_3(t_1) + 2(b_1b_2 + a_1a_2)x_4(t_1),$$

$$\psi_4(t_1) = 2(a_1b_2 - b_1a_2)x_1(t_1) + 2(b_1b_2 + a_1a_2)x_3(t_1) + 2(b_2^2 + a_2^2)x_4(t_1).$$

Условие принципа максимума (1.1.5) имеет вид:

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T,$$

$$u^*(\psi, x, t) = \begin{cases} +30, & g(\psi, x) > 0, \\ -30, & g(\psi, x) < 0, \\ w \in U, & g(\psi, x) = 0, \end{cases} \quad g(\psi, x) = \psi_1 x_3 - \psi_2 x_4 - \psi_3 x_1 + \psi_4 x_2.$$

Особые интервалы экстремальных управлений определяются тождеством  $g(\psi(t, u), x(t, u)) \equiv 0$ .

В работе [11] для расчета рассматриваемой задачи оптимального управления применялся глобальный метод Кротова, эффективность которого сравнивалась с известным градиентным методом. В качестве стартового начального приближения управления для указанных методов выбиралось управление, определяемое из физических соображений:

$$u(t) = tg(2\gamma(2t - 1.5)), \quad t \in T, \quad \gamma = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg}(-30).$$

При этом было получено расчетное приближение экстремального управления с значением целевого функционала  $\Phi^* \approx 0.000952$ . Особый интервал расчетного управления равен  $[0.0667, t_1]$ . Точность условия принципа максимума в смысле равенства нулю модуля функции переключения  $g(\psi, x)$  на итерационных приближениях методов принималась равной значению  $\varepsilon_v = 10^{-3}$ .

В рассматриваемых операторных методах принципа максимума численное решение фазовых и сопряженных задач Коши осуществлялось с помощью модуля DIVPRK из библиотеки IMSL языка программирования FortranPowerStation 4.0 [9]. Данный модуль реализует метод Рунге-Кутты-Вернера (5-6) порядка точности. Значения фазовых, сопряженных и управляемых переменных запоминались в узлах заданной равномерной сетки  $T_h$  с шагом дискретизации  $h = 10^{-5}$ . В промежутках между соседними узлами сетки  $T_h$  значение управления принималось постоянным и равным значению в левом узле.

Критерием остановки расчета для всех рассматриваемых методов являлось достижение достаточно малого значения невязки принципа максимума для управления  $v^k$ :

$$\max \left\{ \left\langle g(\psi(t, v^k), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \right\rangle, t \in T_h \right\} \leq 10^{-6}.$$

*Операторный метод (2.2.1).*

Итерационный процесс (2.2.1) в поточечной форме при  $k \geq 0$  имеет вид:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t, v^k), t), t \in T.$$

Для адекватного сравнения эффективности результатов итерационного процесса (2.2.1) с результатами, полученными в [11], равенство нулю функции переключения  $g(\psi, x)$  на итерационных приближениях также оценивалась с точностью  $\varepsilon_v = 10^{-3}$ . В этом случае значение управления  $v^{k+1}(t)$  на особом интервале определялось по правилу дифференцирования тождества  $g(\psi(t, u), x(t, u)) \equiv 0$  и вычисления особого управления  $u(t)$  в силу фазовой и сопряженной систем.

На рисунке 4 представлено конечное расчетное управление  $v1(t)$ ,  $t \in T$ , полученное методом (2.2.1) с указанного выше начального управления  $u(t)$  с количеством итераций улучшения, равным 18, и значением функционала  $\Phi^* \approx 0.000989$ . Особый интервал конечного управления равен  $[0.0693, 1.4717]$ .

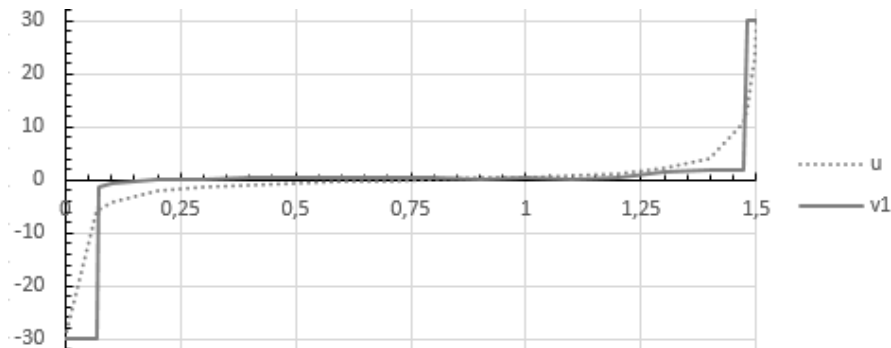


Рис. 4.  $u$  - стартовое управление,  $v1$  – расчетное управление, полученное методом (2.2.1).

*Операторный метод (2.2.2).*

Итерационный процесс (2.2.2) в поточечной форме при  $k \geq 0$  имеет вид:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t), t), t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной фазовой задачи Коши, получающейся при замене переменной управления на выражение  $u^*(\psi(t, v^k), x(t), t)$  в правой части фазовой системы.

Для адекватного сравнения эффективности результатов итерационного процесса (2.2.2) с результатами, полученными в [11], равенство нулю функции переключения  $g_1(x) = g(\psi(t, v^k), x)$  на итерационных приближениях также оценивалась с точностью  $\varepsilon_v = 10^{-3}$ . В этом случае значение управления  $v^{k+1}(t)$  на особом интервале определялось по правилу дифференцирования тождества  $g_1(x(t, u)) \equiv 0$  и вычисления особого управления  $u(t)$  в силу фазовой системы.

На рисунке 5 представлено конечное расчетное управление  $v_2(t)$ ,  $t \in T$ , полученное методом (2.2.2) с указанного выше начального управления  $u(t)$  с количеством итераций улучшения, равным 24, и значением функционала  $\Phi^* \approx 0.000552$ . Особый интервал конечного управления равен  $[0.0857, 1.4463]$ .

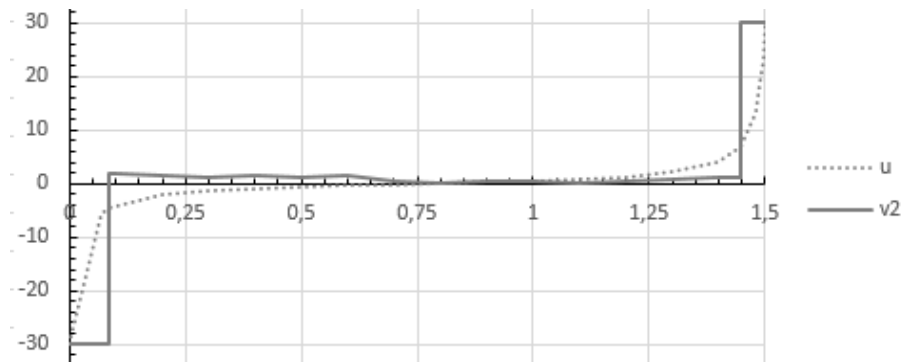


Рис. 5.  $u$  - стартовое управление,  $v_2$  – расчетное управление, полученное методом (2.2.2).

#### *Проекционный операторный метод (2.3.1).*

Для заданного  $\alpha > 0$  итерационный процесс (2.3.1) в поточечной форме при  $k \geq 0$  принимает вид:

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha g(\psi(t, v^k), x(t, v^k))), t \in T.$$

На рисунке 6 представлено конечное расчетное управление  $v_3(t)$ ,  $t \in T$ , полученное методом (2.3.1) с указанного выше начального управления  $u(t)$  при  $\alpha = 10^{-2}$  с количеством итераций улучшения, равным 14, и значением функционала  $\Phi^* \approx 0.001421$ . Особый интервал конечного управления в смысле функции  $g(\psi, x)$  равен  $[0.0698, 1.4609]$ .

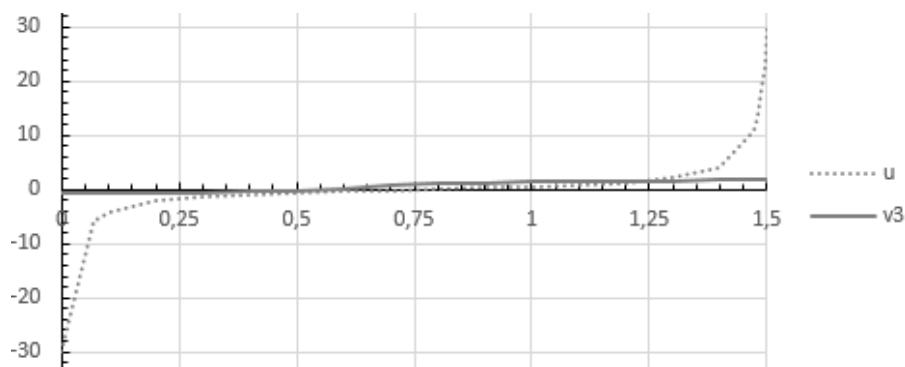


Рис. 6.  $u$  - стартовое управление,  $v_3$  – расчетное управление, полученное методом (2.3.1).

#### *Проекционный операторный метод (2.3.2).*

Для заданного  $\alpha > 0$  итерационный процесс (2.3.2) в поточечной форме при  $k \geq 0$  принимает вид:

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha g(\psi(t, v^k), x(t))), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной фазовой задачи Коши, получающейся при замене переменной управления на выражение  $P_U(v^k(t) + \alpha g(\psi(t, v^k), x(t)))$  в правой части фазовой системы.

На рисунке 7 представлено конечное расчетное управление  $v_4(t)$ ,  $t \in T$ , полученное методом (2.3.2) с указанного выше начального управления  $u(t)$  при  $\alpha = 10^{-2}$  с количеством итераций улучшения, равным 26, и значением функционала  $\Phi^* \approx 0.000704$ . Особый интервал конечного управления в смысле функции  $g_1(x)$  равен  $[0.0751, 1.4512]$ .

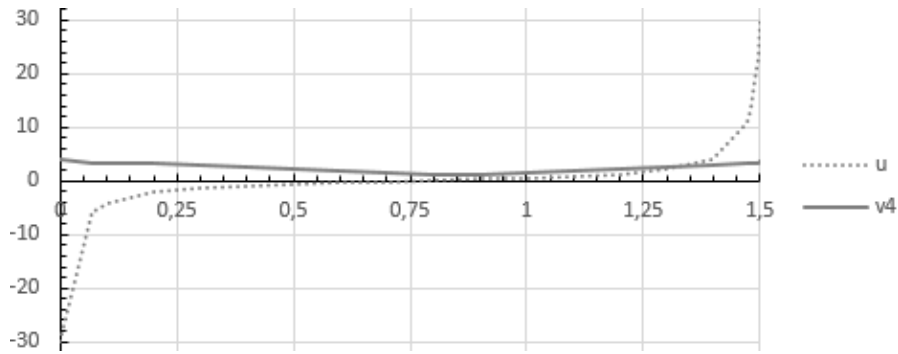


Рис. 7.  $u$  - стартовое управление,  $v_4$  – расчетное управление, полученное методом (2.3.2).

*Проекционный операторный метод (2.3.3).*

Для заданного  $\alpha > 0$  итерационный процесс (2.3.3) в поточечной форме при  $k \geq 0$  принимает вид:

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha g(\psi(t), x(t, v^k))), \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной сопряженной задачи Коши, получающейся при замене переменной управления на выражение  $P_U(v^k(t) + \alpha g(\psi(t), x(t, v^k)))$  в правой части сопряженной системы и переменной  $x(t_1)$  на выражение  $x(t_1, v^k)$  в правой части начального условия в момент времени  $t_1$ .

На рисунке 8 представлено конечное расчетное управление  $v_5(t)$ ,  $t \in T$ , полученное методом (2.3.3) с указанного выше начального управления  $u(t)$ , с  $\alpha = 10^{-2}$  и с количеством итераций улучшения, равным 17, и значением функционала  $\Phi^* \approx 0.000676$ . Особый интервал конечного управления в смысле функции переключения  $g_2(\psi) = g(\psi, x(t, u^k))$  равен  $[0.0799, 1.4485]$ .



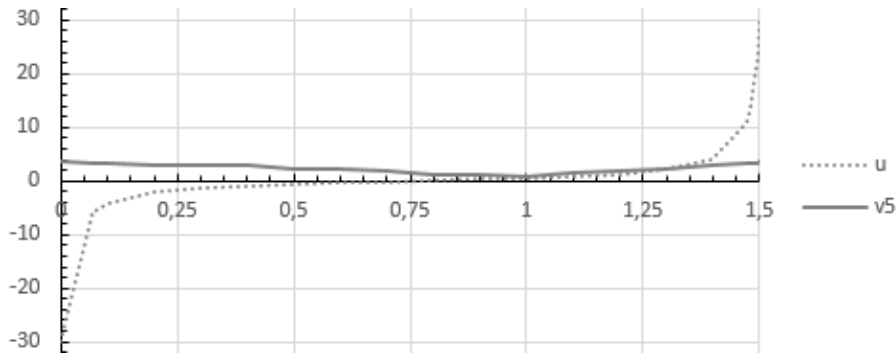


Рис. 8.  $u$  - стартовое управление,  $v5$  – расчетное управление, полученное методом (2.3.3).

*Комбинированный операторный метод.*

В отличие от оптимального управления расчетные приближения экстремального управления, полученные проекционными операторными методами, не принимают граничных значений управления вне интервалов особого управления. Поэтому указанные расчетные приближения в целях лучшего приближения к оптимальному управлению можно уточнять операторными методами на основе операции максимизации, позволяющими получать граничные значения управления вне особых интервалов.

На рисунке 9 представлено конечное расчетное управление  $v6(t)$ ,  $t \in T$ , полученное методом (2.2.2) с указанного выше расчетного управления  $v5(t)$ ,  $t \in T$ , полученного проекционным методом (2.3.3), при  $\alpha = 10^{-2}$  с количеством итераций улучшения, равным 3, и значением функционала  $\Phi^* \approx 0.000598$ . Особый интервал конечного управления равен  $[0.0799, 1.4485]$ .

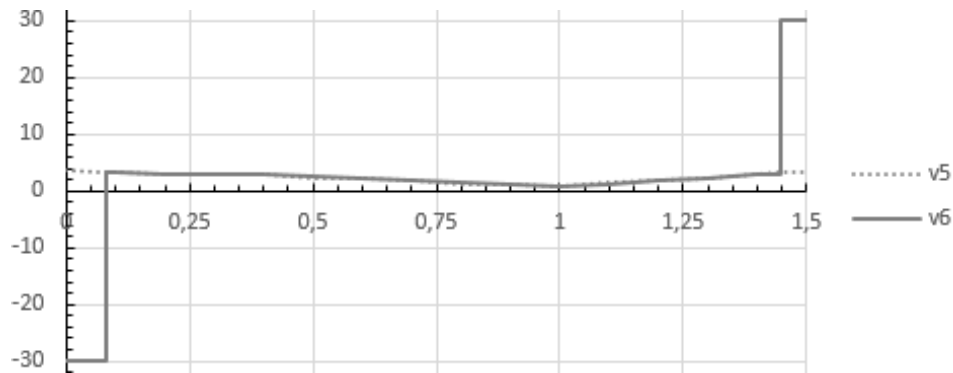


Рис. 9.  $v_5$  - стартовое управление,  $v_6$  – расчетное управление, полученное методом (2.2.2).

В результате получаем, что особые интервалы расчетных управлений  $v_5$  и  $v_6$  совпадают и на особом интервале уточненное расчетное управление  $v_6$  практически не отличается от расчетного приближения  $v_5$  экстремального управления, полученного проекционным методом.

Проведенные расчеты в рамках модельной задачи показывают высокую эффективность рассматриваемых операторных методов принципа максимума для поиска особых экстремальных управлений, позволяющих получать лучшие значения критерия оптимальности по сравнению с известным глобальным методом Кротова. При этом существенно более простой в вычислительной реализации проекционный операторный метод по сравнению с операторным методом на основе операции максимизации позволяет достаточно точно рассчитывать особые интервалы экстремальных управлений.

## Заключение

В заключении представлены **основные результаты работы:**

1. Получены новые формы принципа максимума в виде задач о неподвижной точке в классе задач оптимального управления, линейных по управлению и доказана их эквивалентность классическим условиям принципа максимума.
2. Определены новые понятия особых управлений на основе новых форм принципа максимума в виде задач о неподвижной точке и доказана их эквивалентность классическому определению особого управления в классе задач оптимального управления, линейных по управлению.
3. Разработаны новые итерационные алгоритмы и вычислительные технологии на основе задач о неподвижной точке для поиска экстремальных управлений, в том числе особых управлений, и доказаны теоремы сходимости итерационных алгоритмов.
4. Проведен сравнительный анализ предложенных методов неподвижных точек принципа максимума с известными методами на тестовых и модельных задачах оптимального управления, показывающий повышенную вычислительную эффективность предлагаемых методов.
5. Созданы автоматизированные комплексы алгоритмов и программ, реализующие методы неподвижных точек принципа максимума для поиска экстремальных управлений.

### Список публикаций по теме диссертации.

#### Публикации в рецензируемых журналах из списка рекомендованных ВАК:

1. Buldaev A.S., Kazmin I.D. On One Method of Optimization of Quantum Systems Based on the Search for Fixed Points. Communications in Computer and Information Science (CCIS). 2021. Vol. 1514: Advances in Optimization and Applications. P. 67-81. (Scopus (Q4))
2. Buldaev A., Kazmin I. Operator Methods of the Maximum Principle in Problems of Optimization of Quantum Systems. Mathematics. 2022. Vol. 10, Iss.3, 507. P. URL: <https://doi.org/10.3390/math10030507> (WoS, Scopus (Q1))
3. Buldaev A., Kazmin I. Extremal Controls Searching Methods Based on Fixed Point Problems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Springer, Cham, 2023. Vol 434:

Optimization, Simulation and Control. ICOSC 2022. P. 139-151. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-41229-5\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-031-41229-5_11) (Scopus (Q4))

4. Buldaev A., Kazmin I. Fixed Point Methods for Solving Boundary Value Problem of the Maximum Principle. J Math Sci. 2024. Vol. 279, No. 6. P. 763-775. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07058-4> (Scopus (Q3))

5. Булдаев А.С., Казьмин И.Д. Операторные методы поиска экстремальных управлений в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 224, С. 19–27. (MathSciNet, ZbMATH)

6. Булдаев А.С., Казьмин И.Д. Об одном подходе к вычислению особых экстремальных управлений на основе задач о неподвижной точке // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2024. Т. 234, С. 118–132. (MathSciNet, ZbMATH)

#### **Свидетельство о государственной регистрации программы:**

7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022614692 от 24.03.22 г. «Программа для численного решения билинейных управляемых систем проекционным методом неподвижных точек» / Казьмин И.Д.

#### **Публикации, входящие в РИНЦ:**

8. Казьмин И.Д. Сравнительный анализ эффективности нелокальных методов в задачах оптимизации билинейных систем. Материалы VII Международной конференции МПМО'2020. С. 107-109.

9. Казьмин И.Д. Модификации проекционных методов в билинейных задачах оптимального управления // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2021, №2. С. 44-60. (Перечень ВАК (К3))

10. Казьмин И.Д. Модификации нелокальных проекционных методов оптимизации билинейных управляемых систем. Материалы 3-й Международной конференции DYSC'2021. С. 96-98.

11. Казьмин И. Д., Гунов А. В. Об одном методе оптимизации вырожденных билинейных управляемых систем. Материалы научной конференции с международным участием, посвященной 90-летию БГПИ-БГУ ММО'22. С. 10-18.

12. Казьмин И.Д., Булдаев А.С. Операторные методы принципа максимума в задачах оптимизации квантовых систем. Материалы VIII Международной конференции ПМСМ'2022. С. 259-265.

13. Булдаев А. С., Казьмин И. Д. Операторные методы поиска вырожденных экстремальных управлений в линейных по управлению задачах оптимального управления // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022, №2. С. 23-41. (Перечень ВАК (КЗ))

14. Булдаев А. С., Казьмин И. Д. Операторные методы поиска вырожденных экстремальных управлений в линейно-квадратичных задачах оптимального управления. Материалы 4-й Международной конференции DYSC'2022. С. 73-

15. Казьмин И. Д. Методы поиска особых экстремальных управлений на основе задач о неподвижной точке. Материалы VIII Международной конференции МПМО'2023. С. 112-114.

16. Булдаев А. С., Казьмин И. Д. Об одном подходе к поиску особых экстремальных управлений на основе задач о неподвижной точке. Материалы 5-й Международной конференции DYSC'2023. С. 82-85.

**Список литературы**

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление М.: Наука, 1979. 432 с.
2. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров М.: Высш. шк., 1994. 544 с.
3. Аргучинцев А.В., Васильев О.В. Итерационные процессы принципа максимума и их модификации в системах с распределенными параметрами // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, №6. С. 797 - 803.
4. Аргучинцев А.В., Дыхта В.А., Срочко В.А. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // Изв. вузов. Математика. 2009. № 1. С. 3 – 43.
5. Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006. 144 с.
6. Арушанян О.Б., Залеткин С.В. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. 336 с.
7. Бартенев О.В. Современный Фортран. М.: Диалог-МИФИ, 2000. 448 с.
8. Бартенев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Ч. 2. М.: Диалог-МИФИ, 2001. 320 с.
9. Бартенев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Ч. 3. М.: Диалог-МИФИ, 2001. 368 с.
10. Батурин В.А., Урбанович Д.Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. Новосибирск: Наука, 1997. 172 с.
11. Батурина О.В., Моржин О.В. Оптимальное управление системой спинов на основе метода глобального улучшения // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 79 – 86.
12. Беллман Р. Динамическое программирование М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. 401 с.
13. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965.

14. Болдырев В.И. Метод кусочно-линейной аппроксимации для решения задач оптимального управления // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2004. №1. С. 28 - 123.
15. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными процессами. М.: Наука, 1973. 448 с.
16. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ: Изд-во Бурятского гос. ун-та, 2008. 260 с.
17. Булдаев А.С., Моржин О.В. Улучшение управлений в нелинейных системах на основе краевых задач // Изв. Иркутского гос. ун-та. Математика. 2009. Т. 2, № 1. С. 94 – 107.
18. Булдаев А.С. Новый подход к оптимизации управляемых систем на основе краевых задач // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 87 – 94.
19. Булдаев А.С. Задачи и методы неподвижных точек принципа максимума // Изв. Иркутского гос. ун-та. Математика. 2015. Т. 14. С. 31 – 41.
20. Булдаев А.С., Казьмин И.Д. Операторные методы поиска вырожденных экстремальных управлений в линейных по управлению задачах оптимального управления // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022, №2. С. 23 - 41.
21. Булдаев А.С., Казьмин И.Д. Операторные методы поиска вырожденных экстремальных управлений в линейно-квадратичных задачах оптимального управления. Материалы 4-й Международной конференции DYSC'2022. С. 73 - 76.
22. Булдаев А.С., Казьмин И.Д. Об одном подходе к поиску особых экстремальных управлений на основе задач о неподвижной точке. Материалы 5-й Международной конференции DYSC'2023. С. 82 - 85.
23. Булдаев А.С., Казьмин И.Д. Операторные методы поиска экстремальных управлений в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 224. С. 19 – 27.
24. Булдаев А.С., Казьмин И.Д. Об одном подходе к вычислению особых экстремальных управлений на основе задач о неподвижной точке // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2024. Т. 234. С. 118 – 132.

25. Васильев О.В., Тятюшкин А.И. Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1981. Т.21, №6. С. 1376 - 1384.
26. Васильев О.В., Тятюшкин А.И. Опыт решения задач оптимального управления на основе необходимых условий оптимальности типа принципа максимума // Вопросы устойчивости и оптимизации динамических систем: сб. науч. тр. Иркутск, 1983. С. 43 - 64.
27. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Ч.2. Оптимальное управление. Новосибирск: Наука, 1990. 151 с.
28. Васильев О.В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск: Изд-во ИГУ, 1994. 344 с.
29. Васильев С.Н. Интеллектуальное управление динамическими системами. М.: Физико-математическая литература, 2000. 352 с
30. Васильев С.Н. Теория и применение логико-управляемых систем // Труды 2-ой Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» (SICPRO'03), 2003. С. 23 – 52.
31. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач М.: Наука, 1980 - 418 с.
32. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 508 с.
33. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Методы функционального анализа. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1973. 248 с.
34. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Ч.4.1: Линейные задачи. Минск: Университетское, 1984. 214 с.
35. Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009. 278 с.
36. Грачев Н.И., Евтушенко Ю.Г. Библиотека программ для решения задач оптимального управления // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1979. № 2. С. 367 - 387.
37. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1977. 304 с.



38. Гурман В.И., Батулин В.А., Расина И.В. Приближенные методы оптимального управления. Иркутск: Изд-во Иркутского гос. ун-та, 1983. 180 с.
39. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985. 287 с.
40. Гурман В.И., Расина И.В., Блинов А.О. Эволюция и перспективы приближенных методов оптимального управления // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн. 2011. Т. 2, № 2. С. 11 – 29.
41. Гурман В.И., Расина И.В. Дискретно-непрерывные представления импульсных процессов в управляемых системах // Автоматика и телемеханика. 2012. № 8. С. 16 – 29.
42. Гурман В.И., Фесько О.В., Гусева И.С., Насатуева С.Н. Итерационные процедуры на основе метода глобального улучшения управления // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн. 2014. Т. 5, № 2. С. 47 – 61.
43. Дикусар В.В., Милютин А.А. Качественные и численные методы в принципе максимума. М.: Наука, 1989. 144 с.
44. Дыхта В.А. Вариационный принцип максимума и квадратичные условия оптимальности импульсных процессов. Иркутск: Изд-во ИГЭА, 1995. 186 с.
45. Дыхта В.А., Самсонок О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 255 с.
46. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
47. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004. 504 с.
48. Емельянов С.В. Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970. 592 с.
49. Казьмин И.Д. Сравнительный анализ эффективности нелокальных методов в задачах оптимизации билинейных систем. Материалы VII Международной конференции МПМО'2020. С. 107 - 109.
50. Казьмин И.Д. Модификации проекционных методов в билинейных задачах оптимального управления // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2021, №2. С. 44 - 60.

51. Казьмин И.Д. Модификации нелокальных проекционных методов оптимизации билинейных управляемых систем. Материалы 3-й Международной конференции DYSC'2021. С. 96 - 98.
52. Казьмин И.Д., Гунов А.В. Об одном методе оптимизации вырожденных билинейных управляемых систем. Материалы научной конференции с международным участием, посвященной 90-летию БГПИ-БГУ ММО'22. С. 10 - 18.
53. Казьмин И.Д., Булдаев А.С. Операторные методы принципа максимума в задачах оптимизации квантовых систем. Материалы VIII Международной конференции ПМСМ'2022. С. 259 - 265.
54. Казьмин И.Д. Методы поиска особых экстремальных управлений на основе задач о неподвижной точке. Материалы VIII Международной конференции МПМО'2023. С. 112 - 114.
55. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
56. Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1979. 125 с.
57. Киселев Ю.Н. Линейно-квадратичная задача оптимального управления: анализ с помощью принципа максимума // Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005. Вып. 1. С. 166 – 182.
58. Котина Е.Д., Овсянников Д.А. Математическая модель совместной оптимизации программного и возмущенных движений в дискретных системах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17, Вып. 2. С. 213 - 224.
59. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М: Наука, 1969. 456 с.
60. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
61. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 448 с.
62. Кротов В.Ф., Фельдман И.Н. Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. №2. С. 160 - 168.
63. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Журн. вычислит. математики и матем. физики. 1962. Т. 2, №6. С. 1132 - 1138.

64. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. Алгоритмы метода последовательных приближений для задач оптимального управления // Журн. вычислит. математики и матем. физики 1972. Т.12, №1. С.14 - 34.
65. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. М.: Высшая школа, 1980. 300 с.
66. Лутошкин И.В., Рыбина М.С. Моделирование управления экономикой региона в условиях массовых заболеваний // Экономика региона. 2023. Т. 19, № 2. С. 299 - 313.
67. Любушин А.А., Черноусько Ф.Л. Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика 1983. №2. С. 147 - 159.
68. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005. 429 с.
69. Милютин А.А., Илютович А.Е., Осмоловский Н.П., Чуканов С.В. Оптимальное управление в линейных системах. М.: Наука, 1993. 268 с.
70. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
71. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 488 с.
72. Полак Э. Численные методы оптимизации. М.: Мир, 1974. 376 с.
73. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
74. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. Изд. 2-е, стереотипное. М.: Едиториал УРСС, 2004. 64 с.
75. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 255 с.
76. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
77. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022614692 от 24.03.22 г. «Программа для численного решения билинейных управляемых систем проекционным методом неподвижных точек» / Казьмин И.Д.
78. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск: Изд-во ИГУ, 1989. 160 с.

79. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. 160 с.
80. Срочко В.А., Антоник В.Г., Мамонова Н.В. Вычислительное сравнение методов градиентного типа в задачах оптимального управления // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2007. Т. 1, № 1. С. 247 – 262.
81. Срочко В.А., Аксенюшкина Е.В. Задачи оптимального управления для билинейной системы специальной структуры // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2016. Т. 15. С. 78-91.
82. Срочко В.А. Конечномерная аппроксимация управлений в задачах оптимизации линейных систем // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2020. №3. С. 19 - 31.
83. Стрекаловский А.С. О поиске глобального максимума выпуклого функционала на допустимом множестве // Журн. вычислит. математики и матем. физики. 1993. Т. 33, №3. С. 9 - 13.
84. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 356 с.
85. Стрекаловский А.С. Задачи оптимального управления с терминальными функционалами, представимыми в виде разности двух выпуклых функций // Журн. вычислит. математики. и матем. физики 2007. Т. 47, №11. С. 1865 - 1879.
86. Трушкова Е.А. Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 151 – 159.
87. Тятюшкин А.И. О численном решении задач оптимального управления // Дифференциальные уравнения и численные методы. Новосибирск: Наука, 1986. С. 208 - 217.
88. Тятюшкин А.И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука, 1992. 192 с.
89. Тятюшкин А.И. Многометодная технология для расчета оптимального управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. №3. С.59-67.
90. Федоренко Р.П. Метод проекции градиента в задачах оптимального управления. Препринт Ин-та прикл.математики АН СССР № 45. М., 1975. 70 с.
91. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 486 с.

92. Хайлов Е.Н. Об экстремальных управлениях однородной билинейной системы, управляемой в положительном ортанте // Тр. МИАН. 1998. Т. 220. С. 217 – 235.
93. Хлебников М.В., Щербаков П.С., Честнов В.Н. Задача линейно-квадратичного управления: I. Новое решение // Автоматика и телемеханика. 2015. № 12. С. 65 – 79.
94. Alvarez L.A. Glass of Solvable Impulse Control Problems // Applied mathematics and optimization. 2004. Vol. 49, No. 3. P. 265 - 295.
95. Andreeva E.A., Semykina N.A. Optimal control of the spread of an infectious disease with allowance for an incubation period // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2005. Vol. 45, Iss. 7. P. 1133 – 1139.
96. Banach S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals // Fundamenta Mathematicae. 1922. Vol. 3, No. 1. P. 133-181.
97. Buldaev A. Operator forms of the maximum principle and iterative algorithms in optimal control problems. In OPTIMA 2020: Advances in Optimization and Applications; CCIS; Olenev, N., Evtushenko, Y., Khachay, M., Malkova, V., Eds.; Springer: Cham, Switzerland. Vol. 1340. P. 101 – 112.
98. Buldaev A.S., Kazmin I.D. On One Method of Optimization of Quantum Systems Based on the Search for Fixed Points. Communications in Computer and Information Science (CCIS). 2021. Vol. 1514: Advances in Optimization and Applications. P. 67-81.
99. Buldaev A., Kazmin I. Operator Methods of the Maximum Principle in Problems of Optimization of Quantum Systems. Mathematics. 2022. Vol. 10, Iss.3, 507. P. URL: <https://doi.org/10.3390/math10030507>
100. Buldaev A., Kazmin I. Extremal Controls Searching Methods Based on Fixed Point Problems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Springer, Cham, 2023. Vol 434: Optimization, Simulation and Control. ICOSC 2022. P. 139-151. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-41229-5\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-031-41229-5_11)
101. Buldaev A., Kazmin I. Fixed Point Methods for Solving Boundary Value Problem of the Maximum Principle. J Math Sci. 2024. Vol. 279, No. 6. P. 763 - 775. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07058-4>
102. Diveev A., Sofronova E. Synthesized Control for Optimal Control Problem of Motion Along the Program Trajectory. 8th International Conference on Control, Decision and

Information Technologies (CoDIT) (Istanbul, Turkey, 17–20 May 2022): Proceedings. Istanbul, 2022. P. 475 – 480.

103. Diveev A., Sofronova E., Konyrbaev N., Bexeitova A. Stabilization of Movement Along an Optimal Trajectory and Its Solution. Eng. Proc. 2023.

104. Diveev A.I., Sofronova E.A. Universal Stabilisation System for Control Object Motion along the Optimal Trajectory // Mathematics. 2023. Vol. 11. P. 3556.

105. Macalisang J., Caay M., Arcede J., Caga-Anan R. Optimal control for a COVID-19 model accounting for symptomatic and asymptomatic // Computational and Mathematical Biophysics. 2020. Vol. 8. P. 168 – 179.

106. Ovsyannikova N.I. Problem of optimal control of epidemic in view of latent period // Civil Aviation High Technologies. 2017. Vol. 20, Iss. 2. P. 144 – 152.

107. Poswiata A. Optimal discrete processes, nonlinear in time intervals: theory and selected applications // Cybernetics and Physics. 2012. Vol. 1, No. 2. P. 120 - 127.

108. Sari T. Zerizer T. Perturbations for linear difference equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2005. No. 1. P. 43 - 52.

109. Schauder J. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen // Studia Math. 1930. Vol. 2. P. 171 – 180.

110. Strekalovsky A.S. On global maximum of a convex terminal functional in optimal control problems // J. Global Optimizati. 1995. No. 7. P. 75 - 91.

111. Strekalovsky A.S., Vasiliev I.L. On global search for non-convex optimal control problems // Developments Global Optimization Nonconvex Optimizat. and Its Applic. Dordrecht:Kluwer Acad. Publ., 1997. P. 121133.

112. Strekalovsky A.S., Tsevendorj I. Testing the R-strategy for a reverse convex problem // J. Global Optimizat. 1998. Vol. 13, No 1. P. 61 - 74.

113. Zamir M., Abdeljawad T., Nadeem F., Khan A., Yousef A. An optimal control analysis of a COVID-19 model // Alexandria Engineering Journal. 2021. Vol. 60, Iss. 2. P. 2875 – 2884.