

На правах рукописи



Казьмин Иван Дмитриевич

**МЕТОДЫ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ПРИНЦИПА
МАКСИМУМА В СИСТЕМАХ, ЛИНЕЙНЫХ ПО
УПРАВЛЕНИЮ**

1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Улан-Удэ – 2024

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова» (ФГБОУ ВО «БГУ»)

Научный
руководитель:

Булдаев Александр Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Бурятский государственный
университет имени Доржи Банзарова», Научно-
образовательный и инновационный центр
системных исследований и автоматизации, директор

Официальные
оппоненты:

Расина Ирина Викторовна, доктор физико-
математических наук, доцент, ФГБУН Институт
программных систем имени А.К. Айламазяна РАН,
Исследовательский центр системного анализа,
главный научный сотрудник;

Соловарова Любовь Степановна, кандидат
физико-математических наук, ФГБУН Институт
динамики систем и теории управления имени В.М.
Матросова СО РАН, лаборатория 1.1
дифференциальных уравнений и управляемых
систем, старший научный сотрудник.

Ведущая
организация:

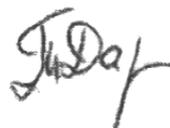
**ФГБОУ ВО «Иркутский государственный
университет»**

Защита состоится «24» декабря 2024 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.279.01 при ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова» по адресу: 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, д. 24а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова», расположенной по адресу: г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 4а, а также на сайте: <https://www.bsu.ru/dissers/?did=973>

Автореферат разослан «__» _____ 2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доц.



Т. Г. Дармаев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Многие математические модели динамических процессов в области биологии, экономики, медицины, энергетики описываются системами, линейными по управлению. Для решения линейных по управлению задач оптимального управления могут применяться разные подходы. Распространенные методы оптимального управления основываются на условиях оптимальности и улучшения управления. Необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума были получены в 1960-х годах Л.С. Понтрягиным и его учениками. Данная теория получила развитие в работах Р. Габасова, Ф.М. Кирилловой, А.А. Милютина, Ф.Л. Черноусько, О.В. Васильева, В.А. Срочко и других ученых. Достаточные условия оптимальности управляемых процессов, позволяющие находить глобальное решение в задачах оптимального управления, были разработаны В.Ф. Кротовым и развиты в работах В.И. Гурмана и их последователями.

Известный подход основывается на применении методов математического программирования к задачам, получающимся после сведения исходной задачи с помощью различных способов дискретизации как по состоянию, так и по управлению. Также следует выделить градиентные методы, такие как метод условного градиента и метод проекции градиента. Еще одним подходом к решению линейных по управлению задач является метод динамического программирования.

Ряд исследований посвящен отдельным аспектам изучения линейно-квадратичных задач оптимального управления. В частности, в работах В.А. Срочко на основе построения нестандартных формул приращения целевого функционала, не содержащих остаточных членов разложений, разработаны эффективные методы нелокального улучшения управления в линейно-квадратичных задачах. Улучшение управления достигается решением двух задач Коши для фазовых и сопряженных систем в пространстве состояний.

Для рассматриваемого класса линейных по управлению задач оптимального управления поиск экстремальных решений существенно усложняется в особых задачах оптимального управления, в которых необходимые условия оптимальности в форме классического принципа максимума не позволяют определять экстремальные значения управления. В частности, метод краевой задачи принципа максимума и стандартные градиентные методы становятся не эффективными в особых задачах.

В настоящей работе в классе линейных по управлению задач оптимального управления разрабатываются новые методы оптимизации на основе представления условий принципа максимума в форме задач о неподвижной точке.

Целью диссертационной работы является разработка условий принципа максимума в форме операторных и поточечных задач о неподвижной точке и методов поиска экстремальных управлений, в том числе особых

экстремальных управлений, в классе задач оптимального управления, линейных по управлению.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Конструирование операторных и поточечных задач о неподвижной точке принципа максимума.
2. Определение и анализ понятий особых управлений на основе новых форм принципа максимума в виде задач о неподвижной точке
3. Разработка и обоснование итерационных методов оптимизации на основе задач о неподвижной точке.
4. Сравнительный анализ эффективности предлагаемых методов оптимизации на тестовых и модельных задачах оптимального управления.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Условия принципа максимума в форме операторных и поточечных задач о неподвижной точке в классе задач оптимального управления, линейных по управлению.
2. Понятия особого управления на основе разработанных условий принципа максимума в виде задач о неподвижной точке.
3. Итерационные методы оптимизации линейных по управлению систем на основе задач о неподвижной точке.
4. Автоматизированные комплексы алгоритмов и программ, реализующие разработанные методы неподвижных точек принципа максимума для поиска экстремальных управлений.

Работа соответствует пунктам 1, 2, 3 паспорта научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

П.1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (физико-математические науки).

П.2. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

П.3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы использовался математический аппарат теории и методов оптимального управления, функционального и численного анализа. Программная реализация итерационных методов осуществлялась на языке программирования Fortran версии PowerStation 4.0.

Научная новизна результатов, выносимых на защиту:

1. Получены новые формы принципа максимума в виде задач о неподвижной точке в классе задач оптимального управления, линейных по управлению, и доказана их эквивалентность классическим условиям принципа максимума.
2. Определены новые понятия особых управлений на основе новых форм принципа максимума в виде задач о неподвижной точке и доказана их

эквивалентность классическому определению особого управления в классе задач оптимального управления, линейных по управлению.

3. Разработаны новые итерационные алгоритмы и вычислительные технологии на основе задач о неподвижной точке для поиска экстремальных управлений, в том числе особых управлений, и доказаны теоремы сходимости итерационных алгоритмов.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Полученные в работе результаты вносят определенный вклад в теорию и методы оптимизации в линейных по управлению задачах оптимального управления. Разработанное алгоритмическое и программное обеспечение может использоваться в экспертных автоматизированных системах принятия решений на основе математических моделей оптимального управления.

Полученные научные результаты опубликованы в рецензируемых зарубежных и российских журналах, материалах международных и российских конференций и могут быть использованы в учебных курсах при подготовке и повышении квалификации профильных специалистов.

Достоверность полученных результатов подтверждается строгим обоснованием теоретических понятий и утверждений, проведенными численными экспериментами в рамках тестовых и модельных задач.

Апробация результатов. Результаты работы были представлены в докладах и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

- VII Международная конференция «Математика, ее приложения и математическое образование» (г. Улан-Удэ – оз. Байкал, 29 июня – 4 июля 2020 г.);

- 3-я, 4-я, 5-я, 6-я Международные конференции «Динамические системы и компьютерные науки: Теория и Приложения» (DYSC 2021, г. Иркутск, 13-17 сентября 2021 г.; DYSC 2022, г. Иркутск, 19-23 сентября 2022 г.; DYSC 2023, г. Иркутск, 18-23 сентября 2023 г.; DYSC 2024, г. Иркутск, 16-20 сентября 2024 г.);

- The XII International Conference Optimization and Applications (OPTIMA-2021, Petrovac, Montenegro, September 27 – October 1, 2021);

- The 7th International Conference on Optimization, Simulation and Control ICOSC-2022 (Ulaanbaatar, Mongolia, June 20-22, 2022);

- Научная конференция с международным участием «Математическое образование в условиях цифровизации» (г. Улан-Удэ, оз. Байкал, 1-3 июля 2022 г.);

- VIII Международная конференция «Проблемы механики современных машин» (г. Улан-Удэ, оз. Байкал, 4-9 июля 2022 г.);

- The 3th International Conference on Applied Sciences and Engineering ICASE-2023 (Ulaanbaatar, Mongolia, June 16-17, 2023);

- VIII Международная конференция «Математика, ее приложения и математическое образование» (г. Улан-Удэ – оз. Байкал, 26 июня – 1 июля 2023 г.);

- The International Conference on Computational and Applied Mathematics ICCAM-2023 (Ulaanbaatar, Mongolia, September 22-24, 2023).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 работах, включая свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. В том числе 6 статей в рецензируемых журналах из списка рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, в которых должны быть опубликованы научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Страниц – 94, рисунков – 9, таблиц – 4, в списке литературы 113 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, научная новизна полученных результатов и их практическая и теоретическая значимость, приведено краткое содержание диссертационной работы.

В **главе 1** рассматривается класс линейных по управлению задач оптимального управления:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T (\langle a(x(t), t), u \rangle + d(x(t), t)) dt \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset R^m, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

в котором функция $\varphi(x)$ дифференцируема на R^n , функции $a(x, t)$, $d(x, t)$, $A(x, t)$, $b(x, t)$ дифференцируемы по переменной x и непрерывны по переменной t на множестве $R^n \times T$. Вектор $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ является вектором состояния системы, в качестве допустимых управлений $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ рассматривается множество V кусочно - непрерывных функций на интервале T со значениями в компактном и выпуклом множестве $U \subset R^m$. Начальное состояние x^0 и интервал T заданы.

Функцию Понтрягина с сопряженной переменной ψ в задаче (1), (2) можно представить в следующем виде:

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + \langle H_1(\psi, x, t), u \rangle,$$

$$H_0(\psi, x, t) = \langle \psi, b(x, t) \rangle - d(x, t), \quad H_1(\psi, x, t) = A^T(x, t)\psi - a(x, t).$$

Стандартная сопряженная система рассматривается в следующей форме:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \quad (3)$$

Пусть $v \in V$. Введем следующие обозначения:

- $x(t, v)$, $t \in T$ - решение системы (2) при $u(t) = v(t)$;
- $\psi(t, v)$, $t \in T$ - решение стандартной сопряженной системы (3) при $x(t) = x(t, v)$, $u(t) = v(t)$.

Будем использовать следующее обозначение частного приращения произвольной вектор-функции $g(y_1, \dots, y_l)$ по переменным y_{s_1}, y_{s_2} :

$$\Delta_{z_{s_1}, z_{s_2}} g(y_1, \dots, y_l) = g(y_1, \dots, z_{s_1}, \dots, z_{s_2}, \dots, y_l) - g(y_1, \dots, y_{s_1}, \dots, y_{s_2}, \dots, y_l).$$

Обозначим P_Y - оператор проектирования на множество $Y \subset R^k$ в евклидовой норме:

$$P_Y(z) = \arg \min_{y \in Y} (\|y - z\|), \quad z \in R^k.$$

Важным свойством оператора проектирования является выполнение неравенства:

$$\langle y - P_Y(z), z - P_Y(z) \rangle \leq 0, \quad y \in Y.$$

Рассмотрим отображение на основе операции максимизации функции Понтрягина:

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} \langle H_1(\psi, x, t), w \rangle, \quad x \in R^n, \psi \in R^n, t \in T.$$

С помощью отображения u^* условие известного принципа максимума для управления $u \in V$ в задаче (1), (2) можно записать в виде:

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T. \quad (4)$$

Определим отображение u^α с параметром $\alpha > 0$ на основе операции проектирования:

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(w + \alpha H_1(\psi, x, t)), \quad x \in R^n, \psi \in R^n, w \in U, t \in T.$$

С помощью отображения u^α условие принципа максимума (4) в задаче (1), (2) можно записать в эквивалентном виде:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T. \quad (5)$$

Управление $u \in V$, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности, называется экстремальным.

В главе рассматриваются и обосновываются новые формы условий принципа максимума на основе задач о неподвижной точке в пространстве управлений.

Определим отображения X, Ψ, V^* следующими соотношениями:

$$X(u) = x, \quad u \in V, \quad x(t) = x(t, u), \quad t \in T,$$

$$\Psi(u) = \psi, \quad u \in V, \quad \psi(t) = \psi(t, u), \quad t \in T,$$

$$V^*(\psi, x) = v^*, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad v^*(t) = u^*(\psi(t), x(t), t), \quad t \in T,$$

где $C(T)$ — пространство непрерывных на T функций.

С помощью введенных отображений условие принципа максимума (4) можно представить как задачу о неподвижной точке с оператором управления G_1^* :

$$u = V^*(\Psi(u), X(u)) = G_1^*(u), \quad u \in V. \quad (6)$$

Введем оператор X^* :

$$X^*(\psi) = x, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T),$$

где $x(t), t \in T$ — решение специальной фазовой задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^*(\psi(t), x(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления G_2^* :

$$u = V^*(\Psi(u), X^*(\Psi(u))) = G_2^*(u), \quad u \in V. \quad (7)$$

Далее введем оператор Ψ^* :

$$\Psi^*(x) = \psi, \quad x \in C(T), \quad \psi \in C(T),$$

где $\psi(t)$, $t \in T$ — решение специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления G_3^* :

$$u = V^*(\Psi^*(X(u)), X(u)) = G_3^*(u), \quad u \in V. \quad (8)$$

Теорема 1.1. Задачи о неподвижной точке (7) и (8) являются эквивалентными условию принципа максимума (4).

Введем вспомогательный оператор V^α , $\alpha > 0$ соотношением:

$$V^\alpha(\psi, x, u) = v^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad u \in V, \quad v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $C(T)$ — пространство непрерывных на T функций.

С помощью введенных отображений условие принципа максимума (5) можно представить как задачу о неподвижной точке с оператором управления G_1^α :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = G_1^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (9)$$

Введем отображение X^α следующим образом:

$$X^\alpha(\psi, u) = x, \quad \psi \in C(T), \quad u \in V,$$

где $x(t)$, $t \in T$ является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления G_2^α :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u) = G_2^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (10)$$

Построим оператор Ψ^α по правилу:

$$\Psi^\alpha(x, u) = \psi, \quad x \in C(T), \quad u \in V,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$ — решение сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления G_3^α :

$$u = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u) = G_3^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (11)$$

Теорема 1.2. Задачи о неподвижной точке (10) и (11) являются эквивалентными условию принципа максимума (5).

Введем функцию переключения:

$$g(\psi, x, t) = H_1(\psi, x, t).$$

В соответствии с известным определением особого управления, управление $u \in V$ в задаче (1), (2) называется особым, если для этого управления существует интервал времени $[\theta_1, \theta_2] \subset T$ ненулевой меры, на котором выполняется условие:

$$g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$$

Для особого экстремального управления условия (4) и (5) на особом интервале выполняются тривиально и не могут служить для определения значений экстремального управления на особом интервале. Задача (1), (2) называется особой, если существует хотя бы одно особое экстремальное управление.

Особые экстремальные управления на основе новых операторных форм принципа максимума (6) - (11) определяются на основе эквивалентных поточечных форм этих условий.

Операторная задача о неподвижной точке (7) может быть представлена в следующей поточечной форме:

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$ является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^*(\psi(t, u), x(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (12)$$

Для управления $u \in V$ введем функцию переключения:

$$g_1(x, t) = g(\psi(t, u), x, t).$$

Решение $x(t)$, $t \in T$ задачи Коши (12) назовем особым, если существует интервал времени $[\theta_1, \theta_2] \subset T$ ненулевой меры, на котором выполняется условие:

$$g_1(x(t), t) = 0.$$

Управление $u \in V$ назовем особым для задачи Коши (12), если существует особое решение $x(t)$, $t \in T$ этой задачи Коши.

Экстремальное управление $u \in V$, удовлетворяющее условию (7), называется особым, если управление $u \in V$ является особым для соответствующей задачи Коши (12).

Доказывается, что понятие особого экстремального управления, удовлетворяющего условию (4), и понятие особого экстремального управления, удовлетворяющего условию (7) с соответствующей задачей Коши (12), являются эквивалентными. При этом соответствующие особые интервалы совпадают.

Задача о неподвижной точке (8) в поточечной форме имеет следующий вид:

$$u(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$ является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^*(\psi(t), x(t, u), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)).$$

Задача о неподвижной точке (10) в поточечной форме принимает вид:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$ является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Задача о неподвижной точке (11) в поточечной форме принимает вид:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$ является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)).$$

Новые понятия особого экстремального управления на основе указанных поточечных форм принципа максимума вводятся аналогично указанным выше определениям особого решения и особого управления специальной задачи Коши, и доказывается их эквивалентность классическому понятию.

Полученные новые формы принципа максимума в виде задач о неподвижной точке и введенные новые понятия особых экстремальных управлений на основе указанных задач о неподвижной точке дают возможность конструировать новые подходы к поиску экстремальных управлений, в том числе особых экстремальных управлений, в рассматриваемом классе линейных по управлению задач оптимального управления.

В главе 2 рассматриваются итерационные методы решения задач о неподвижной точке принципа максимума и анализируется сходимость соответствующих итерационных процессов.

Для решения задач о неподвижной точке принципа максимума (6) – (11) предлагаются соответствующие итерационные процессы метода простой итерации при $k \geq 0$:

$$v^{k+1} = V^*(\Psi(v^k), X(v^k)), v^0 \in V; \quad (13)$$

$$v^{k+1} = V^*(\Psi(v^k), X^*(\Psi(v^k))), v^0 \in V; \quad (14)$$

$$v^{k+1} = V^*(\Psi^*(X(v^k)), X(v^k)), v^0 \in V; \quad (15)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X(v^k), v^k), v^0 \in V; \quad (16)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X^\alpha(\Psi(v^k), v^k), v^k); \quad (17)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(v^k), v^k), X(v^k), v^k). \quad (18)$$

Процесс (13) в поточечной форме имеет вид:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t, v^k), t), t \in T.$$

Этот процесс в пространстве управлений является эквивалентным известному методу последовательных приближений Крылова-Черноузько в пространстве фазовых и сопряженных состояний для решения краевой задачи принципа максимума. Отметим, что указанная эквивалентность позволяет исследовать сходимость метода Крылова-Черноузько с помощью анализа сходимости итерационного процесса (13).

Процесс (14) в поточечной форме принимает вид:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t), t), t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$ является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^*(\psi(t, v^k), x(t), t) + b(x(t), t), x(t_0) = x^0.$$

Данный итерационный процесс может быть также записан в следующей неявной форме:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), t), v^0 \in V, t \in T.$$

Процесс (15) в поточечной форме имеет вид:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t), x(t, v^k), t), t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$ является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, v^k), u^*(\psi(t), x(t, v^k), t), t), \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, v^k)).$$

В классе билинейных задач оптимального управления указанный итерационный процесс может быть записан в следующей неявной поточечной форме:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), t), v^0 \in V, t \in T.$$

Процесс (16) в поточечной форме имеет вид:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T.$$

В отличие от известного метода проекции градиента на каждой итерации этого процесса не производится варьирование полученного приближения управления $v^{k+1}(t)$ с целью улучшения значения функционала $\Phi(v^k)$. Это является существенным фактором повышения вычислительной эффективности итерационного процесса (16), оцениваемой суммарным количеством расчетных фазовых и сопряженных задач Коши, по сравнению с методом проекции градиента.

Процесс (17) в поточечной форме имеет вид:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$ является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Итерационный процесс может быть также записан в следующем неявном виде:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), v^k(t), t), \quad v^0 \in V, \quad t \in T.$$

Процесс (18) в поточечной форме принимает вид:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$ является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, v^k), u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, v^k)).$$

В классе билинейных задач оптимального управления итерационный процесс может быть записан в следующей неявной поточечной форме:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad v^0 \in V, \quad t \in T.$$

В диссертационной работе доказываются теоремы о сходимости построенных итерационных процессов (16) – (18) при достаточно малых параметрах проектирования $\alpha > 0$ на основе известного принципа сжимающих отображений.

На каждой итерации предлагаемых методов (13) – (18) релаксация по целевому функционалу не гарантируется, но это свойство компенсируется нелокальностью последовательных приближений управления, отсутствием операции варьирования управления в окрестности текущего приближения для обеспечения улучшения по целевому функционалу задачи, возможностью получения экстремальных управлений при достаточно малых параметрах проектирования, обеспечивающих принципиальную сходимость итерационных процессов. Трудоемкость реализации одной итерации методов (13) – (18) составляет две задачи Коши для фазовых и сопряженных переменных.

В построенных проекционных методах неподвижных точек (16) – (18), в отличие от стандартного метода проекции градиента, параметр проектирования $\alpha > 0$ фиксируется в итерационном процессе последовательных приближений управления.

В классе билинейных задач оптимального управления показывается, что процессы (14), (15) и (17), (18) на каждой итерации приобретают свойство нелокального улучшения управления v^k .

Используя указанное свойство релаксации по целевому функционалу, в классе билинейных задач доказывается сходимость итерационных процессов (17) и (18) при всех $\alpha > 0$ по специальной величине невязки принципа максимума на итерационных приближениях управления:

$$\delta(v^k) = \Phi(v^k) - \Phi(v^{k+1}) \geq 0.$$

Неявная форма итерационных процессов позволяет рассматривать эти процессы на каждой итерации как задачи о неподвижной точке относительно приближения управления v^{k+1} и конструировать для вычисления этого приближения соответствующие итерационные методы неподвижных точек. Такой подход к реализации итерации, в отличие от решения двух задач Коши, дает возможность строго улучшать экстремальное управление v^k за счет выбора начального приближения соответствующих конструируемых итерационных методов неподвижных точек.

В главе 3 приводятся результаты сравнительного анализа эффективности предлагаемых методов неподвижных точек на тестовых и модельных задачах оптимального управления.

Для численного решения фазовых и сопряженных задач Коши применяется метод Рунге-Кутты-Вернера переменного (5-6) порядка точности, который реализовывается с помощью программы DIVPRK библиотеки IMSL Fortran PowerStation 4.0. Значения вычисленных управляемых, фазовых и сопряженных переменных запоминаются в узлах заданной на интервале T равномерной сетки T_h с шагом дискретизации $h > 0$. При численном решении задач Коши значения управления в промежутках между соседними узлами сетки T_h принимаются равными значению в левом узле.

1. Билинейная задача с особыми экстремальными управлениями.

Рассматривается следующая задача:

$$\Phi(u) = \int_0^2 u(t)x(t)dt \rightarrow \inf_{u \in V},$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 2].$$

Функция Понтрягина и сопряженная система соответственно имеют вид:

$$H(\psi, x, u, t) = (\psi - x)u; \quad g(\psi, x, t) = \psi - x;$$

$$\dot{\psi}(t) = u(t), \quad \psi(2) = 0.$$

Отображение u^* представляется в форме

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in [-1, 1]} \langle \psi - x, w \rangle = \text{sign}(\psi - x).$$

Условие принципа максимума имеет вид:

$$u(t) = \text{sign}(\psi(t, u) - x(t, u)), \quad t \in T.$$

Анализ краевой задачи принципа максимума показывает, что экстремальными управлениями являются допустимые управления $u \in V$, удовлетворяющие условию:

$$g(\psi(t, u), x(t, u), t) = \psi(t, u) - x(t, u) = 0, \quad t \in T.$$

Таким образом, все экстремальные управления являются особыми с особыми интервалами, равными интервалу T .

Для численного расчета особых экстремальных управлений рассматриваются условия принципа максимума в форме проекционных задач о неподвижной точке.

Задача о неподвижной точке (9) с параметром $\alpha > 0$ в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t, u))), \quad t \in T.$$

Задача о неподвижной точке (10) в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t))), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$ является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t))), \quad x(0) = 1.$$

Задача о неподвижной точке (11) в поточечной форме имеет следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u))), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$ является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u))), \quad \psi(2) = 0.$$

Соответствующие итерационные методы поиска особых экстремальных управлений при $k \geq 0$ в поточечной форме имеют вид:

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha(\psi(t, v^k) - x(t, v^k))), \quad t \in T; \quad (19)$$

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha(\psi(t, v^k) - x(t))), \quad t \in T, \quad (20)$$

$$\dot{x}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha(\psi(t, v^k) - x(t))), \quad x(0) = 1; \quad (21)$$

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, v^k))), \quad t \in T, \quad (22)$$

$$\dot{\psi}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, v^k))), \quad \psi(2) = 0. \quad (23)$$

Расчеты проводились при $\alpha = 0.8$, $h = 10^{-3}$ с различными начальными приближениями управления. Критерием остановки расчета являлось достижение достаточно малого значения невязки принципа максимума для управления v^k в следующей форме:

$$\max \left\{ \left\langle H_1(\psi(t, v^k), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \right\rangle, t \in T_h \right\} \leq 10^{-13}.$$

Численные расчеты показали, что итерационные методы неподвижных точек (20), (21) и (22), (23) имеют существенно лучшую вычислительную эффективность по суммарному количеству расчетных задач Коши в сравнении со стандартным методом проекции градиента и методом (19).

2. Задача оптимизации квантовой системы.

Рассматривается известная особая задача управления системой спинов квантовых частиц, которая представляется в следующем виде:

$$\Phi(u) = 1 - \langle x(t_1), Lx(t_1) \rangle \rightarrow \min ,$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u(t)x_3(t) + x_4(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) - u(t)x_4(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -u(t)x_1(t) - x_2(t), \\ \dot{x}_4(t) &= -x_1(t) + u(t)x_2(t), \end{aligned} \quad L = \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 & 0 & a_1b_2 - b_1a_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 & a_2^2 + b_2^2 & a_2b_1 - b_2a_1 & 0 \\ 0 & a_2b_1 - b_2a_1 & b_1^2 + a_1^2 & b_1b_2 + a_1a_2 \\ a_1b_2 - b_1a_2 & 0 & b_1b_2 + a_1a_2 & b_2^2 + a_2^2 \end{pmatrix},$$

$$x_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0, \quad t \in T = [0, t_1], \quad t_1 = 1.5.$$

$$a_1 = 0.6, \quad b_1 = -0.3, \quad a_2 = 0.1, \quad b_2 = \sqrt{0.54}.$$

Вектор $x(t)$, $t \in T$ описывает состояние квантовой системы, управление $u(t) \in U = [-30, 30]$, $t \in T$ характеризует воздействие внешним полем.

Функция Понтрягина в задаче имеет вид:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1(ux_3 + x_4) + \psi_2(x_3 - ux_4) + \psi_3(-ux_1 - x_2) + \psi_4(-x_1 + ux_2).$$

Стандартная сопряженная система записывается в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= u(t)\psi_3(t) + \psi_4(t), & \dot{\psi}_2(t) &= \psi_3(t) - u(t)\psi_4(t), \\ \dot{\psi}_3(t) &= -u(t)\psi_1(t) - \psi_2(t), & \dot{\psi}_4(t) &= u(t)\psi_2(t) - \psi_1(t), \end{aligned} \quad t \in T,$$

$$\begin{aligned} \psi_1(t_1) &= 2(a_1^2 + b_1^2)x_1(t_1) + 2(a_1a_2 + b_1b_2)x_2(t_1) + 2(a_1b_2 - b_1a_2)x_4(t_1), \\ \psi_2(t_1) &= 2(a_1a_2 + b_1b_2)x_1(t_1) + 2(a_2^2 + b_2^2)x_2(t_1) + 2(a_2b_1 - b_2a_1)x_3(t_1), \\ \psi_3(t_1) &= 2(a_2b_1 - b_2a_1)x_2(t_1) + 2(b_1^2 + a_1^2)x_3(t_1) + 2(b_1b_2 + a_1a_2)x_4(t_1), \\ \psi_4(t_1) &= 2(a_1b_2 - b_1a_2)x_1(t_1) + 2(b_1b_2 + a_1a_2)x_3(t_1) + 2(b_2^2 + a_2^2)x_4(t_1). \end{aligned}$$

В рассматриваемой задаче условие принципа максимума имеет вид:

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u)), \quad t \in T,$$

$$u^*(\psi, x) = \begin{cases} +30, & g(\psi, x) > 0, \\ -30, & g(\psi, x) < 0, \\ w \in U, & g(\psi, x) = 0, \end{cases} \quad g(\psi, x) = \psi_1x_3 - \psi_2x_4 - \psi_3x_1 + \psi_4x_2.$$

Результаты численного решения задачи методами неподвижных точек сравнивались с известными результатами глобального метода Кротова.

Глобальным методом Кротова было получено расчетное приближение экстремального управления со значением целевого функционала $\Phi^* \approx 0.000952$. Особый интервал расчетного управления равен $[0.0667, t_1]$. Точность равенства нулю модуля функции переключения $g(\psi, x)$ на итерационных приближениях глобального метода принималась равной значению $\varepsilon_v = 10^{-3}$.

В рассматриваемых методах неподвижных точек шаг сетки дискретизации выбирался равным $h = 10^{-5}$.

В качестве начального приближения управления для итерационных процессов неподвижных точек выбиралось стартовое управление, которое использовалось для глобального метода Кротова:

$$u(t) = tg(2\gamma(2t - 1.5)), \quad t \in T, \quad \gamma = -\frac{1}{3} \arctg(-30).$$

Критерием остановки расчета рассматриваемых методов неподвижных точек являлось достижение достаточно малого значения невязки принципа максимума для управления v^k в форме:

$$\max \left\{ \left\langle g(\psi(t, v^k), x(t, v^k)), v^{k+1}(t) - v^k(t) \right\rangle, t \in T_h \right\} \leq 10^{-6}.$$

Итерационный метод (13).

Итерационный процесс (13) в поточечной форме при $k \geq 0$ имеет вид:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t, v^k)), t \in T.$$

Для адекватного сравнения эффективности итерационного процесса (13) с глобальным методом Кротова, равенство нулю функции переключения $g(\psi, x)$ на итерационных приближениях также оценивалось с точностью $\varepsilon_v = 10^{-3}$. В этом случае значение управления $v^{k+1}(t)$ на особом интервале определялось по правилу дифференцирования тождества $g(\psi(t, u), x(t, u)) \equiv 0$ и вычисления особых значений управления $u(t)$ в силу фазовой и сопряженной систем.

На рисунке 1 представлено конечное расчетное управление $v1(t)$, $t \in T$, полученное методом (13) с указанного выше начального управления $u(t)$ с количеством итераций улучшения, равным 18, и значением функционала $\Phi^* \approx 0.000989$. Особый интервал конечного управления равен $[0.0693, 1.4717]$.

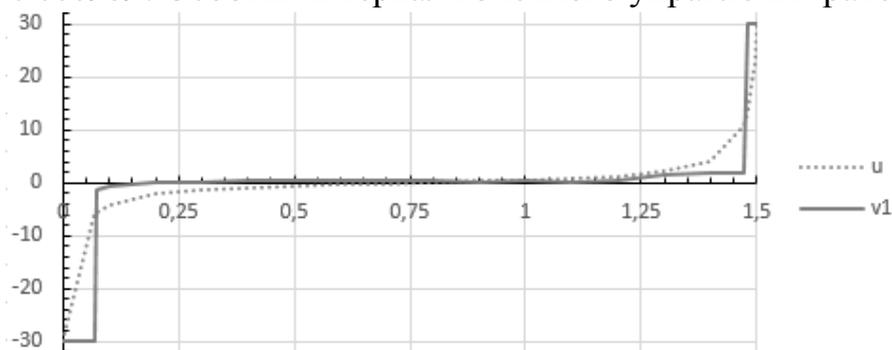


Рис. 1. u - стартовое управление, $v1$ – расчетное управление, полученное методом (13).

Итерационный метод (14).

Итерационный процесс (14) в поточечной форме при $k \geq 0$ имеет вид:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t)), t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$ является решением специальной фазовой задачи Коши, получающейся при замене переменной управления на выражение $u^*(\psi(t, v^k), x(t))$ в правой части фазовой системы.

В случае равенства нулю функции переключения $g_1(x) = g(\psi(t, v^k), x)$ на итерационных приближениях с точностью $\varepsilon_v = 10^{-3}$, значение управления $v^{k+1}(t)$ на особом интервале определялось по правилу дифференцирования тождества $g_1(x(t, u)) \equiv 0$ и вычисления особого значения управления $u(t)$ в силу фазовой системы.

На рисунке 2 представлено конечное расчетное управление $v2(t)$, $t \in T$, полученное методом (14) с указанного выше начального управления $u(t)$ с

количеством итераций улучшения, равным 24, и значением функционала $\Phi^* \approx 0.000552$. Особый интервал конечного управления равен $[0.0857, 1.4463]$.

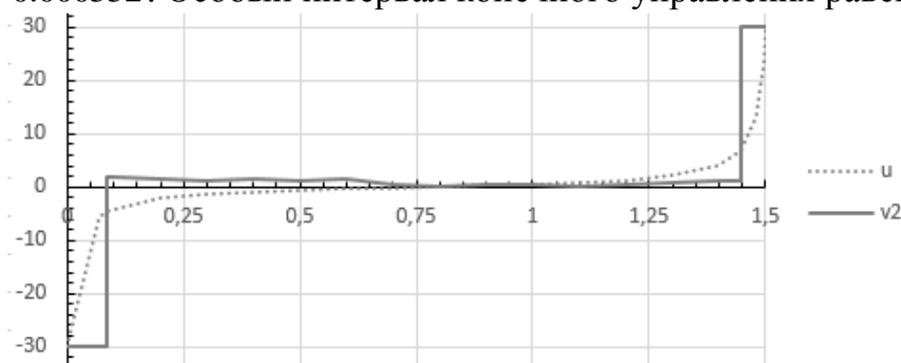


Рис. 2. u - стартовое управление, v_2 – расчетное управление, полученное методом (14).

Проекционный итерационный метод (16).

Для заданного $\alpha > 0$ итерационный процесс (16) в поточечной форме при $k \geq 0$ принимает вид:

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha g(\psi(t, v^k), x(t, v^k))), t \in T.$$

На рисунке 3 представлено конечное расчетное управление $v_3(t)$, $t \in T$, полученное методом (16) с указанного выше начального управления $u(t)$ при $\alpha = 10^{-2}$ с количеством итераций улучшения, равным 14, и значением функционала $\Phi^* \approx 0.001421$. Особый интервал конечного управления в смысле равенства нулю функции $g(\psi, x)$ с точностью $\varepsilon_v = 10^{-3}$ равен $[0.0698, 1.4609]$.

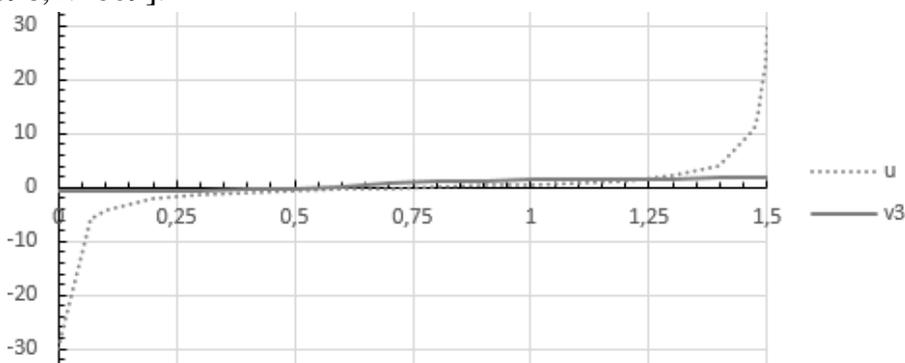


Рис. 3. u - стартовое управление, v_3 – расчетное управление, полученное методом (16).

Проекционный итерационный метод (17).

Для заданного $\alpha > 0$ итерационный процесс (17) в поточечной форме при $k \geq 0$ принимает вид:

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha g(\psi(t, v^k), x(t))), t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$ является решением специальной фазовой задачи Коши, получающейся при замене переменной управления на выражение $P_U(v^k(t) + \alpha g(\psi(t, v^k), x(t)))$ в правой части фазовой системы.

На рисунке 4 представлено конечное расчетное управление $v_4(t)$, $t \in T$, полученное методом (17) с указанного выше начального управления $u(t)$ при $\alpha = 10^{-2}$ с количеством итераций улучшения, равным 26, и значением

функционала $\Phi^* \approx 0.000704$. Особый интервал конечного управления в смысле равенства нулю функции $g_1(x)$ с точностью $\varepsilon_v = 10^{-3}$ равен $[0.0751, 1.4512]$.

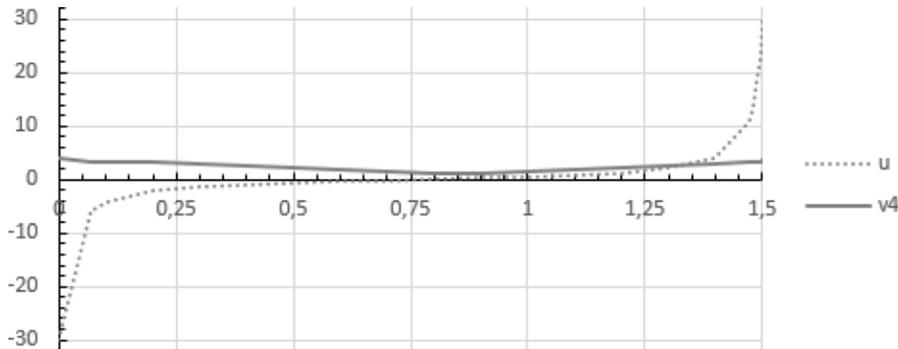


Рис. 4. u - стартовое управление, v_4 – расчетное управление, полученное методом (17).

Проекционный итерационный метод (18).

Для заданного $\alpha > 0$ итерационный процесс (18) в поточечной форме при $k \geq 0$ принимает вид:

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha g(\psi(t), x(t, v^k))), t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$ является решением специальной сопряженной задачи Коши, получающейся при замене переменной управления на выражение $P_U(v^k(t) + \alpha g(\psi(t), x(t, v^k)))$ в правой части сопряженной системы и переменной $x(t_1)$ на выражение $x(t_1, v^k)$ в правой части начального условия в момент времени t_1 .

На рисунке 5 представлено конечное расчетное управление $v_5(t)$, $t \in T$, полученное методом (18) с указанного выше начального управления $u(t)$, с $\alpha = 10^{-2}$ и с количеством итераций улучшения, равным 17, и значением функционала $\Phi^* \approx 0.000676$. Особый интервал конечного управления в смысле равенства нулю функции переключения $g_2(\psi) = g(\psi, x(t, u^k))$ с точностью $\varepsilon_v = 10^{-3}$ равен $[0.0799, 1.4485]$.

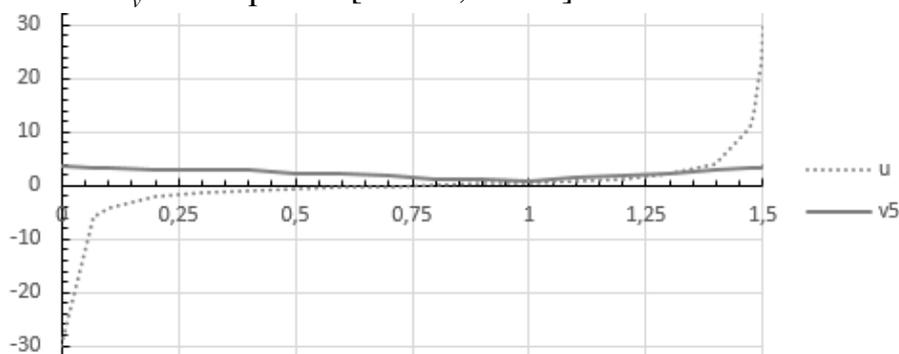


Рис. 5. u - стартовое управление, v_5 – расчетное управление, полученное методом (18).

Комбинированный итерационный метод.

В отличие от оптимального управления расчетные приближения экстремального управления, полученные проекционными итерационными

методами, не принимают граничных значений управления вне интервалов особого управления. Поэтому полученные расчетные приближения в целях лучшего приближения к оптимальному управлению можно уточнять итерационными методами неподвижных точек на основе операции максимизации функции Понтрягина, позволяющими получать граничные значения управления вне особых интервалов.

На рисунке 6 представлено конечное расчетное управление $v_6(t)$, $t \in T$, полученное методом (14) с указанного выше расчетного управления $v_5(t)$, $t \in T$, полученного проекционным методом (18), при $\alpha = 10^{-2}$ с количеством итераций улучшения, равным 3, и значением функционала $\Phi^* \approx 0.000598$. Особый интервал конечного управления равен $[0.0799, 1.4485]$.

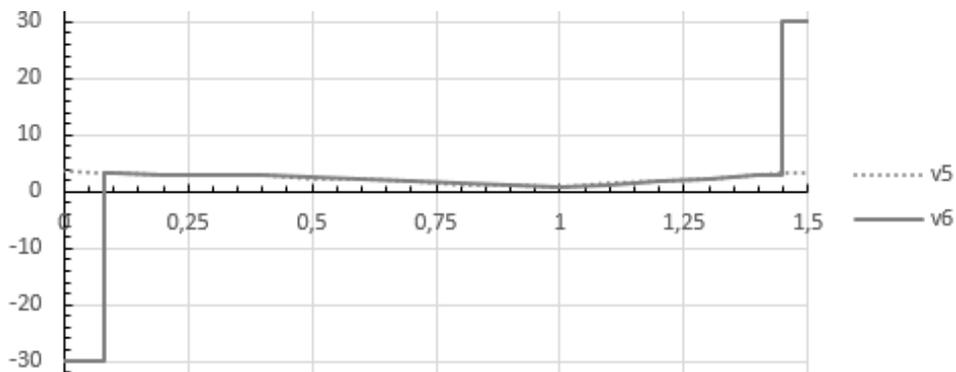


Рис. 6. v_5 - стартовое управление, v_6 – расчетное управление, полученное методом (14).

В результате получаем, что особые интервалы расчетных управлений v_5 и v_6 совпадают и на особом интервале уточненное расчетное управление v_6 практически не отличается от расчетного приближения v_5 экстремального управления, полученного проекционным методом (14).

Проведенные расчеты в рамках модельной задачи показывают высокую эффективность рассматриваемых итерационных методов неподвижных точек принципа максимума для поиска особых экстремальных управлений, позволяющих получать лучшие значения критерия оптимальности по сравнению с известным глобальным методом Кротова. При этом существенно более простые в вычислительной реализации проекционные итерационные методы по сравнению с итерационными методами на основе операции максимизации функции Понтрягина позволяют достаточно точно рассчитывать особые интервалы экстремальных управлений.

В заключении представлены основные научные результаты работы и список публикаций по теме диссертации.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Получены новые формы принципа максимума в виде задач о неподвижной точке в классе задач оптимального управления, линейных по управлению, и доказана их эквивалентность классическим условиям принципа максимума.

2. Определены новые понятия особых управлений на основе новых форм принципа максимума в виде задач о неподвижной точке и доказана их эквивалентность классическому определению особого управления в классе задач оптимального управления, линейных по управлению.
3. Разработаны новые итерационные алгоритмы и вычислительные технологии на основе задач о неподвижной точке для поиска экстремальных управлений, в том числе особых управлений, и доказаны теоремы сходимости итерационных алгоритмов.
4. Проведен сравнительный анализ предложенных методов неподвижных точек принципа максимума с известными методами на тестовых и модельных задачах оптимального управления, показывающий повышенную вычислительную эффективность предлагаемых методов.
5. Созданы автоматизированные комплексы алгоритмов и программ, реализующие методы неподвижных точек принципа максимума для поиска экстремальных управлений.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в рецензируемых журналах из списка рекомендованных ВАК:

1. Buldaev A.S., Kazmin I.D. On One Method of Optimization of Quantum Systems Based on the Search for Fixed Points. Communications in Computer and Information Science (CCIS). 2021. Vol. 1514: Advances in Optimization and Applications. P. 67-81. (Scopus (Q4))

2. Buldaev A., Kazmin I. Operator Methods of the Maximum Principle in Problems of Optimization of Quantum Systems. Mathematics. 2022. Vol. 10, Iss.3, 507. P. URL: <https://doi.org/10.3390/math10030507> (WoS, Scopus (Q1))

3. Buldaev A., Kazmin I. Extremal Controls Searching Methods Based on Fixed Point Problems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Springer, Cham, 2023. Vol 434: Optimization, Simulation and Control. ICOSC 2022. P. 139-151. https://doi.org/10.1007/978-3-031-41229-5_11 (Scopus (Q4))

4. Buldaev A., Kazmin I. Fixed Point Methods for Solving Boundary Value Problem of the Maximum Principle. J Math Sci. 2024. Vol. 279, No. 6. P. 763-775. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07058-4> (Scopus (Q3))

5. Булдаев А.С., Казьмин И.Д. Операторные методы поиска экстремальных управлений в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 224. С. 19–27. (MathSciNet, ZbMATH)

6. Булдаев А.С., Казьмин И.Д. Об одном подходе к вычислению особых экстремальных управлений на основе задач о неподвижной точке // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2024. Т. 234. С. 118–132. (MathSciNet, ZbMATH)

Свидетельство о государственной регистрации программы:

7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022614692 от 24.03.22 г. «Программа для численного решения

билинейных управляемых систем проекционным методом неподвижных точек» / Казьмин И.Д.

Публикации, входящие в РИНЦ:

8. Казьмин И.Д. Сравнительный анализ эффективности нелокальных методов в задачах оптимизации билинейных систем. Материалы VII Международной конференции МПМО'2020. С. 107-109.

9. Казьмин И.Д. Модификации проекционных методов в билинейных задачах оптимального управления // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2021. №2. С. 44-60. (Перечень ВАК (К3))

10. Казьмин И.Д. Модификации нелокальных проекционных методов оптимизации билинейных управляемых систем. Материалы 3-й Международной конференции DYSC'2021. С. 96-98.

11. Казьмин И.Д., Гунов А.В. Об одном методе оптимизации вырожденных билинейных управляемых систем. Материалы научной конференции с международным участием, посвященной 90-летию БГПИ-БГУ ММО'22. С. 10-18.

12. Казьмин И.Д., Булдаев А.С. Операторные методы принципа максимума в задачах оптимизации квантовых систем. Материалы VIII Международной конференции ПМСМ'2022. С. 259-265.

13. Булдаев А.С., Казьмин И.Д. Операторные методы поиска вырожденных экстремальных управлений в линейных по управлению задачах оптимального управления // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. №2. С. 23-41. (Перечень ВАК (К3))

14. Булдаев А.С., Казьмин И.Д. Операторные методы поиска вырожденных экстремальных управлений в линейно-квадратичных задачах оптимального управления. Материалы 4-й Международной конференции DYSC'2022. С. 73-76.

15. Казьмин И.Д. Методы поиска особых экстремальных управлений на основе задач о неподвижной точке. Материалы VIII Международной конференции МПМО'2023. С. 112-114.

16. Булдаев А.С., Казьмин И.Д. Об одном подходе к поиску особых экстремальных управлений на основе задач о неподвижной точке. Материалы 5-й Международной конференции DYSC'2023. С. 82-85.