

Свидетельство  
о регистрации  
**ПИ № ФС77-48732**  
от **28 февраля 2012 г.**  
Федеральная служба  
по надзору в сфере связи,  
информационных  
технологий и массовых  
коммуникаций  
(Роскомнадзор)

Адрес редакции  
670000, Республика  
Бурятия, г. Улан-Удэ,  
ул. Смолина, д. 24а  
E-mail: vbsumi@yandex.ru

Адрес издателя  
670000, Республика  
Бурятия, г. Улан-Удэ,  
ул. Смолина, д. 24а  
E-mail: riobsu@gmail.com

Перевод  
на английский язык  
*С. В. Сазоновой*  
Текст печатается  
в авторской редакции  
Компьютерная верстка  
*Д. О. Трунина*

Подписано в печать  
22.03.16.  
Формат 70x100 1/16.  
Уч.-изд. л. 6,58.  
Усл. печ. л. 9,43.  
Тираж 1000. Заказ 86.  
Дата выхода в свет  
06.04.16.  
Цена свободная

Отпечатано в типографии  
Издательства БГУ  
670000, Республика  
Бурятия, г. Улан-Удэ,  
ул. Сухэ-Батора, д. 3а

Учредитель  
ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет»

**Вестник  
Бурятского государственного университета  
Математика, информатика**

**2016 / 1**

Журнал издается с 2012 года  
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (по состоянию на 29.12.2015) по группам специальностей:

- 01.01.00 – математика;
- 01.02.00 – механика;
- 05.13.00 – информатика, вычислительная техника и управление

Редакционная коллегия

*А. С. Булдаев*, доктор физико-математических наук, профессор (гл. редактор, Улан-Удэ), *С. Н. Васильев*, академик РАН, профессор (Москва), *В. И. Гурман*, доктор технических наук, профессор (Москва), *Ж. Г. Дамбаев*, доктор технических наук, профессор (Улан-Удэ), *А. В. Данеев*, доктор технических наук, профессор (Иркутск), *А. И. Кожанов*, доктор физико-математических наук, профессор (Новосибирск), *А. В. Лакеев*, доктор физико-математических наук (Иркутск), *А. Д. Мижидон*, доктор технических наук, профессор (Улан-Удэ), *Ни Минь Кань*, доктор наук, профессор (КНР, Шанхай), *Б. Очирбат*, доктор наук, профессор (Монголия, Улан-Батор), *В. А. Срочко*, доктор физико-математических наук, профессор (Иркутск), *Д. Ш. Ширанов*, доктор физико-математических наук, профессор (Улан-Удэ), *Р. Энхбат*, доктор наук, профессор (Монголия, Улан-Батор)

© Бурятский государственный университет, 2016

**GH**

## К вопросу о стабильных элементах свободной нильпотентной группы $F_{3,12}$

Известно, что в свободной нильпотентной группе ранга 3 степени 12 существуют нетривиальные стабильные элементы. При этом отличительной особенностью всех таких элементов является однородность вхождения образующих в эти элементы. В настоящей работе рассматривается характеристическая подгруппа данной группы, состоящая из элементов специального вида. Изучен вопрос о существовании в этой подгруппе стабильного элемента с неоднородным вхождением образующих.

**Ключевые слова:** нильпотентные группы, автоморфизмы групп, неподвижные точки.

## To the problem of stable elements in free nilpotent group $F_{3,12}$

It is known that there are nontrivial stable elements in free nilpotent group of rank 3 and stage 12. Herewith, the distinctive feature of all these elements is homogeneity entrance of generatrices in these elements. In the article we considered the characteristic subgroup of this group, which include elements of a special kind. We also studied the problem of existence stable elements with inhomogeneous generatrices entrance in the above mentioned subgroup.

**Keywords:** nilpotent groups, automorphisms of groups, fixed points.

### Введение

Элемент  $g$  группы  $G$  называется стабильным, если для любого автоморфизма  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  выполняется условие  $\varphi(g) = g$ .

Вопрос о существовании нетривиальных стабильных элементов в свободных нильпотентных группах взаимосвязан с вопросом о существовании инвариантов Ли свободных колец Ли. Изучением последнего вопроса занимались Ф. Вефер (1949 г.) и М. Барроу (1958 г.), были найдены условия, при которых инварианты Ли существуют [6, 7, 11]. В работе [11] представлен явный вид одного из таких элементов.

В электронном проекте MAGNUS (<http://www.sci.ccny.cuny.edu/~shpil/gworld/problems/probnil.html>) А. Мясников поставил вопрос: Пусть  $G$  – свободная нильпотентная группа конечного ранга  $r$ . Пусть элемент  $g \in G$  неподвижен относительно всех автоморфизмов группы  $G$ . Верно ли, что  $g = 1$ ?

Примеры нетривиальных стабильных элементов свободных нильпотентных групп впервые привел В.В. Блудов [1]. В 2001 году А. Папистас [10] и Е. Форманек [8], на основании работ Ф. Вефера и М. Барроу доказали существование стабильных элементов в свободных нильпотентных группах, степень и ранг которых удовлетворяют определенному условию. В 2010 году автором [2] был разработан метод нахождения нетривиальных стабильных элементов группы  $F_{r,c}$  – свободной нильпотентной группы ранга  $r$  и степени  $c$ . Результатом применения данного метода является полное описание стабильных элементов в группах  $F_{2,8}$  [3] и  $F_{2,12}$  [4].

Отметим, что в группе  $F_{2,12}$  данный метод был обобщен на случай базисных коммутаторов с неоднородным вхождением образующих. Настоящая работа посвящена группе  $F_{3,12}$ . Изучается подгруппа, порожденная базисными коммутаторами одного определенного вида. Рассматриваются как базисные коммутаторы с однородным вхождением образующих, так и с неоднородным. Доказано, что в разложении любого нетривиального стабильного элемента, принадлежащего этой подгруппе, не участвует ни один базисный коммутатор с неоднородным вхождением образующих.

### 1. Вспомогательные сведения

В соответствии с методом нахождения стабильных элементов, непосредственно сам элемент должен быть разложен по базисным. В работе мы будем использовать базис Холла, определение которого представлено в [9]. Для более наглядного восприятия формул для умножения элементов используем знак  $+$  и квадратные скобки заменяем на круглые.

Введем обозначения для следующих автоморфизмов группы  $F_{3,12}$  со свободными образующими  $a, b$  и  $c$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{12} : a \rightarrow a+b, b \rightarrow b, c \rightarrow c; & \quad \varphi_{23} : a \rightarrow a, b \rightarrow b+c, c \rightarrow c; \\ \varphi_{31} : a \rightarrow a, b \rightarrow b, c \rightarrow c+a; & \quad \alpha_1 : a \leftrightarrow -a, b \rightarrow b; c \rightarrow c; \\ \alpha_2 : b \leftrightarrow -b, a \rightarrow a, c \rightarrow c; & \quad \alpha_3 : c \leftrightarrow -c, a \rightarrow a, c \rightarrow c; \end{aligned}$$

В соответствии с необходимым и достаточным условием неподвижности элемента  $g$ , равному линейной комбинации базисных коммутаторов, число вхождений каждого из образующих  $a, b, c$  в эти коммутаторы должно быть четным. Для доказательства стабильности элемента  $g$ , мы будем проверять выполнение равенств  $\varphi_{12}(g) = \varphi_{23}(g) = \varphi_{31}(g) = g$ .

### 2. Основной результат

В группе  $F_{3,12}$  обозначим через  $G$  – подгруппу, порождающие элементы которой имеют вид  $((**)(**))(**)(**))$ . Известно, что  $G$  содержит нетривиальный стабильный элемент, равный линейной комбинации ее базисных коммутаторов с однородным вхождением образующих

[5]. Вопрос о существовании в этой подгруппе стабильных элементов с неоднородным вхождением образующих закрывает следующая теорема.

**Теорема:** Пусть  $G$  – подгруппа группы  $F_{3,12}$ , порождающие элементы которой имеют вид  $((***)(***)((***)(***)))$ . Всякая линейная комбинация базисных коммутаторов из  $G$  с неоднородным вхождением образующих является нестабильным элементом.

**Доказательство:** Рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию базисных коммутаторов вида  $((***)(***)((***)(***)))$  с неоднородным числом вхождений образующих. Возможны следующие случаи.

Случай 1. Пусть образующий  $a$  входит 4 раза,  $b$  – 2 раза,  $c$  – 6 раз в базисные коммутаторы. Все базисные коммутаторы обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 &= (((bca)(acc))((aca)(bcc))), \quad u_2 = (((acb)(acc))((aca)(bcc))), \\ u_3 &= (((aca)(acc))((acb)(bcc))), \quad u_4 = (((aba)(acc))((acc)(bcc))), \\ u_5 &= (((aca)(acb))((acc)(bcc))), \quad u_6 = (((aca)(bca))((acc)(bcc))), \\ u_7 &= (((aca)(acc))((bca)(bcc))), \quad u_8 = (((aca)(acc))((acb)(acc))), \\ u_9 &= (((bca)(acc))((acb)(acc))). \end{aligned}$$

Составим нетривиальную линейную комбинацию коммутаторов  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 9$ , с целыми коэффициентами  $m_i$ . Подействуем на элемент  $g_1 = \sum_{i=1}^9 m_i u_i$  автоморфизмом  $\varphi_{12}$  и запишем линейную комбинацию базисных коммутаторов, полученных из  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 9$ , заменой одного вхождения образующего  $a$  на  $b$ :

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2 - m_8)((bcb)(acc))((aca)(bcc)) + (-m_1 + m_7) \times \\ & \times (((aca)(bcc))((bca)(bcc))) + (m_1 + m_7)((bca)(acc))((bca)(bcc)) + \\ & + (-m_2 + m_3)((aca)(bcc))((acb)(bcc)) + (m_2 + m_7 - m_9) \times \\ & \times (((acb)(acc))((bca)(bcc))) + (m_2 + m_3)((acb)(acc))((acb)(bcc)) + \\ & + m_4(((abb)(acc))((acc)(bcc))) + (m_5 - m_6)((bca)(acb))((acc)(bcc)) + \\ & + (m_5 + m_6)((aca)(bcb))((acc)(bcc)) + (m_1 + m_3 + m_9) \times \\ & \times (((bca)(acc))((acb)(bcc))) + (m_3 + m_7 + m_8) \times \\ & \times (((aca)(acc))((bcb)(bcc))) + (m_8 + m_9)((bca)(acc))((bcb)(acc)) + \\ & - m_9(((acb)(acc))((bcb)(acc))). \end{aligned}$$

Подействуем на элемент  $g_1$  автоморфизмом  $\varphi_{23}$ , тогда автоморфный образ  $\varphi_{23}(g_1)$  содержит единственный элемент  $(m_3 + m_4 + m_5 - m_8)((aca)(acc))((acc)(bcc))$ .

Для стабильности элемента  $g_1$  относительно  $\varphi_{12}$  и  $\varphi_{23}$  коэффициенты полученных комбинаций должны быть равны нулю, а значит  $m_i$ ,  $1 \leq i \leq 9$ , удовлетворяют системе уравнений:

$$m_1 + m_2 - m_8 = 0, -m_1 + m_7 = 0, m_1 + m_7 = 0, -m_2 + m_3 = 0, m_2 + m_7 - m_9 = 0, \\ m_2 + m_3 = 0, m_4 = 0, m_5 - m_6 = 0, m_5 + m_6 = 0, \\ m_1 + m_3 + m_9 = 0, m_3 + m_7 + m_8 = 0, m_8 + m_9 = 0, m_9 = 0.$$

Система имеет единственное нулевое решение. Поэтому действие автоморфизма  $\varphi_{31}$  на элемент  $g_1$  проверять не надо.

Случай 2. В подгруппе  $G$  так же содержатся элементы, в которые образующий  $a$  входит 2 раза,  $b$  – 4 раза,  $c$  – 6 раз. Данный случай закрывается предыдущим, так как все базисные коммутаторы с таким распределением числа образующих могут быть получены из базисных коммутаторов, в которые образующий  $a$  входит 4 раза,  $b$  – 2 раза,  $c$  – 6 раз, путем применения к ним автоморфизма  $\tau : \begin{cases} a \leftrightarrow b \\ c \rightarrow c \end{cases}$ . Таким образом, и среди не-

тривиальных линейных комбинаций коммутаторов с таким распределением числа образующих нет стабильных.

Случай 3. Пусть образующий  $a$  входит 4 раза,  $b$  – 6 раз,  $c$  – 2 раза в базисные элементы. Все базисные коммутаторы обозначим следующим образом:

$$v_1 = (((bca)(abb))((aba)(bcb))), v_2 = (((abb)(acb))((aba)(bcb))), \\ v_3 = (((aba)(abb))((abb)(bcc))), v_4 = (((aca)(abb))((abb)(bcb))), \\ v_5 = (((aba)(acb))((abb)(bcb))), v_6 = (((aba)(abb))((acb)(bcb))), \\ v_7 = (((aba)(bca))((abb)(bcb))), v_8 = (((aba)(abb))((bca)(bcb))).$$

Составим нетривиальную линейную комбинацию коммутаторов  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq 8$ , с целыми коэффициентами  $n_i$ . Подействуем на элемент

$$g_2 = \sum_{i=1}^8 n_i v_i \text{ автоморфизмом } \varphi_{23}.$$

Опустив промежуточные коммутаторные вычисления, коэффициенты линейной комбинации базисных коммутаторов, полученных из  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq 8$ , заменой одного вхождения образующего  $b$  на  $c$  приравняем к нулю. Полученная система уравнений относительно  $n_i$ ,  $1 \leq i \leq 8$ , имеет вид:

$$2n_1 - n_2 = 0, n_3 + n_4 = 0, n_2 = 0, 2n_3 + n_6 = 0, -n_3 + n_7 = 0, \\ 2n_1 + n_5 = 0, n_5 = 0, 2n_5 + 2n_6 = 0, -n_5 + 2n_8 = 0, n_6 + 2n_4 = 0, -n_4 + n_7 = 0, \\ -n_4 + n_8 = 0, -n_6 + 2n_7 = 0, -n_6 = 0.$$

Система имеет единственное нулевое решение. Действие автоморфизмов  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{31}$  на элемент  $g_2$  проверять не надо.

Случай 4. Для всех коммутаторов, в которые образующий  $a$  входит 6 раз,  $b$  – 4 раза,  $c$  – 2 раза, проводим рассуждения подобные рассуждениям в случае 2, путем применения к коммутаторам, входящим в разложение элемента  $g_2$  автоморфизма  $\tau$ .

Случай 5. При помощи рассмотрений, аналогичных проведенным выше, получаем, что и среди элементов, в которые образующий  $a$  входит  $b$  раз,  $b - 2$  раза,  $c - 4$  раза, нет нетривиальных стабильных. В результате действия автоморфизма  $\tau$  на эти элементы получаем коммутаторы, содержащие образующий  $a$  два раза,  $b - 6$  раз,  $c - 4$  раза. Следовательно, среди нетривиальных линейных комбинаций коммутаторов с таким распределением числа образующих нет стабильных элементов. *Теорема доказана.*

#### Заключение

Показано применение метода нахождения стабильных элементов для поиска стабильных элементов с неоднородным вхождением образующих на примере одной из подгрупп свободной нильпотентной группы ранга 3 степени 12.

#### Литература

1. Блудов В. В. Неподвижные точки относительно всех автоморфизмов в свободных нильпотентных группах // Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике: тезисы докл. — Ч. 5. — Новосибирск, 1998.
2. Ковыршина А. И. Стабильные элементы в свободных нильпотентных группах ранга три // Вестник Омского университета. — 2010. — №4(58). — С. 20–23.
3. Ковыршина А. И. О стабильных элементах в свободных нильпотентных группах ранга два // Вестник Бурятского государственного университета. — Вып. 9. Математика и информатика. — 2015. — № 9. — С. 3–6.
4. Ковыршина А. И. Полное описание стабильных элементов свободной нильпотентной группы  $F_{2,12}$  // Вестник БГУ. Математика, информатика. — 2015. — № 2. — С. 7–15.
5. Ковыршина А. И. Стабильные элементы автоморфизмов свободной нильпотентной группы: Дис. ... канд. физ-мат. наук. — Омск, 2011. — 113 с.
6. Burrow M. D. Invariants of free Lie rings // Communications on pure and applied mathematics. — 1958. — No. 11. — P. 419–431.
7. Burrow M. D. The enumeration of Lie invariants // Communications on pure and applied mathematics. — 1967. — No. 20. — P. 401–411.
8. Formanek E. Fixed points and centers of automorphism groups of free nilpotent groups // Communications in algebra. — 2002. — No. 30. — P. 1033–1038.
9. Магнус В. Комбинаторная теория групп / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. — М.: Наука, 1974. — 455 с.
10. Papistas A. A note on fixed points of certain relatively free nilpotent groups // Communications in algebra. — 2001. — No. 29. — P. 4693–4699.
11. Wever, F. Ueber Invarianten in Lieschen Ringen // Mathematische Annalen. — 1949. — No. 120. — P. 563–580.

---

**References**

1. Bludov V. V. Nepodvizhnye tochki otnositel'no vseh avtomorfizmov v svobodnykh nil'potentnykh gruppakh [Fixed Points with Respect to All Automorphisms in Free Nilpotent Groups]. *Tretii Sibirskii kongress po prikladnoi i industrial'noi matematike – Third Siberian Congress on Industrial and Applied Mathematics*. Novosibirsk, 1998. Part 5.
2. Kovyrshina A. I. Stabil'nye elementy v svobodnykh nil'potentnykh gruppakh ranga tri [Stable Elements in Free Nilpotent Groups of Rank Three]. *Vestnik Omskogo universiteta – Bulletin of Omsk University*. 2010. No. 4 (58). Pp. 20–23.
3. Kovyrshina A. I. O stabil'nykh elementakh v svobodnykh nil'potentnykh gruppakh ranga dva [About Stable Elements in Free Nilpotent Groups of Rank Two]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika i informatika – Bulletin of Buryat State University. Ser. Mathematics and Computer Science*. 2015. No. 9. Pp. 3–6.
4. Kovyrshina A. I. Polnoe opisanie stabil'nykh elementov svobodnoi nil'potentnoi grupy  $F_{2,12}$  [Full Description of Stable elements in Free Nilpotent Group  $F_{2,12}$ ]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika i informatika – Bulletin of Buryat State University. Ser. Mathematics and Computer Science*. 2015. No. 2. Pp. 7–15.
5. Kovyrshina A. I. *Stabil'nye elementy avtomorfizmov svobodnoi nil'potentnoi grupy. Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Stable Elements of Automorphisms in Free Nilpotent Group. Cand. physical and math. sci. diss.]. Omsk, 2011. 113 p.
6. Burrow M. D. Invariants of Free Lie Rings. *Communications on Pure and Applied mathematics*. 1958. No. 11. Pp. 419–431.
7. Burrow M. D. The Enumeration of Lie Invariants. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1967. No. 20. Pp. 401–411.
8. Formanek E. Fixed points and centers of automorphism groups of free nilpotent groups. *Communications in Algebra*. 2002. No. 30. Pp. 1033–1038.
9. Magnus V., Karrass, A. Solitar D. *Combinatorial Group Theory*. New York: InterScience, 1966.
10. Papistas A. A Note on Fixed Points of Certain Relatively Free Nilpotent Groups // *Communications In Algebra*. 2001. No. 29, Pp. 4693–4699.
11. Wever F. Ueber Invarianten in Lieschen Ringen. *Mathematische Annalen*. 1949. No. 120. Pp. 563–580.

*Ковыршина Анна Ивановна*, кандидат физико-математических наук, доцент Педагогического института Иркутского государственного университета, e-mail: annkow@mail.ru.

*Anna I. Kovyrshina*, PhD in Physics and Mathematics, A/Professor, Pedagogical Institute, Irkutsk State University.



УДК 512.81

doi: 10.18101/2304-5728-2016-1-9-15

© *В. Б. Цыренова*

**Комплексы в трехмерном квазигиперболическом  
пространстве  ${}^{01}S_3^1$**

В данной работе построен канонический репер комплекса, который геометрически характеризуется тем, что в нормальной корреляции точкам  $A_0$  и  $A_1$  (центрам луча комплекса) соответствуют плоскости  $(A_0A_1A_2)$  и  $(A_0A_1A_3)$ , полярно сопряженные относительно абсолюта и пересекающие абсолютную прямую в точках  $A_2$  и  $A_3$ . Доказана теорема существования; дана геометрическая характеристика инвариантов комплекса с использованием трех простейших линейчатых поверхностей (центральной поверхности и двух центральных торсов), принадлежащих комплексу; получены две основные квадратичные формы комплекса; линейчатые поверхности, сопряженные относительно первой квадратичной формы, характеризуются гармонической сопряженностью их точек прикосновения; поверхности, сопряженные относительно второй квадратичной формы, геометрически характеризуются гармонической сопряженностью точек прикосновения одного из них с точками симметрии другого; получены уравнение инфлекционных центров образующей комплекса и условия, характеризующие линейный комплекс; найдены некоторые частные классы комплексов.

**Ключевые слова:** неевклидово пространство, квазигиперболическое пространство, абсолют, комплекс, репер, нормальная корреляция, инварианты.

© *V.B. Tsyrenova*

**Complexes in three-dimensional quasi-hyperbolic space  ${}^{01}S_3^1$**

In the article the canonical frame of a complex is constructed. This frame is geometrically characterized by the fact that in normal correlation the points  $A_0$  and  $A_1$  (centers of complex-ray) correspond to the planes  $(A_0A_1A_2)$  and  $(A_0A_1A_3)$ , which are polar conjugated with respect to the absolute and cross absolute line to the points  $A_2$  and  $A_3$ . The theorem of existence is proved. We have given the geometric characteristics of the complex invariants using three simple ruled surfaces (central surface and two central torses) belonging to the complex.

Two main quadratic forms of the complex have been obtained. The ruled surfaces conjugated with respect to the first quadratic form are characterized by the harmonic conjugation of their adherent points. The surfaces conjugated with respect to the second quadratic form are characterized by the harmonic conjugation of the adherent points of one of them with the symmetry points of the other.

We have obtained the equation of inflectional centers of the complex generatrices, the conditions characterizing the linear complex, and found some special classes of the complexes.

**Keywords:** non-Euclidean space, quasi-hyperbolic space, absolute, complex, frame, normal correlation, invariants.

### Введение

Ранее нами были изучены комплексы прямых в квазиэллиптическом пространстве  $S_3^1$  [2], а также в квазигиперболическом пространстве  ${}^{10}S_3^1$  [3]. В данной работе рассмотрены комплексы прямых в квазигиперболическом пространстве  ${}^{01}S_3^1$ .

### 1. Канонический репер комплекса в квазигиперболическом пространстве ${}^{01}S_3^1$ . Теорема существования.

Рассмотрим трехмерное проективное пространство  ${}^{01}S_3^1$ , абсолют которого состоит из двух мнимых плоскостей и двух вещественных точек на прямой их пересечения.

Наиболее общий репер пространства  ${}^{01}S_3^1$  можно выбрать так, чтобы абсолютные плоскости  $Q_0$  определялись уравнением:  $(x^0)^2 + (x^1)^2 = 0$ , прямая  $T$  их пересечения уравнениями:  $x^0 = x^1 = 0$ , а квадрака  $Q_1$  уравнением:  $(x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ . Тогда дериационные формулы подвижного репера пространства  ${}^{01}S_3^1$  записываются в виде:

$$dA_0 = \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3, dA_1 = -\omega_0^1 A_0 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3, \\ dA_2 = \omega_2^3 A_3, dA_3 = \omega_2^3 A_2.$$

Рассмотрим в этом пространстве комплекс, т.е. трехпараметрическое семейство прямых. Включим элемент в репер, то есть точки  $A_0$  и  $A_1$  репера совместим с какими-либо двумя точками образующей комплекса, тогда получим  $\pi_0^2 = \pi_0^3 = \pi_1^2 = \pi_1^3 = 0$ , т.е. формы  $\omega_0^2, \omega_0^3, \omega_1^2, \omega_1^3$  становятся главными формами. Так как формы  $\omega_i^j$  линейно зависят от трех дифференциалов  $du^1, du^2, du^3$ , то исключение последних приведет к следующему основному соотношению  $\alpha\omega_0^2 + \beta\omega_0^3 + \gamma\omega_1^2 + \delta\omega_1^3 = 0$  [1]. По-

требуем, чтобы  $[\omega_0^2, \omega_0^3, \omega_1^3] \neq 0$  и запишем основное соотношение в виде  $\omega_1^2 = \xi\omega_0^2 + \eta\omega_0^3 + \zeta\omega_1^3$ .

Далее, пользуясь алгоритмом Картана, канонизируем репер полностью. Девивационные формулы канонического репера комплекса получены в виде:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3, dA_1 = -\omega_0^1 A_0 + \eta\omega_0^3 A_2 + \omega_1^3 A_3, \\ dA_2 &= \omega_2^3 A_3, dA_3 = \omega_2^3 A_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\omega_0^1 = \xi_1 \omega_0^2 + \eta_1 \omega_0^3 + \zeta_1 \omega_1^3, \omega_2^3 = \xi_2 \omega_0^2 + \eta_2 \omega_0^3 + \zeta_2 \omega_1^3.$$

Инвариант  $\eta$  назовем кривизной комплекса ( $1 + \eta^2 \neq 0$ ).

Построенный канонический репер геометрически характеризуется тем, что в нормальной корреляции точкам  $A_0$  и  $A_1$  (центрам луча комплекса) соответствуют плоскости  $(A_0 A_1 A_2)$  и  $(A_0 A_1 A_3)$ , полярно сопряженные относительно абсолюта, точки  $A_2$  и  $A_3$  суть точки пересечения абсолютной прямой с плоскостями  $(A_0 A_1 A_2)$  и  $(A_0 A_1 A_3)$ .

Условия вполнеинтегрируемости системы (1.1) дают следующую основную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d\eta \wedge \omega_0^3 &= (\eta_1 - \eta\eta_2) \omega_0^2 \wedge \omega_0^3 + (\zeta_1 - \xi_2 - \eta\xi_1 - \eta\xi_2) \omega_0^2 \wedge \omega_1^3 - \\ &(\eta_2 + \eta\eta_1) \omega_0^3 \wedge \omega_1^3, \\ d\xi_1 \wedge \omega_0^2 + d\eta_1 \wedge \omega_0^3 + d\zeta_1 \wedge \omega_1^3 &= \\ (-\xi_1^2 \eta + \xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \xi_1 + \xi_2 \zeta_1 \eta) \omega_0^2 \wedge \omega_0^3 + \\ &(-\eta_1 \xi_1 - \eta_1 \zeta_2) \omega_0^2 \wedge \omega_1^3 + \\ (-\xi_1 \xi_2 - \eta_1^2 - \zeta_1^2 - \zeta_1 \eta \zeta_2 + \xi_1 \eta \zeta_2) \omega_0^3 \wedge \omega_1^3, \\ d\xi_2 \wedge \omega_0^2 + d\eta_2 \wedge \omega_0^3 + d\zeta_2 \wedge \omega_1^3 &= (-\xi_2 \eta \xi_1 + \xi_2^2 - \eta_2^2 + \zeta_2 \xi_1 + \xi_2 \zeta_2 \eta) \\ \omega_0^2 \wedge \omega_0^3 + (-\eta_2 \xi_1 - \eta_2 \zeta_2) \omega_0^2 \wedge \omega_1^3 + \\ (\eta \xi_2 \zeta_1 - \xi_2 \zeta_2 - \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2 - \eta \zeta_2^2) \omega_0^3 \wedge \omega_1^3. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Из первого уравнения получаем конечное соотношение

$$\zeta_1 = \xi_2 + \eta\xi_1 + \eta\xi_2, \quad (1.3)$$

а само уравнение принимает вид

$$(d\eta - (\eta_1 - \eta\eta_2) \omega_0^2 - (\eta_2 + \eta\eta_1) \omega_1^3) \wedge \omega_0^3 = 0. \quad (1.4)$$

В силу (1.3) второе уравнение будет содержать только два независимых дифференциала, а третье уравнение основной системы (1.2) останется общего вида. Так, система имеет стандартный вид [1] и произвол ее

решения равен одной функции трех аргументов. Теорема существования доказана.

Полная система инвариантов комплекса состоит из семи коэффициентов деривационных формул  $\eta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ , связанных одним конечным соотношением (1.3). Из (1.2) и (1.4) следует, что

$$d\eta = (\eta_1 - \eta\eta_2)\omega_0^2 + \eta_3\omega_0^3 + (\eta_2 + \eta\eta_1)\omega_1^3, \quad (1.5)$$

где  $\eta_3$  – новая функция первичных параметров, также являющаяся инвариантом комплекса.

### 2. Геометрическая характеристика инвариантов комплекса

Геометрическое значение кривизны  $\eta$  получаем аналогично [2] в виде

$$\cos \delta = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}, \text{ где } \delta \text{ – расстояние между псевдоцентрами } M_1 \text{ и } M_2$$

образующей комплекса.

Геометрические характеристики всех остальных инвариантов комплекса, входящих в деривационные формулы канонического репера, получим, рассматривая три простейших регулюса (центральный регулюс и два центральных торса) (см. [2]). Так инварианты  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  суть радиус

кривизны  $\frac{1}{k_1}$  и произведение кручения  $k_2$  и радиуса кривизны  $\frac{1}{k_1}$  ребра

возврата центрального торса  $\omega_0^2 = \omega_0^3 = 0$ .

Аналогично получаем, что инварианты  $\eta_1, \eta, \eta_2$  являются соответственно инвариантами  $p, \rho, q$  центрального эллиптического регулюса  $\omega_0^2 = \omega_1^3 = 0, \omega_0^3 \neq 0$ , принадлежащего комплексу, а инварианты  $\xi_1, \xi_2$

являются соответственно радиусом кривизны  $\frac{1}{k_1}$  и произведением круче-

ния  $k_2$  и радиуса кривизны  $\frac{1}{k_1}$  ребра возврата центрального торса,

принадлежащего комплексу, определяемого уравнениями  $\omega_0^3 = \omega_1^3 = 0, \omega_0^2 \neq 0$  [2, с. 94].

### 3. Касательный и соприкасающийся линейный комплексы.

#### Две основные квадратичные формы комплекса

Найдем уравнение касательного линейного комплекса. Условие того, что линейный комплекс  $\sum p_{ij}q_{ij} = 0$  ( $p_{ij}$  – плюккеровы координаты прямой) содержит луч  $A_0A_1$  в терминах «плюккерова произведения»

$$Q^*(A_0A_1) = 0; Q\{q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{12}, q_{23}, q_{31}\}. \quad (3.1)$$

Откуда следует, что  $q_{23} = 0$ . Чтобы получить остальные условия на коэффициенты  $q_{ij}$ , продифференцируем (3.1):

$$Q^* \{ \omega_0^2(A_2 A_1) + \omega_0^3(A_3 A_1) + \eta \omega_0^3(A_0 A_2) + \omega_1^3(A_0 A_3) \} = 0.$$

Отсюда получаем  $q_{03} = q_{12} = q_{02} + \eta q_{31} = 0$ . Один коэффициент  $q_{01}$  остается произвольным. Следовательно, получился пучок линейных комплексов. Уравнение его в каноническом репере имеет вид

$$q_{01} p_{23} - \eta q_{31} p_{31} + q_{31} p_{02} = 0$$

или, если обозначить  $q_{31} : q_{01} = \lambda : \mu$ :

$$\lambda p_{23} - \mu \eta p_{31} + \mu p_{02} = 0. \quad (3.2)$$

Теперь будем искать линейный комплекс, касательный с комплексом в данном луче и соприкасающийся с некоторым регулюсом  $\omega_0^2 : \omega_0^3 : \omega_1^3$ , т.е. соприкасающийся линейный комплекс для регулюса комплекса. Для этого к условиям (3.1) и (3.2) присоединим условие

$$Q^* \{ (d^2 A_0, A_1) + 2(dA_0, dA_1) + (A_0, d^2 A_1) \} = 0.$$

В терминах канонического репера получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda:\mu} &\equiv 2\lambda \{ \omega_0^2 \omega_1^3 - \eta (\omega_0^3)^2 \} + \\ &\mu \{ \eta \omega_0^2 \omega_2^3 + \eta \omega_0^1 \omega_1^3 + d\eta \omega_0^3 + \omega_0^2 \omega_0^1 + \omega_1^3 \omega_2^3 \} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что для каждого регулюса  $\omega_0^2 : \omega_0^3 : \omega_1^3$  можно найти единственное значение  $\lambda : \mu$  из (3.3), т.е. в пучке (3.2) единственный соприкасающийся с ним линейный комплекс.

При  $\mu = 0$  получаем торсы

$$\Phi_1 \equiv \omega_0^2 \omega_1^3 - \eta (\omega_0^3)^2 = 0$$

а при  $\lambda = 0$  получаем регулюсы

$$\Phi_2 \equiv \eta \omega_0^2 \omega_2^3 + \eta \omega_0^1 \omega_1^3 + d\eta \omega_0^3 + \omega_0^2 \omega_0^1 + \omega_1^3 \omega_2^3 = 0,$$

или в каноническом репере

$$\begin{aligned} \Phi_2 &\equiv (\xi_1 - \eta \xi_2)(\omega_0^2)^2 + \eta^3 (\omega_0^3)^2 + (\eta \zeta_1 - \zeta_2)(\omega_1^3)^2 + \\ &+ 2(\eta_1 - \eta \eta_2) \omega_0^2 \omega_0^3 + (\eta \xi_1 - \xi_2) \omega_0^2 \omega_1^3 + (\eta \eta_1 - \eta_2) \omega_0^3 \omega_1^3. \end{aligned}$$

Таким образом, мы ввели в рассмотрение две основные квадратичные формы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  теории комплексов. Геометрическое значение сопряженности регулюсов относительно второй квадратичной формы  $\Phi_2$  такое же, как и в  $S_3^1$ , т.е. она характеризуется гармонической сопряженностью точек прикосновения одного из них с точками симметрии другого [2, с.96].

#### 4. Инфлекссионные центры

Найдем инфлекссионные центры образующей. Пусть  $M=A_0+tA_1$  – некоторая точка образующей, тогда условия неподвижности точки  $M$  будут иметь вид:

$$\omega_0^1 + t^2\omega_0^1 + dt = 0, \omega_0^2 + t\eta\omega_0^3 = 0, \omega_0^3 + t\omega_1^3 = 0. \quad (A)$$

Точке  $M$  в нормальной корреляции соответствует плоскость  $\Pi = -t\eta(A_0A_1A_2) + (A_0A_1A_3)$ . Отсюда

$$d\Pi = -t\eta\omega_2^3\Pi + (-d(t\eta) + \omega_2^3 - t^2\eta^2\omega_2^3)(A_0A_1A_2) + (\omega_1^2 + t\eta\omega_1^3)(A_0A_2A_3) - (\omega_0^2 + t\eta\omega_0^3)(A_1A_2A_3).$$

Условия неподвижности плоскости  $\Pi$  получаются в виде

$$\omega_2^3 - d(t\eta) - t^2\eta^2\omega_2^3 = 0, \omega_0^2 + t\eta\omega_0^3 = 0, \omega_0^3 + t\omega_1^3 = 0. \quad (B)$$

Вычитая из первого равенства (A) первое равенство (B) и учитывая второе и третье равенства (B), получаем следующее уравнение четвертой степени, определяющее инфлекссионные центры образующей

$$t^4\eta(\eta^2\xi_2 - \xi_1) + t^3(\eta_1(1 + \eta) - 2\eta^2\eta_2) + t^2(\eta^2\zeta_2 - \zeta_1 - \eta_3 - \eta(\xi_1 + \xi_2)) + t(\eta_1(1 + \eta) + 2\eta_2) - \zeta_1 - \zeta_2 = 0.$$

В общем случае этим уравнением определяется на каждой образующей четыре инфлекссионных центра.

Условия

$$\begin{aligned} \eta(\eta^2\xi_2 - \xi_1) &= \eta_1(1 + \eta) - 2\eta^2\eta_2 = \eta^2\zeta_2 - \zeta_1 - \eta_3 - \eta(\xi_1 + \xi_2) = \\ \eta_1(1 + \eta) + 2\eta_2 &= \zeta_1 + \zeta_2 = 0 \end{aligned}$$

характеризуют линейный комплекс.

#### 5. Некоторые частные классы комплексов

1. Специальный комплекс, т.е. комплекс нулевой кривизны  $\eta=0$ . Для этого комплекса главная корреляция вырождается и все связанные с ней понятия теряют смысл. Аналитическими следствиями уравнения  $\eta=0$  являются соотношения  $\zeta_1 - \xi_2 = 0, \eta_1 = 0, \eta_2 = 0$ , получающиеся из (1.2) и (1.3). Геометрически это означает, что центральный регулюс  $\omega_0^2 = \omega_1^3 = 0$  вырождается в пучок прямых, лежащих в плоскости  $A_0A_1A_3$  с центром в точке  $A_1$ . Широта класса равна одной функции двух аргументов.

2. Класс  $d\eta = 0$ , т.е. комплекс постоянной кривизны. Этот класс характеризуется тем, что точки симметрии гармонически делят центры луча [2]. Доказана теорема существования для этого класса. Так, комплексы постоянной кривизны существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Далее можно провести классификацию комплексов по инфлекссионным центрам.

### Заключение

Таким образом, нами рассмотрены комплексы прямых в трех неевклидовых пространствах  $S_3^1$ ,  ${}^{10}S_3^1$ ,  ${}^{01}S_3^1$  с проективной метрикой, комплексы прямых в пространстве  ${}^{11}S_3^1$  еще не изучены.

### Литература

1. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973. — 236 с.
2. Цыренова В. Б. Комплексы в трехмерном квазиэллиптическом пространстве // Геометр. сб., 25.— Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. — С. 91–100.
3. Цыренова В. Б., Проскурякова И. В. Комплексы в трехмерном квазигиперболическом пространстве // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2011. — №1.— С. 92–94.

### References

1. Shcherbakov R. N. *Osnovy metoda vneshnikh form i lineichatoi differentsial'noi geometrii* [Fundamentals of the Method of External Forms and Ruled Differential Geometry]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 1973. 236 p.
2. Tsyrenova V. B. Kompleksy v trekhmernom kvaziellipticheskom prostranstve [Complexes in Three-Dimensional Quasi-Elliptic Space]. *Geometricheskii sbornik – Geometric Collection*. 1985. No. 25. Pp. 91-100.
3. Tsyrenova V. B., Proskuryakova I. V. Kompleksy v trekhmernom kvazigiperbolicheskom prostranstve [Complexes in Three-Dimensional Quasi-Hyperbolic Space]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika – Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics*. 2011. No. 1. Pp. 92–94.

Цыренова Валентина Бабасановна, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, e-mail: [v.ts@mail.ru](mailto:v.ts@mail.ru)

Valentina B. Tsyrenova, PhD in Physics and Mathematics, DSc in Pedagogy, Professor, Department of Geometry and Methods of Teaching Mathematics, Buryat State University.

# УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

---

УДК 517.97

doi: 10.18101/2304-5728-2016-1-16-26

© А. С. Булдаев, К. А. Мижидон

## Задача построения управления линейной динамической системой по эталонному закону движения<sup>1</sup>

Рассмотрена задача оптимального управления линейной динамической системой с интегральным критерием качества, характеризующим отклонение закона движения системы от некоторого эталонного закона. Предложен подход к решению задачи, основанный на решении задачи математического программирования на первом промежутке постоянства управления и с одновременным нахождением точки переключения управления. Показано, как найти при этом подходе последующие точки переключения. При этом приведены все необходимые теоретические обоснования предложенного метода решения задачи.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, эталонный закон движения, интегральный критерий качества.

© A. S. Buldaev, K. A. Mizhidon

## The problem of construction control for linear dynamical system according to reference law of motion

The article deals with the problem of optimal control for linear dynamical system with an integral quality criterion characterizing law of motion deviation from some reference law. We proposed an approach to solution of the problem based on mathematical programming with control constancy on the first interval and with simultaneous detection of control switching point; and showed the ways to find the subsequent switching points. The theoretical justification of the proposed approach was presented.

**Keywords:** optimal control, reference law of motion, integral quality criterion.

### Введение

Постановка и решение рассмотренной в данной статье задачи построения управления связана с необходимостью решения одной из типовых задач проектирования виброзащитных систем (ВЗС) [1].

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 15-01-03680-а, № 15-41-04020-р\_сибирь\_а; МОН РФ, проект №3808



При проектировании ВЗС, как правило, задается совокупность требований, предъявляемых к системе виброзащиты, отражаемая в техническом задании.

Требования, предъявляемые к ВЗС при проектировании, являются противоречивыми. С одной стороны, ВЗС должна обеспечивать заданное снижение уровня динамических воздействий до заданного уровня, а с другой - должна иметь ограниченные габаритные размеры. В условиях, когда заданы количественные характеристики этих требований, представляют интерес задачи об оценке предельных возможностей виброзащиты [2], решение которых, не рассматривая вопроса о физической реализуемости, позволяют оценить тот предел, к которому следует стремиться при проектировании системы виброзащиты. К задачам об оценке предельных возможностей можно отнести задачу построения эталонного закона функционирования системы, т.е. такого закона движения объекта защиты, который удовлетворял бы всем требованиям, предъявляемым к функционированию ВЗС [1]. Построению эталонного закона функционирования динамических систем были посвящены работы [3-5]. В этих работах рассматривались задачи управления линейной динамической системой, в которой основной целью управления являлось удержание системы в фазовых ограничениях при заданном внешнем детерминированном возмущении [5], в частности, в [3,4] задача рассматривалась при полигармоническом возмущении. В работе [6] рассматривалась задача оптимального управления линейной системой при фазовых и смешанных ограничениях при минимуме энергетических затрат, которую также можно рассматривать как задачу построения эталонного закона движения. В практике проектирования ВЗС вызывает интерес задача построения управляющих воздействий, формируемых активными элементами виброзащиты, реализующих некоторый эталонный закон движения. Данная задача может быть поставлена, как задача оптимального управления линейной системой.

В рассматриваемой работе предлагается подход к построению управления линейной динамической системой по критерию близости реального закона движения к эталонному закону.

### **1. Постановка задачи**

Рассмотрим линейную управляемую систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (1)$$

где  $x$  -  $n$ -мерный вектор фазовых координат системы;  $u$  -  $r$ -мерный вектор управления;  $A$  - постоянная  $(n \times n)$  - матрица;  $B$  - постоянная  $(n \times r)$  - матрица,  $f(t)$  -  $n$ -мерный вектор внешних возмущений. Вектор-функция  $f(t)$  является непрерывной, ограниченной функцией при любом  $t \in T = [t_0, t_1]$ .

Система управляется на временном промежутке  $t \in T$ . При этом до-

пустимыми управлениями  $u(t)$  являются кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие

$$u(t) \in U = \{u(\cdot) \in KC_T^r : |u_i(t)| \leq l_i, \quad i = 1, 2, \dots, r\}, \quad t \in T. \quad (2)$$

Пусть задан эталонный закон движения  $x^3(t)$ , удовлетворяющий в момент времени  $t = t_0$  начальным условиям  $x^3(t_0) = x^0$ .

Требуется определить допустимое управление  $u^*(t) \in U, \quad t \in T$ , доставляющее минимум функционалу

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \|x(t) - x^3(t)\|^2 dt. \quad (3)$$

Здесь под интегралом  $\|\cdot\|$  - евклидова норма. Функционал (3) назовем критерием близости реального закона движения к эталонному закону.

## 2. Обсуждение решения задачи

Задача оптимального управления (1)-(3) является линейно-выпуклой задачей, поэтому принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности.

Функция Понтрягина для задачи(1)-(3) имеет вид

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u, t) &= \psi^T(t)(Ax(t) + Bu(t) + f(t)) - \frac{1}{2} \|x(t) - x^3(t)\|^2 = \\ &= \psi^T(t)(Ax(t) + Bu(t) + f(t)) - \frac{1}{2} (x^T(t)x(t) - 2x^T(t)x^3(t) + x^{3T}(t)x^3(t)), \end{aligned}$$

где  $\psi(t)$  - сопряженная функция.

Запишем исходную систему (1) и сопряженную систему в виде одной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(t), \\ \dot{\psi} = x - A^T\psi - x^3(t). \end{cases} \quad (4)$$

В силу структуры задания множества допустимых управлений (2) максимум функции Понтрягина достигается при кусочно-постоянных управлениях, при этом оптимальное управление определяется следующим образом

$$u^*(t): \quad u_k^*(t) = \begin{cases} l_k, & [B^T\psi(t)]_k > 0, \\ -l_k, & [B^T\psi(t)]_k < 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad t \in T.$$

Моменты времени, в которых функции  $[B^T\psi(t)]_k$  обращаются в нуль, соответствуют точкам переключения управления. Отрезок  $T$  разобьем на  $N$  частичных интервалов точками переключения управления

$$\tau_0 = t_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N-1}, \tau_N = t_1.$$

Будем считать, что на каждом частичном отрезке  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  допустимое управление  $u(t)$  является постоянным

$$u(t) = v^i, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad v^i \in U \quad (i=0, 1, \dots, N-1).$$

Таким образом, каждому допустимому управлению  $u(t) \in U$ ,  $t \in T$  соответствует набор векторов  $u(\cdot) \leftrightarrow \{v^0, v^1, \dots, v^{N-1}\}$ , где  $k$ -ая компонента вектора  $v^i$ ,  $(i=0, 1, \dots, N-1)$  принимает значение  $l_k$  или  $-l_k$ .

Участки траекторий  $x(t, v^0)$ ,  $x(t, v^0, v^1)$ , ...,  $x(t, v^0, v^1, \dots, v^{N-1})$ , соответствующие частичным отрезкам вычисляются последовательным решением задачи Коши для системы

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + f(t)$$

на каждом интервале разбиения  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ ,  $(i=0, 1, \dots, N-1)$ . При этом для каждого момента  $\tau_0 = t_0$ ,  $\tau_1, \dots, \tau_{N-1}, \tau_N = t_1$  справедливо

$$\begin{aligned} x(t_0, v^0) = x^0, \quad x(\tau_1, v^0) = x(\tau_1, v^0, v^1) = x^1, \dots, \\ \dots, \quad x(\tau_{N-1}, v^0, v^1, \dots, v^{N-2}) = x(\tau_{N-1}, v^0, v^1, \dots, v^{N-1}) = x^{N-1}, \\ x(t_1, v^0, v^1, \dots, v^{N-1}) = x(\tau_N, v^0, v^1, \dots, v^{N-1}) = x^N. \end{aligned}$$

Введя обозначения:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ E & -A^T \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(t) = \begin{pmatrix} Bu(t) + f(t) \\ -x^3(t) \end{pmatrix},$$

запишем систему (4) в виде

$$\dot{y} = \tilde{A}y + \tilde{f}(t).$$

Фундаментальную матрицу  $F(t, \tau)$  однородной системы, соответствующей системе (4), представим в виде блоков

$$F(t, \tau) = \begin{pmatrix} F_{11}(t, \tau) & F_{12}(t, \tau) \\ F_{21}(t, \tau) & F_{22}(t, \tau) \end{pmatrix}.$$

Решение задачи Коши системы (4) при начальном условии  $x(t_0) = x^0$  и при некотором  $\psi(t_0) = \psi^0$  согласно формуле Коши запишется в виде

$$\begin{cases} x(t) = F_{11}(t, t_0)x^0 + F_{12}(t, t_0)\psi^0 + \\ \quad + \int_{t_0}^t (F_{11}(t, \tau)(Bu(\tau) + f(\tau)) - F_{12}(t, \tau)x^3(\tau))d\tau, \\ \psi(t) = F_{21}(t, t_0)x^0 + F_{22}(t, t_0)\psi^0 + \\ \quad + \int_{t_0}^t (F_{21}(t, \tau)(Bu(\tau) + f(\tau)) - F_{22}(t, \tau)x^3(\tau))d\tau. \end{cases} \quad (5)$$

Нетрудно показать, что

$$F_{11}(t, \tau) = \bar{F}(t, \tau), \quad F_{12}(t, \tau) \equiv 0, \quad F_{22}(t, \tau) = \bar{F}^T(\tau, t), \quad (6)$$

где  $\bar{F}(t, \tau)$  - фундаментальная матрица однородной системы дифференциальных уравнений  $\dot{x} = Ax$ .

При выборе некоторого набора векторов  $\{v^0, v^1, \dots, v^{N-1}\}$  участки траекторий  $x(t, v^0)$ ,  $x(t, v^0, v^1)$ , ...,  $x(t, v^0, v^1, \dots, v^{N-1})$ , соответствующие частичным интервалам  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ , ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ ) согласно формуле Коши соответственно запишутся следующим образом

$$\begin{cases} x(t, v^0) = \bar{F}(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t \bar{F}(t, s)(Bv^0 + f(s))ds, \\ x(t, v^0, \dots, v^k) = \bar{F}(t, t_0)x^0 + \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \bar{F}(t, \tau)(Bv^i + f(\tau))d\tau + \\ + \int_{\tau_k}^t \bar{F}(t, s)(Bv^{N-1} + f(s))ds, \quad (k = 1, 2, \dots, N-1). \end{cases}$$

### 3. К нахождению точек переключения управления

Пусть все точки переключения  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i$  определены. Найдем следующую точку переключения  $\tau_{i+1}$ . Для этого рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления на временном отрезке  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + f(t), & x(\tau_i) = x^i, \\ u(t): \quad |u_k^i(t)| \leq l_k, \quad (k = 1, 2, \dots, r), \\ J(u(\cdot)) = \frac{1}{2} \|x(\tau_{i+1}) - x^3(\tau_{i+1})\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|x(t) - x^3(t)\|^2 dt \rightarrow \min_v, \end{cases} \quad (7)$$

где конечный момент времени  $\tau_{i+1}$ , подлежащий определению, такой, что оптимальное управление в задаче (7) принимает постоянное значение  $v^{i*}$  на интервале  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ , и в момент времени  $\tau_{i+1}$  по крайней мере одна из компонент управления меняет знак.

Для задачи (7) краевая задача принципа максимума запишется следующим образом

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bv^i + f(t), & x(\tau_i) = x^i, \\ \dot{\psi} = x - A^T \psi - x^3(t), & \psi(\tau_{i+1}) = -x(\tau_{i+1}) + x^3(\tau_{i+1}). \end{cases} \quad (8)$$

Здесь  $v^i$  - постоянный вектор.

При некотором начальном условии  $\psi(\tau_i) = \psi^i$  решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bv^i + f(t), & x(\tau_i) = x^i, \\ \dot{\psi} = x - A^T \psi - x^3(t), & \psi(\tau_i) = \psi^i, \end{cases}$$

согласно (5)-(6) запишется в виде (9)-(10)

$$x(t) = \bar{F}(t, \tau_i)x^i + \int_{\tau_i}^t \bar{F}(t, \tau)(Bv^i + f(\tau))d\tau, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \psi(t) = & F_{21}(t, \tau_i)x^i - \bar{F}^T(\tau_i, t)\psi^i + \\ & + \int_{\tau_i}^t (F_{21}(t, \tau)(Bv^i + f(\tau) - \bar{F}^T(\tau, t)x^i(\tau))d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу условия на правом конце в краевой задаче (8) и представления решения (10) имеем

$$\begin{aligned} \psi(\tau_{i+1}) = & F_{21}(\tau_{i+1}, \tau_i)x^i - \bar{F}^T(\tau_i, \tau_{i+1})\psi^i + \\ & + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (F_{21}(\tau_{i+1}, \tau)(Bv^i + f(\tau) - \bar{F}^T(\tau, \tau_{i+1})x^i(\tau))d\tau = -x(\tau_{i+1}) + x^i(\tau_{i+1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Используя представление решения (9), подставим  $x(\tau_{i+1})$  в (11)

$$\begin{aligned} \psi(\tau_{i+1}) = & F_{21}(\tau_{i+1}, \tau_i)x^i - \bar{F}^T(\tau_i, \tau_{i+1})\psi^i + \\ & + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (F_{21}(\tau_{i+1}, \tau)(Bv^i + f(\tau) - \bar{F}^T(\tau, \tau_{i+1})x^i(\tau))d\tau_{i+1} = \\ = & -\bar{F}(\tau_{i+1}, \tau_i)x^i - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \bar{F}(\tau_{i+1}, \tau)(Bv^i + f(\tau))d\tau + x^i(\tau_{i+1}). \end{aligned}$$

Отсюда найдем  $\psi^i$

$$\begin{aligned} \psi^i = & (\bar{F}^T(\tau_i, \tau_{i+1}))^{-1} \left[ F_{21}(\tau_{i+1}, \tau_i)x^i + \bar{F}(\tau_{i+1}, \tau_i)x^i + \right. \\ & + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (F_{21}(\tau_{i+1}, \tau)(Bv^{iT} + f(\tau) - \bar{F}^T(\tau, \tau_{i+1})x^i(\tau))d\tau + \\ & \left. + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \bar{F}(\tau_{i+1}, \tau)(Bv^i + f(\tau))d\tau - x^i(\tau_{i+1}) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, решения  $\psi(t)$  краевой задачи (8) при некотором управлении, принимающем постоянные значения  $v^i$ , может быть представлено в виде (10), где  $\psi^i$  определяется выражением (12).

Отметим, момент времени  $\tau_{i+1}$  является точкой переключения оптимального управления в задаче (1)-(3), если выполняются условия:

1) На интервале  $[\tau_i, \tau_{i+1})$  вектор-функция  $B^T\psi(t)$ , где  $\psi(t)$  определяется выражением

$$\begin{aligned}
 B^T \psi(t) = & B^T \left( F_{21}(t, \tau_i) x^i - \bar{F}^T(\tau_i, t) (\bar{F}^T(\tau_i, \tau_{i+1}))^{-1} \left[ F_{21}(\tau_{i+1}, \tau_i) x^i + \bar{F}(\tau_{i+1}, \tau_i) x^i + \right. \right. \\
 & + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (F_{21}(\tau_{i+1}, \tau) (Bv^{i*} + f(\tau)) - \bar{F}^T(\tau, \tau_{i+1}) x^3(\tau)) d\tau + \\
 & \left. \left. + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \bar{F}(\tau_{i+1}, \tau) (Bv^{i*} + f(\tau)) d\tau - x^3(\tau_{i+1}) \right] + \right. \\
 & \left. + \int_{t_0}^t (F_{21}(t, \tau) (Bv^{i*} + f(\tau)) - \bar{F}^T(\tau, t) x^3(\tau)) d\tau \right). \tag{13}
 \end{aligned}$$

не меняет знак. В (13) вектор  $v^{i*}$  определяет на интервале  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  оптимальное управление  $u^*(t)$  в задаче (1)-(3).

2) При переходе через точку  $t = \tau_{i+1}$ , по крайней мере, одна из компонент вектор-функции  $B^T \psi(t)$  меняет знак на противоположный.

**Теорема 1.** Вектор  $v^{i*}$  - решение задачи математического программирования

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bv^i + f(t), & x(\tau_i) = x^i, \\ v^i \in V = \{v^i \in E^r : |v_k^i| \leq l_k, (k = 1, 2, \dots, r)\}, \\ J(v^i) = \frac{1}{2} \|x(\bar{\tau}) - x^3(\bar{\tau})\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\tau_i}^{\bar{\tau}} \|x(t) - x^3(t)\|^2 dt \rightarrow \min_{v^i \in V}, \end{cases} \tag{14}$$

будет вектором, определяющим оптимальное управление  $u^*(t)$  в задаче (1)-(3) на интервале  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ , где момент  $\tau_{i+1} \geq \bar{\tau}$  такой, что для вектора  $v^{i*}$  выполняются приведенные выше условия 1) и 2).

**Доказательство.** Для доказательства достаточно показать, что компоненты решения  $v^{i*}$  принимают значения  $l_k$  или  $-l_k$ . Используя при некотором постоянном  $v^i$ , представление решения задачи Коши в виде (9), можно задачу (14) свести к задаче минимизации выпуклой квадратичной функции  $\varphi(v^i)$  на параллелепипеде. Для данной задачи необходимым и достаточным условием минимума является выполнение неравенства [7]

$$((\nabla \varphi(v^{i*}), v^i - v^{i*}) \geq 0, \text{ при любом } v^i \in U. \tag{15}$$

В силу структуры допустимого множества  $U$  рассматриваемой задачи из (15) следует, что

$$v_k^{i*} = \begin{cases} l_k, & \frac{\partial \varphi}{\partial v_k^i}(v^{i*}) > 0, \\ -l_k, & \frac{\partial \varphi}{\partial v_k^i}(v^{i*}) < 0. \end{cases}$$

Теорема доказана.

#### 4. Алгоритм решения задачи

Процедура решения задачи состоит из следующих этапов.

1. Задав  $\bar{\tau} > t_0$ , находим решение  $v^{0*}$  задачи математического программирования

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bv^0 + f(t), & x(t_0) = x^0, \\ v^0 \in V = \{v^0 \in E^r : |v_k^0| \leq l_k, (k = 1, 2, \dots, r)\}, \\ J(v^i) = \frac{1}{2} \|x(\bar{\tau}) - x^3(\bar{\tau})\|^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\bar{\tau}} \|x(t) - x^3(t)\|^2 dt \rightarrow \min_{v^i \in V}. \end{cases} \quad (16)$$

2. Проверяем на отрезке  $[t_0, \bar{\tau}]$  знак вектор функции  $B^T \psi(t)$ :

$$\begin{aligned} B^T \psi(t) = B^T \left( F_{21}(t, t_0)x^0 - \bar{F}^T(t_0, t)(\bar{F}^T(t_0, \bar{\tau}))^{-1} \left[ F_{21}(\bar{\tau}, t_0)x^i + \bar{F}(\bar{\tau}, t_0)x^i + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{t_0}^{\bar{\tau}} (F_{21}(\bar{\tau}, \tau)(Bv^{0*} + f(\tau)) - \bar{F}^T(\tau, \bar{\tau})x^3(\tau))d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{t_0}^{\bar{\tau}} \bar{F}(\bar{\tau}, \tau)(Bv^{0*} + f(\tau))d\tau - x^3(\bar{\tau}) \right] + \right. \\ \left. \left. + \int_{t_0}^t (F_{21}(t, \tau)(Bv^{0*} + f(\tau)) - \bar{F}^T(\tau, t)x^3(\tau))d\tau \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $\psi(t)$  определено согласно (13), где  $\tau_i = t_0$ ,  $\tau_{i+1} = \bar{\tau}$ ,  $x^i = x^0$ ,  $v^i = v^{0*}$ .

Если функция  $B^T \psi(t)$  не сохраняет знак на  $[t_0, \bar{\tau}]$ , то решаем задачу математического программирования (16) с уменьшенным значением  $\bar{\tau} = \bar{\tau} - \Delta\tau$ . Задача (16) решается до тех пор, пока не будет найдено значение  $\bar{\tau}$ , при котором функция  $B^T \psi(t)$  сохраняет знак на  $[t_0, \bar{\tau}]$ .

3. Пусть при управлении  $v^{0*}$  функция  $B^T \psi(t)$  сохраняет знак на промежутке  $[t_0, \bar{\tau}]$ .

а) Примем в (17)  $\bar{\tau} = \bar{\tau} + \Delta\tau$ .

б) Проверяем знак вектор функции  $B^T \psi(t)$  на  $[t_0, \bar{\tau}]$ . Если сохраняется, то переходим в а). Если не сохраняется, принимаем  $\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{2}$  и переходим в а).

Пункты а) и б) повторяются до тех пор, пока не будет найдена первая точка переключения управления  $\tau_1 = \bar{\tau} < t_1$  и в соответствии с ней оптимальный вектор  $v^{1*}$ .

4. Пусть найдена  $i$ -ая точка переключения  $\tau_i$  и оптимальный вектор  $v^{i*}$ . Для нахождения  $\tau_{i+1}$  и  $v^{i+1*}$  применяется аналогичная пунктам а) и б) предыдущего этапа процедура проверки знака вектор-функции  $B^T \psi(t)$  на  $[\tau_i, \bar{\tau}]$ . При этом вектор-функции  $B^T \psi(t)$  определяются следующим образом

$$B^T \psi(t) = B^T \left( F_{21}(t, \tau_i) x^i - \bar{F}^T(\tau_i, t) (\bar{F}^T(\tau_i, \bar{\tau}))^{-1} \left[ F_{21}(\bar{\tau}, \tau_i) x^i + \bar{F}(\bar{\tau}, \tau_i) x^i + \int_{\tau_i}^{\bar{\tau}} (F_{21}(\bar{\tau}, \tau) (Bv^{i*} + f(\tau)) - \bar{F}^T(\tau, \bar{\tau}) x^3(\tau)) d\tau + \int_{\tau_i}^{\bar{\tau}} \bar{F}(\bar{\tau}, \tau) (Bv^{i*} + f(\tau)) d\tau - x^3(\bar{\tau}) \right] + \int_{t_0}^t (F_{21}(t, \tau) (Bv^{i*} + f(\tau)) - \bar{F}^T(\tau, t) x^3(\tau)) d\tau \right).$$

### Заключение

Предложен подход к решению задачи, основанный на решении задачи математического программирования на первом промежутке постоянства управления и с последующим нахождением точек переключения управления. При реализации данного подхода возникает необходимость вычисления фундаментальной матрицы  $F(t, \tau)$ . Для этого следует воспользоваться представлением фундаментальной матрицы в виде матричной экспоненты  $F(t, \tau) = e^{\tilde{A}(t-\tau)}$ , которая в свою очередь представима в виде матричного ряда

$$F(t, \tau) = e^{\tilde{A}(t-\tau)} = E + \tilde{A}(t-\tau) + \frac{1}{2!} \tilde{A}^2(t-\tau)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \tilde{A}^k(t-\tau)^k + \dots \quad (18)$$

Для приближенного вычисления блоков матрицы  $F(t, \tau)$  согласно (18) суммы ряда следует ограничивать конечным числом членов ряда, когда добавление нового члена ряда изменяет каждый элемент частичной суммы меньше, чем на заданную точность.

### Литература

1. Миждон А. Д., Елтошкина Е. В., Имышелова М. Б. Типовые задачи автоматизации проектирования виброзащитных систем и их алгоритмическое обеспечение // Вестник ВСГУТУ. — 2012. — № 4(39). — С. 6–12.
2. Миждон А. Д. Об оценке предельных возможностей виброзащитных систем // Автоматика и телемеханика. — 2009. — №4. — С. 149–162.
3. Миждон А. Д., Миждон К. А. К построению эталонного закона движения динамических систем // Сборник XII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-14. Институт проблем управления им. Трапезникова РАН. — 2014. — С. 193–199.



4. Миждон А. Д., Миждон К. А. Задача удержания системы в фазовых ограничениях при постоянно действующих возмущениях // Обобщенные постановки и решения задач управления. Сборник трудов международного симпозиума. — 2014. — С. 124–128.

5. Миждон А. Д., Миждон К. А. Об одном подходе к нахождению управления, обеспечивающего выполнение фазовых ограничений в линейной задаче управления // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 17. — С. 3–17.

6. Миждон А. Д., Миждон К. А. Задача оптимального управления линейной системой при фазовых и смешанных ограничениях // Вестник Бурятского государственного университета. — 2013. — №9. — С. 17–24.

7. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. — М.: Наука, 1986. — 328 с.

### References

1. Mizhidon A. D., Eltoshkina E. V., Imykheleva M. B. Tipovye zadachi avtomatizatsii proektirovaniya vibrozashchitnykh sistem i ikh algoritmicheskoe obespechenie [Typical Automation Problems of Vibration Isolation Systems Design and Their Algorithmic Support]. *Vestnik VSGUTU – Bulletin of ESSUTM*. 2012. No. 4 (39). Pp. 6–12.

2. Mizhidon A. D. Ob otsenke predel'nykh vozmozhnostei vibrozashchitnykh sistem [Evaluation of the Limiting Possibilities of Vibration Isolation Systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Telecontrol*. 2009. No. 4. Pp. 149–162.

3. Mizhidon A. D., Mizhidon K. A. *K postroeniyu etalonnogo zakona dvizheniya dinamicheskikh sistem* [Construction of Reference Law of Motion for Dynamical Systems]. Proc. 12<sup>th</sup> All-Rus. Conf. on Control Problems. Moscow: Trapeznikov Institute of Control Problems RAS. 2014. Pp. 193–199.

4. Mizhidon A. D., Mizhidon K. A. Zadacha uderzhaniya sistema v fazovykh ogranicheniyakh pri postoyanno deistvuyushchikh vozmushcheniyakh [The Problem of Keeping System in Phase Constraints under Constantly Acting Perturbations]. *Obobshchennyye postanovki i resheniya zadach upravleniya. Sbornik trudov mezhdunarodnogo simpoziuma – Generalized Formulations and Solutions of Control Problems*. Proc. Int. symp. 2014. Pp. 124–128.

5. Mizhidon A. D., Mizhidon K. A. Ob odnom podkhode k nakhozheniyu upravleniya, obespechivayushchego vypolnenie fazovykh ogranichenii v lineinoy zadache upravleniya [The Approach to Control Determination that Ensures Phase Constraints in a Linear Control Problem]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Telecontrol*. 2015. No. 17. Pp. 3–17.

6. Mizhidon A. D., Mizhidon K. A. Zadacha optimal'nogo upravleniya lineinoy sistemoy pri fazovykh i smeshannykh ogranicheniyakh [A Problem of Linear System Optimal Control under Phase and Mixed Constraints]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2013. No. 9. Pp. 17–24.

7. Sukharev A. G., Timokhov A. V., Fedorov V. V. *Kurs metodov optimi-*

---

*zatsii* [A Course of Optimization Methods]. Moscow: Nauka Publ., 1986. 328 p.

*Булдаев Александр Сергеевич*, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, e-mail: buldaev@mail.ru.

*Мижидон Клара Арслановна*, преподаватель кафедры прикладной математики Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: migka@mail.ru.

*Aleksandr S. Buldaev*, DSc in Physics and Mathematics, Professor, Department of Applied Mathematics, Buryat State University.

*Klara A. Mizhidon*, Lecturer, Department of Applied Mathematics, East-Siberian State University of Technology and Management.

УДК 517.977

doi: 10.18101/2304-5728-2016-1-27-37

© *И. В. Расина, И. С. Гусева, О. В. Фесько, О. В. Усенко*

### **Метод локального улучшения управления для неоднородных дискретных систем<sup>1</sup>**

При изучении неоднородных управляемых систем различными школами и направлениями основной упор сделан на непрерывные системы с изменяющейся во времени структурой. Для них получены необходимые и достаточные условия, а также итерационные процедуры. Один из подходов состоит в обобщении на такие системы достаточных условий оптимальности Кротова. На этой основе построена иерархическая модель неоднородной управляемой структуры, в которой нижний уровень представляет собой описания однородных процессов на отдельных этапах, а верхний уровень связывает эти описания в единый процесс и управляет функционированием всей системы в целом. В различных задачах управления, в частности в задачах оптимизации, оба уровня рассматриваются во взаимодействии.

В работе рассматривается класс неоднородных дискретных систем, для которого оба уровня – дискретные. Такие системы широко распространены на практике, а также получаются в процессе дискретизации непрерывных систем при решении задач оптимизации итерационными методами. Для указанного класса формулируются достаточные условия оптимальности типа Кротова. Эти условия и принцип локализации используются для построения метода улучшения. Приводится иллюстративный пример.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, дискретные системы, приближенные методы улучшения управления.

© *I. V. Rasina, I. S. Guseva, O. V. Fesko, O. V. Usenko*

### **Method of control local improvement for non-homogeneous discrete systems**

In studying of non-homogeneous control systems by different schools the main attention is paid to continuous systems with time-varying structure. The necessary and sufficient conditions, as well as iterative procedures have been obtained for them. One of the approaches is to generalize the sufficient conditions for optimality of Krotov type on such systems. On this basis a non-homogeneous hierarchical model of controlled structure have been developed in which the lower level is a description of similar processes at different stages,

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 15-01-01915-а, № 15-01-01923-а, № 15-07-09091-а, № 15-01-03680-а; МОН РФ, проект № 3808

and the upper level connects these descriptions into a single process, and controls the functioning of the system in whole. In various control problems, in particular in optimization problems, both levels are considered in interaction.

We have considered the class of non-homogeneous discrete systems for which both levels are discrete. These systems are prevalent in practice and can be obtained from the process of continuous systems digitalization for solution of optimization problems using iterative methods. We have formulated the sufficient conditions of optimality of Krotov type for this class of systems. These conditions and the principle of localization are used to construct improvement method. The article contains illustrative examples.

**Keywords:** optimal control, discrete systems, approximate methods of control improvement.

### Введение

В теории оптимального управления накоплено большое количество теоретических результатов, а также разнообразных итерационных методов.

Однако следует заметить, что подавляющее большинство разработанных точных и приближенных методов относится к системам с непрерывным временем. Для общих систем с дискретным временем, в особенности нелинейных, их арсенал оказывается значительно беднее. Основная причина такого положения – отсутствие в общем случае дискретного аналога принципа максимума Понтрягина для непрерывных систем, с которым долгое время связывались многие теоретические работы в области оптимального управления, основанные на методе вариаций и необходимых условиях оптимальности. Об этом, в частности, свидетельствуют, известные работы по дискретным системам [1-3].

Дискретные модели привлекали внимание исследователей главным образом возможностью применения методов нелинейного программирования к решению задач оптимального управления, в том числе – непрерывных с помощью частичной или полной дискретизации задачи по управлению и состоянию [1-5].

Хотя изучение неоднородных управляемых систем [6-10] началось еще с 70-х годов прошлого века, речь в основном идет о непрерывных системах. Дискретные неоднородные системы практически не изучены.

В работе рассматривается класс неоднородных дискретных управляемых систем, как продолжение исследований для непрерывных систем той же структуры.

Один из возможных подходов состоит в обобщении для них достаточных условий оптимальности Кротова [11]. За основу взята абстрактная динамическая система как многошаговая, операторы которой на разных шагах допускают различную интерпретацию [12]. В [6, 13, 14] предложена и развита математическая модель дискретно-непрерывной системы (ДНС) в виде конкретизации указанной абстрактной модели [12], применимая для широкого класса задач управления неоднородными процессами

ми, и для нее получен аналог достаточных условий Кротова для непрерывных и дискретных систем. При таком подходе строится иерархическая модель, в которой нижний уровень представляет собой описания однородных процессов на отдельных этапах, а верхний уровень связывает эти описания в единый процесс и управляет функционированием всей системы в целом. В различных задачах управления, в частности в задачах оптимизации, оба уровня рассматриваются во взаимодействии.

В данной работе рассматривается модель, в которой, и на нижнем уровне, действуют дискретные управляемые системы (НДС) [14]. Такие системы могут рассматриваться как самостоятельные «дискретно-дискретные», так и в качестве вспомогательных для НДС с учетом естественной дискретизации непрерывных подсистем в реальных вычислениях.

Для неоднородных дискретных систем (НДС) строится метод локального улучшения управления. В основу построений положены достаточные условия оптимальности типа Кротова, представленные далее, и принцип локализации [15]. Рассматривается иллюстративный пример.

### 1. Неоднородные дискретные процессы и основные конструкции

Рассмотрим подробнее важное приложение иерархического принципа как прямой аналог динамической НДС – двухуровневую модель, в которой нижний уровень составляют дискретные динамические системы однородной структуры. На верхнем уровне фигурирует дискретная модель общего вида

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(k, x(k), u(k)), \\ k \in \mathbf{K} &= \{k_I, k_I + 1, \dots, k_F\}, \quad u \in \mathbf{U}(k, x), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k$  – номер шага (этапа),  $x$  и  $u$  – соответственно переменные состояния и управления произвольной природы (возможно различной) для различных  $k$ ,  $\mathbf{U}(k, x)$  – заданное при каждом  $k$  и  $x$  множество.

На некотором подмножестве  $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$ ,  $k_F \notin \mathbf{K}'$ ,  $u(k)$  интерпретируется как пара  $(u^v(k), m^d(k))$ , где  $m^d(k)$  – процесс  $(x^d(k, t), u^d(k, t))$ ,  $t \in \mathbf{T}(k, z(k))$ ,  $m^d(k) \in \mathbf{D}^d(k, z(k))$ , а  $\mathbf{D}^d$  – множество допустимых процессов  $m^d$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{aligned} x^d(k, t+1) &= f^d(k, z, t, x^d(k, t), u^d(k, t)), \\ t \in \mathbf{T} &= \{t_I(z), t_I(z) + 1, \dots, t_F(z)\}, \\ x^d &\in \mathbf{X}^d(k, z, t), \quad u^d \in \mathbf{U}^d(k, z, t, x^d), \quad z = (k, x, u^v). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{X}^d(k, z, t), \mathbf{U}^d(k, z, t, x^d)$  – заданные при каждом  $t$ ,  $z$  и  $x^d$  множества.

Оператор правой части (1) сводится к следующему:

$$f(k, x, u) = \theta(z, \gamma^d(z)), \quad \gamma^d = (t_I, x_I^d, t_F, x_F^d) \in \Gamma^d(k, z),$$

$$\Gamma^d(z) = \{\gamma^d : t_I = \tau(k, z), t_F = \vartheta(k, z), x_I^d = \xi(k, z), x_F^d \in \Gamma_F^d(k, z)\}.$$

На множестве  $\mathbf{D}$  процессов

$$m = (x(k), u(k), x^d(k, t), u^d(k, t)),$$

удовлетворяющих (1), (2), рассматривается задача оптимального управления о минимизации конечного функционала  $I = F(x(k_F))$  при фиксированных  $k_I = 0, k_F, x(k_I)$  и дополнительных ограничениях  $x(k) \in \mathbf{X}(k)$ .

Для решения этой задачи вводится множество  $\mathbf{E}$  процессов  $m$ , где исключены дискретные цепочки, и обобщенный лагранжиан по аналогии с лагранжианом для ДНС [13, 14]:

$$\begin{aligned} L &= G(x(k_F)) - \sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F} R(k, x(k), u(k)) + \\ &+ \sum_{\mathbf{K}'} (G^d(z) - \sum_{\mathbf{T}(z) \setminus t_F} R^d(z, t, x^d(k, t), u^d(k, t))), \\ G(x) &= F(x) + \varphi(k_F, x) - \varphi(k_I, x(k_I)), \\ R(k, x, u) &= \varphi(k+1, f(k, x, u)) - \varphi(k, x), \\ G^d(k, z, \gamma^d) &= -\varphi(k+1, \theta(k, z, \gamma^d)) + \varphi(k, x(k)) + \\ &+ \varphi^d(k, z, t_F, x_F^d) - \varphi^d(k, z, t_I, x_I^d), \\ R^d(k, z, t, x^d, u^d) &= \varphi^d(k, z, t+1, f^d(k, z, t, x^d, u^d)) - \varphi^d(k, z, t, x^d), \\ \mu^d(k, z, t) &= \sup \{R^d(k, z, t, x^d, u^d) : x^d \in \mathbf{X}^d(k, z, t), u^d \in \mathbf{U}^d(k, z, t, x^d)\}, \\ l^d(k, z) &= \inf \{G^d(k, z, \gamma^d) : (\gamma^d) \in \Gamma^d(k, z), x^d \in \mathbf{X}^d(k, z, t_F)\}. \\ \mu(k) &= \begin{cases} \sup \{R(k, x, u) : x \in \mathbf{X}(k), u \in \mathbf{U}(k, x)\}, & t \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \\ -\inf \{l^d(z) : x \in \mathbf{X}(k), u^v \in \mathbf{U}^v(k, x)\}, & k \in \mathbf{K}', \end{cases} \\ l &= \inf \{G(x) : x \in \Gamma \cap \mathbf{X}(k_F)\}. \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi(k, x)$  – произвольный функционал,  $\varphi^d(k, z, t, x^d)$  – произвольное параметрическое семейство функционалов (с параметрами  $k, z$ ).

Легко убедиться, что  $L(m) = I(m)$  при  $m \in \mathbf{D}$ , т.е. при выполнении отброшенных связей  $L(m)$  совпадает с  $I(m)$ . Действительно, при  $m \in \mathbf{D}$ , как видно,

$$\begin{aligned} R &= \varphi(k+1, x(k+1)) - \varphi(k, x), \\ R^d &= \varphi^d(k, z, t+1, x^d(t+1)) - \varphi^d(k, z, t, x^d), \\ L &= F(x(k_F)) + \sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}'} (\varphi(k, x) - \varphi(k, x)) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\mathbf{K}'} \left( \sum_{\mathbf{T}(k,z)} (\varphi^d(k,z,t,x^d) - \varphi^d(k,z,t,x^d)) \right).$$

Отсюда непосредственно следуют теоремы, аналогичные теоремам для ДНС [13, 14].

**Теорема 1.** Для любого элемента  $m \in \mathbf{D}$  и любых  $\varphi, \varphi^d$  имеет место оценка

$$I(m) - \inf_{\mathbf{D}} I \leq \Delta = I(m) - l.$$

Пусть имеются два процесса  $m^I \in \mathbf{D}$ ,  $m^{II} \in \mathbf{E}$  и функции  $\varphi$  и  $\varphi^d$  такие, что  $L(m^{II}) < L(m^I) = I(m^I)$ , и  $m^{II} \in \mathbf{D}$ .

Тогда  $I(m^{II}) < I(m^I)$ .

**Теорема 2.** Пусть имеются последовательность процессов  $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$  и функционалы  $\varphi, \varphi^d$ , такие что:

- 1)  $R(k, x_s(k), u_s(k)) \rightarrow \mu(k)$ ,  $k \in \mathbf{K}$ ;
- 2)  $R^d(z_s, t, x_s^d(t), u_s^d(t)) - \mu^d(z_s, t) \rightarrow 0$ ,  $k \in \mathbf{K}'$ ,  $t \in \mathbf{T}(z_s)$ ;
- 3)  $G^d(z_s, \gamma_s^d) - l^d(z_s) \rightarrow 0$ ,  $k \in \mathbf{K}'$ ;
- 4)  $G(x_s(t_F)) \rightarrow l$ .

Тогда последовательность  $\{m_s\}$  – минимизирующая для  $I$  на  $\mathbf{D}$ .

## 2. Метод улучшения

Предположим, что ограничения на переменные состояния и управления отсутствуют:  $\mathbf{X}(k) = \square^{m(k)}$ ,  $\mathbf{X}^d(z, t) = \square^{n(k)}$ ,  $\mathbf{U}(k) = \square^{l(k)}$ ,  $\mathbf{U}^d(z, t) = \square^{r(k)}$ ,  $t_I(k), t_F(k)$  – фиксированы,  $x_I^d = \xi(k, x)$ ,  $k_I, x_I$  и  $k_F$  – заданы,  $x_F^d \in \square^{n(k)}$ ,  $z = (k, x)$ .

Воспользуемся для построений принципами расширения и локализации [11, 15]. Сформулируем вспомогательный функционал, который зададим в виде:

$$I_\alpha = \alpha I + (1 - \alpha) \left( \sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F} |\Delta u(k)|^2 + \sum_{\mathbf{K}'} |\Delta u^d(k, t)|^2 \right),$$

где  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\Delta u = u - u^I$ ,  $\Delta u^d = u^d - u^{dI}$ . При построении метода будем отталкиваться от задачи улучшения элемента. Задан элемент  $m^I \in \mathbf{D}$  и требуется найти элемент  $m^{II} \in \mathbf{D}$ , для которого справедливо неравенство:  $I(m^{II}) \leq I(m^I)$ .

Согласно принципу расширения, будем решать задачу улучшения для функционала  $L_\alpha$ . Имеем  $L_\alpha(m^{\text{II}}) - L_\alpha(m^{\text{I}}) < 0$ . Рассмотрим приращение функционала  $L_\alpha(m)$ :

$$\Delta L_\alpha \approx \Delta G - \sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}'} \Delta R - \sum_{\mathbf{K}'} (\Delta G^d - \sum_{\mathbf{T}(k,z)} \Delta R^d),$$

где  $\Delta R = R_x^T \Delta x + R_u^T \Delta u + \frac{1}{2} \Delta u^T R_{uu} \Delta u$ ,  $\Delta G = G_x^T \Delta x$ ,  $\Delta G^d = G_x^{dT} \Delta x + G_{x_F}^{dT} \Delta x_F^d$ ,

$$\Delta R^d = R_x^{dT} \Delta x + R_{x^d}^{dT} \Delta x^d + R_{u^d}^{dT} \Delta u^d + \frac{1}{2} \Delta u^{dT} R_{u^d u^d}^d \Delta u^d. \quad \text{Здесь функции}$$

$G, G^d, R, R^d$  выписаны для функционала  $I_\alpha$ .

Предположим, что матрицы  $R_{uu}$  и  $R_{u^d u^d}^d$  отрицательно определены (этого всегда можно добиться за счет выбора параметра  $\alpha$  [15]). Найдем  $\Delta u, \Delta u^d$ , доставляющие максимум выражениям для  $\Delta R$  и  $\Delta R^d$ . Нетрудно видеть, что  $\Delta u = -(R_{uu})^{-1} R_u$ ,  $\Delta u^d = -(R_{u^d u^d}^d)^{-1} R_{u^d}^d$ . Для выполнения неравенства  $\Delta L < 0$  потребуем далее, чтобы  $\Delta R, \Delta G, \Delta G^d, \Delta R^d$  не зависели от  $\Delta x, \Delta x_F^d, \Delta x^d$ . Зададим функции  $\varphi, \varphi^d$  в виде:  $\varphi(k, x) = \psi(k)x$ ,  $\varphi^d(k, t, x, x^d) = \psi^d(z, t)x^d + \lambda x$ .

Тогда из сформулированных условий получим:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -(H_{uu})^{-1} H_u, \\ \psi(k_F) &= -\alpha F_x, \quad \psi(k) = H_x, \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}', \\ \psi(k) &= H_x + \xi_x^T \psi^d(k, t_I) + \lambda(k, t_I), \\ \psi^d(k, t_F) &= H_{x_F^d}, \quad \lambda(k, t_F) = H_{x_F}, \\ \psi^d(k, t) &= H_{x^d}^d, \quad \lambda(k, t) = H_x^d, \\ \Delta u^d &= -(H_{u^d u^d}^d)^{-1} H_{u^d}^d, \quad k \in \mathbf{K}'. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} H(k, x, u, \psi(k+1)) &= \psi^T(k+1) f(k, x(k), u(k)) - (1-\alpha) |\Delta u|^2, \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F, \\ H(k, x, \psi(k+1), x_I^d, x_F^d) &= \psi^T(k+1) \theta(k, x_I^d, x_F^d), \quad k \in \mathbf{K}', \\ H^d(k, t, x, x^d, u^d, \psi^d(k, t+1)) &= \psi^{dT}(k, t+1) f^d(k, t, x, x^d(k, t), u^d(k, t)) - \\ &\quad - (1-\alpha) |\Delta u^d(k, t)|^2, \end{aligned}$$

$\alpha$  – коэффициент,  $\alpha \in [0, 1]$ .



### 3. Итерационная процедура

На основе полученных соотношений можно сформулировать следующую итерационную процедуру на шаге  $s$ .

1. «Слева направо» просчитывается НДС (1), (2) при  $u = u_s(k)$ ,  $u^d = u_s^d(k, t)$  и заданных начальных условиях, получаются соответствующие траектории  $(x_s(k), x_s^d(k, t))$ .
2. «Справа налево» разрешается НДС относительно  $\psi(k)$ ,  $\psi^d(k, t)$  и  $\lambda(k, t)$ .
3. Находятся  $\Delta u$ ,  $\Delta u^d$  и новые управления  $u_{s+1}(k) = u_s(k) + \Delta u$ ,  $u_{s+1}^d(k) = u_s^d(k) + \Delta u^d$ .
4. Просчитывается «слева направо» исходная НДС (1), (2) при новых управлениях с заданными начальными условиями.

Процесс итераций заканчивается, когда  $|I_{s+1} - I_s| \approx 0$  с заданной точностью.

Имеет место следующее утверждение о сходимости.

**Теорема 3.** Пусть для НДС (1), (2) построена указанная итерационная процедура, и функционал  $I$  ограничен снизу. Тогда она генерирует улучшающую последовательность элементов  $\{m_s\} \in \mathbf{D}$ , сходящуюся по функционалу, т.е. существует число  $I^*$ , такое что  $I^* \leq I(m_s)$ ,  $I(m_s) \rightarrow I^*$ .

**Доказательство.** Доказательство следует непосредственно из свойства монотонности (по функционалу) рассмотренного оператора улучшения. Таким образом, получается монотонная числовая последовательность

$$\{I_s\} = \{I(m_s)\}, \quad I_{s+1} \leq I_s,$$

ограниченная снизу, которая по известной теореме анализа сходится к некоторому пределу:  $I_s \rightarrow I_*$ . Теорема доказана.

**Пример.** Проиллюстрируем один шаг метода на примере. Пусть задана неоднородная дискретная управляемая система:

$$x_1^d(t+1) = x_2^d(t)u^d(t) - (u^d(t))^2, \quad x_2^d(t+1) = x_1^d(t), \quad x_1^d(0) = x_2^d(0) = 1, \quad t = 0, 1, 2;$$

$$x_1^d(t+1) = x_1^d(t)u_1^d(t) - (u_1^d(t))^2, \quad t = 3, 4;$$

$$I = x_1^d(5) \rightarrow \min.$$

Нетрудно видеть, что  $K = 0, 1, 2$ . Поскольку роль связующей переменной на двух рассматриваемых этапах играет  $x_1^d$ , то в терминах этой переменной легко записать процесс верхнего уровня:  $x(0) = x_1^d(0, 0)$ ,  $x(1) = x_1^d(0, 3) = \theta$ ,  $x_1^d(1, 4) = x(1) = \xi$ ,  $x(2) = x_1^d(1, 5)$ . Тогда  $I = x(2)$ . Основные конструкции принимают вид:

$$\begin{aligned}
 & H^d(0, t, \psi_1^d(0, t+1), \psi_2^d(0, t+1), x_1^d, x_2^d, u^d) = \\
 & = \psi_1^d(0, t+1) \left( x_2^d(0, t) u^d(0, t) - (u^d(0, t))^2 \right) + \\
 & + \psi_2^d(0, t+1) x_1^d(0, t) - (1 - \alpha) (\Delta u^d(0, t))^2; \\
 & H^d(1, t, \psi_1^d(1, t+1), x_1^d, u_1^d) = \\
 & = \psi_1^d(1, t+1) \left( x_1^d(1, t) u_1^d(1, t) - (u_1^d(1, t))^2 \right) - (1 - \alpha) (\Delta u_1^d(1, t))^2; \\
 & H(k, \psi(k+1), x) = \psi(k+1) x_1^d(k, t_F); \\
 & \psi(k) = \psi(k+1), \quad k = 1, \quad \psi(2) = -\alpha F_x = -\alpha; \\
 & \psi_1^d(0, t) = \psi_2^d(0, t+1), \quad \psi_1^d(0, 3) = \psi(1) = -\alpha, \\
 & \psi_2^d(0, t) = \psi_1^d(0, t+1) u^d(0, t), \quad \psi_2^d(0, 3) = 0; \\
 & \psi_1^d(1, t) = \psi_1^d(1, t+1) u_1^d(1, t), \quad \psi_1^d(1, 5) = \psi(2) = -\alpha.
 \end{aligned}$$

Приращения управлений на текущем приближении определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
 \Delta u^d(0, t) &= - \left( 2(2\alpha - 2 - \psi_1^d(0, t+1)) \right)^{-1} \psi_1^d(0, t+1) \left( x_2^d(0, t) - 2u^d(0, t) \right), \\
 \Delta u_1^d(1, t) &= - \left( 2(2\alpha - 2 - \psi_1^d(1, t+1)) \right)^{-1} \psi_1^d(1, t+1) \left( x_1^d(1, t) - 2u_1^d(1, t) \right)
 \end{aligned}$$

Поскольку уравнения нижнего уровня не зависят от переменной  $x$  верхнего уровня, то  $\lambda(k, t) = 0$ .

В качестве начального приближения были выбраны значения  $u^d(0, t) = 0.1$ ,  $u_1^d(1, t) = 1$ , при этом  $I^1 = -2.001$ . Расчеты на шаге проводились для значений  $\alpha = 0.05, 0.1, 0.4$ . В табл. 1 отражены результаты, полученные после выполнения одного шага алгоритма, которые подтверждают работоспособность предложенного алгоритма.

$\alpha$	0.05	0.1	0.4
$I^2$	-2.1817	-2.4062	-7.0191

Таблица 1. Значения функционала  $I$  при разных значениях  $\alpha$ .

### Заключение

Таким образом, в работе приведена иерархическая модель неоднородной дискретной системы (НДС), для которой поставлена задача оптимального управления и сформулированы достаточные условия оптимальности типа Кротова. На основе этих условий, принципах расширения и локализации получен метод локального улучшения. Доказана теорема о сходимости метода по функционалу. Рассмотрен иллюстративный пример.

### Литература

1. Пропой А. И. О принципе максимума для дискретных систем управления // Автомат. и телемех. — 1965. — Т. 26. — № 7. — С. 1177–

1187.

2. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. — М.: Наука, 1973. — 256 с.

3. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. — М.: Наука, 1973. — 448 с.

4. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982. — 432 с.

5. Горбунов В. К. О сведении задач оптимального управления к конечномерным // Журнал выч. мат. и мат. физ. — 1978. — Т. 18. — № 5. — С. 1083–1095.

6. Гурман В. И. К теории оптимальных дискретных процессов // Автомат. и телемех. — 1973. — № 6. — С. 53–58.

7. Васильев С. Н. Теория и применение логико-управляемых систем // Труды. 2-я Международная конференция «Идентификация систем и задачи управления» (SICPRO'03). — 2003. — С. 23–52.

8. Бортаковский А. С. Достаточные условия оптимальности управления детерминированными логико-динамическими системами // Информатика. — Вып. 2–3. — Сер. Автоматизация проектирования. — М.: ВНИИМИ. — 1992. — С. 72–79.

9. Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. — М.: Наука, 2005.

10. Lygeros J. Lecture Notes on Hybrid Systems. — Cambridge: University of Cambridge, 2003.

11. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973. — 448 с.

12. Кротов В. Ф. Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем // ДАН СССР. — 1967. — Т. 172. — № 1. — С. 18–21.

13. Гурман В. И., Расина И. В. Дискретно-непрерывные представления импульсных решений управляемых систем // Автомат. и телемех. — 2012. — № 8. — С. 16–29.

14. Расина И. В. Иерархические модели управления системами неоднородной структуры. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014.

15. Гурман В. И., Расина И. В. О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума // Автомат. и телемех. — 1979. — № 10. — С. 12–18.

### References

1. Propoi A. I. O printsipe maksimuma dlya diskretnykh sistem upravleniya [About Maximum Principle for Discrete Control Systems]. *Avtomatika i telemechanika – Automation and Telecontrol*. 1965. V. 26. No. 7. Pp. 1177–1187.

2. Propoi A. I. *Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov* [Elements of the Theory of Optimal Discrete Processes]. Moscow: Nauka Publ., 1973. 256 p.

3. Boltyanskii V. G. *Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami* [Optimal Control of Discrete Systems]. Moscow: Nauka Publ., 1973. 448 p.

4. Evtushenko Yu. G. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach i ikh primeneniye v sistemakh optimizatsii* [Methods for Solving Extreme Problems and Their Use in Optimization Systems]. Moscow: Nauka Publ., 1982. 432 p.

5. Gorbunov V. K. O svedenii zadach optimal'nogo upravleniya k konechnomernym [Reduction of Optimal Control Problems for Finite-Dimensional Ones]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki – Journal of Mathematics and Mathematical Physics*. 1978. V. 18. No. 5. Pp. 1083–1095.

6. Gurman V. I. K teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov [To the Theory of Optimal Discrete Processes]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Telecontrol*. 1973. No. 6. Pp. 53–58.

7. Vasil'ev S. N. Teoriya i primeneniye logiko-upravlyaemykh sistem [Theory and Application of Logic-Control Systems]. *Identifikatsiya sistem i zadachi upravleniya – System Identification and Control Problems (SICPRO'03)*. Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Conf. (SICPRO'03). 2003. Pp. 23–52.

8. Bortakovskii A. S. Dostatochnye usloviya optimal'nosti upravleniya determinirovannymi logiko-dinamicheskimi sistemami [The Sufficient Conditions for Optimal Control of Deterministic Logic-Dynamic Systems]. *Informatika. V. 2–3. Ser. Avtomatizatsiya proektirovaniya – Computer Science. V. 2–3. Ser. Design Automation*. 1992. Pp. 72–79.

9. Miller B. M., Rubinovich E. Ya. *Optimizatsiya dinamicheskikh sistem s impul'snymi upravleniyami* [Optimization of Dynamical Systems with Impulse Controls]. Moscow: Nauka Publ., 2005.

10. Lygeros J. *Lecture Notes on Hybrid Systems*. Cambridge: University of Cambridge, 2003.

11. Krotov V. F., Gurman V. I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods and Problems of Optimal Control]. Moscow: Nauka Publ., 1973. 448 p.

12. Krotov V. F. Dostatochnye usloviya optimal'nosti dlya diskretnykh upravlyaemykh sistem [The Sufficient Conditions of Optimality for Discrete Control Systems]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1967. V. 172. No. 1. Pp. 18–21.

13. Gurman V. I., Rasina I. V. Diskretno-nepreryvnye predstavleniya impul'snykh reshenii upravlyaemykh sistem [Discrete-Continuous Presentation of Impulse Solutions]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Telecontrol*. 2012. No. 8. Pp. 16–29.

14. Rasina I. V. Ierarkhicheskie modeli upravleniya sistemami neodnorodnoi struktury [Hierarchical Control Models of Systems Having Inhomogeneous Structure]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2014.

15. Gurman V. I., Rasina I. V. O prakticheskikh prilozheniyakh dostatochnykh uslovii sil'nogo otnositel'nogo minimuma [About Practical Applications of the Sufficient Conditions for Strong Relative Minimum]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Telecontrol*. 1979. No. 10. Pp. 12–18.

*Расина Ирина Викторовна*, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, e-mail: irinarasina@gmail.com.

*Гусева Ирина Сергеевна*, кандидат физико-математических наук, преподаватель Института математики и информатики БГУ, e-mail: ig\_19@mail.ru

*Фесько Олесь Владимирович*, кандидат технических наук, н.с. Института программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, e-mail: oles.fesko@hotmail.com.

*Усенко Олег Валерьевич*, старший преподаватель кафедры информатики и программной инженерии Сибирской академии права, экономики и управления, e-mail: o.v.usenko@gmail.com.

*Irina V. Rasina*, DSc in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Program Systems, Russian Academy of Science.

*Irina S. Guseva*, PhD in Physics and Mathematics, Lecturer, Institute of Mathematics and Informatics, Buryat State University.

*Oles V. Fesko*, PhD, Research Scientist, Institute of Program Systems, Russian Academy of Science.

*Oleg V. Usenko*, Senior Teacher, Department of Informatics and Soft Engineering, Siberian Academy of Law, Economy and Management.

УДК 517.977

doi: 10.18101/2304-5728-2016-1-38-48

© *И.-Х. Д. Хишектыева***Применение метода неподвижных точек в задачах оптимизации динамических систем по параметрам и начальным условиям<sup>1</sup>**

В статье предлагается метод последовательного улучшения управляющих параметров динамических систем, основанный на решении конструируемой задачи о неподвижной точке определяемого оператора управления. Применение метода иллюстрируется на примере задачи идентификации параметров и начальных условий динамической системы.

**Ключевые слова:** динамическая система, параметрическая оптимизация, задача о неподвижной точке.

© *I.-Kh. D. Khishektueva***Application of the fixed points method for the problems of dynamic systems optimization on parameters and initial conditions**

In the article we have proposed the method for continual improvement of control parameters of dynamic systems. It is based on the solution of constructed fixed point problem defined by the control operator. Application of the method is exemplified by the problem of identification the parameters and initial conditions of a dynamical system.

**Keywords:** dynamic system, parametric optimization, fixed point problem.

**Введение**

Задачи оптимизации параметров динамических систем возникают и актуальны во многих приложениях [1]. В настоящей работе рассматривается следующая задача параметрической оптимизации динамической системы:

$$\Phi(\sigma) = \varphi(x(t_1), u) + \int_T F(x(t), u, t) dt \rightarrow \inf_{\sigma \in \Omega}, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u, t), \quad x(t_0) = a, \quad u \in U, a \in A, t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

где  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  – вектор состояния,  $u = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n)$  – векторные управляющие параметры. Множества  $U \subseteq R^m$ ,  $A \subseteq R^n$  замкнуты и выпуклы. Интервал  $T$  фиксирован,  $\sigma = (u, a)$  – допустимое управление со значениями из множества  $\Omega = U \times A$ .

Предполагаются выполненными следующие условия:

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-01-03680-а; МОН РФ, проект №3808

1) функция  $\varphi(x, u)$  непрерывно-дифференцируема на  $R^n \times U$ , функции  $F(x, u, t)$ ,  $f(x, u, t)$  и их частные производные по  $x, u$  непрерывны по совокупности аргументов  $(x, u, t)$  на множестве  $R^n \times U \times T$ ;

2) функция  $f(x, u, t)$  удовлетворяет условию Липшица по  $x$  в  $R^n \times U \times T$  с константой  $L > 0$ :  $\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leq L\|x - y\|$ .

Условия гарантируют существование и единственность решения  $x(t, \sigma)$ ,  $t \in T$  системы (2) для любого допустимого управления  $\sigma \in \Omega$ .

Функция Понтрягина с сопряженной переменной  $\psi \in R^n$  и стандартная сопряженная система принимают вид:

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - F(x, u, t),$$

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u, t), t \in T, \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1), u). \quad (3)$$

Для допустимого управления  $\sigma \in \Omega$  обозначим  $\psi(t, \sigma)$ ,  $t \in T$  – решение стандартной сопряженной системы (3) при  $x(t) = x(t, \sigma)$  и аргументах  $u, a$ , соответствующих компонентам управления  $\sigma$ .

Одним из основных подходов к оптимизации управления является последовательное решение задач улучшения управления, в которых для заданного управления  $\sigma^I \in \Omega$  требуется найти управление  $\sigma^{II} \in \Omega$  с условием  $\Phi(\sigma^{II}) - \Phi(\sigma^I) \leq 0$ .

В данной работе для решения задачи улучшения предлагается решить специальную задачу о неподвижной точке конструируемого оператора в пространстве управлений с помощью стандартной операции на максимум функции Понтрягина. Решение предлагаемой задачи о неподвижной точке позволяет улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие принципу максимума, и получать новые необходимые условия оптимальности в рассматриваемом классе задач.

### 1. Формула приращения целевой функции

Обозначим для удобства частное приращение произвольной вектор-функции  $g(y_1, \dots, y_l)$  по переменным  $y_{s_1}, y_{s_2}$

$$\Delta_{y_{s_1} + \Delta y_{s_1}, y_{s_2} + \Delta y_{s_2}} g(y_1, \dots, y_l) = g(y_1, \dots, y_{s_1} + \Delta y_{s_1}, \dots, y_{s_2} + \Delta y_{s_2}, \dots, y_l) - g(y_1, \dots, y_l).$$

Приращение целевой функции (1) на допустимых управлениях  $\sigma, \sigma^I$  в соответствии с введенным обозначением выписывается в виде:

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma \Phi(\sigma^I) &= \Phi(\sigma) - \Phi(\sigma^I) = \varphi(x(t_1, \sigma), u) + \int_T F(x(t, \sigma), u, t) dt - \\ &- \varphi(x(t_1, \sigma^I), u^I) - \int_T F(x(t, \sigma^I), u^I, t) dt = \\ &= \Delta_{x(t_1, \sigma), u} \varphi(x(t_1, \sigma^I), u^I) + \int_T \Delta_{x(t, \sigma), u} F(x(t, \sigma^I), u^I, t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Дополнительно обозначим  $\Delta x(t) = x(t, \sigma) - x(t, \sigma^I)$ ,  $\Delta a = a - a^I$ .

Приращение терминальной части функционала в выражении (4) можно

записать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta_{x(t_1, \sigma), u} \varphi(x(t_1, \sigma^l), u^l) &= \varphi(x(t_1, \sigma), u) - \varphi(x(t_1, \sigma^l), u^l) = \\ &= \varphi(x(t_1, \sigma), u) - \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) + \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) - \varphi(x(t_1, \sigma^l), u^l) = \\ &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) + \Delta_{x(t_1, \sigma)} \varphi(x(t_1, \sigma^l), u^l). \end{aligned}$$

Аналогично [2] введем непрерывную кусочно-дифференцируемую вектор-функцию  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ ,  $t \in T$  с условиями:

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, \sigma^l), u^l) - q, \quad (5)$$

где величина  $q$  удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\langle \varphi_x(x(t_1, \sigma^l), u^l) + q, \Delta x(t_1) \rangle = \Delta_{x(t_1, \sigma)} \varphi(x(t_1, \sigma^l), u^l). \quad (6)$$

При этом по определению полагаем  $q = 0$  в случае линейности функции  $\varphi$  по  $x$ , а также в случае  $x(t_1, \sigma) = x(t_1, \sigma^l)$ .

Тогда приращение терминальной части функционала в выражении (4) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta_{x(t_1, \sigma), u} \varphi(x(t_1, \sigma^l), u^l) &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) + \Delta_{x(t_1, \sigma)} \varphi(x(t_1, \sigma^l), u^l) = \\ &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) + \langle \varphi_x(x(t_1, \sigma^l), u^l) + q, \Delta x(t_1) \rangle = \\ &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) - \langle p(t_1), \Delta x(t_1) \rangle = \\ &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) - \langle p(t_0), \Delta a \rangle - \int_T \frac{d}{dt} \langle p(t), \Delta x(t) \rangle dt = \\ &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) - \langle p(t_0), \Delta a \rangle - \int_T (\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle p(t), \Delta \dot{x}(t) \rangle) dt = \\ &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) - \langle p(t_0), \Delta a \rangle - \\ &\quad - \int_T (\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle p(t), \Delta_{x(t, \sigma), u} f(x(t, \sigma^l), u^l, t) \rangle) dt. \end{aligned}$$

Далее приращение функционала при помощи функции Понтрягина можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma \Phi(\sigma^l) &= \Delta_{x(t_1, \sigma), u} \varphi(x(t_1, \sigma^l), u^l) + \int_T \Delta_{x(t, \sigma), u} F(x(t, \sigma^l), u^l, t) dt = \\ &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) - \langle p(t_0), \Delta a \rangle - \\ &\quad - \int_T (\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle p(t), \Delta_{x(t, \sigma), u} f(x(t, \sigma^l), u^l, t) \rangle) dt + \\ &\quad + \int_T \Delta_{x(t, \sigma), u} F(x(t, \sigma^l), u^l, t) dt = \\ &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) - \langle p(t_0), \Delta a \rangle - \int_T \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle dt - \\ &\quad - \int_T (\langle p(t), \Delta_{x(t, \sigma), u} f(x(t, \sigma^l), u^l, t) \rangle - \Delta_{x(t, \sigma), u} F(x(t, \sigma^l), u^l, t)) dt = \\ &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) - \langle p(t_0), \Delta a \rangle - \\ &\quad - \int_T \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle dt - \int_T \Delta_{x(t, \sigma), u} H(p(t), x(t, \sigma^l), u^l, t) dt = \\ &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) - \langle p(t_0), \Delta a \rangle - \end{aligned}$$



$$-\int_T \left( \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \Delta_u H(p(t), x(t, \sigma), u^l, t) + \Delta_{x(t, \sigma)} H(p(t), x(t, \sigma^l), u^l, t) \right) dt. \quad (7)$$

Введем дифференциально-алгебраическую систему для функции  $p(t)$  с условиями (5),(6) в форме:

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t, \sigma^l), u^l, t) - r(t), \quad (8)$$

где кусочно-непрерывная величина  $r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ ,  $t \in T$  определяется в каждый момент времени  $t \in T$  из алгебраического уравнения

$$\langle H_x(p(t), x(t, \sigma^l), u^l, t) + r(t), \Delta x(t) \rangle = \Delta_{x(t, \sigma)} H(p(t), x(t, \sigma^l), u^l, t). \quad (9)$$

При этом по определению полагаем  $r(t) = 0$  в случае линейности функций  $F, f$  по  $x$ , а также в случае равенства  $x(t, \sigma) = x(t, \sigma^l)$ .

Тогда в силу дифференциально-алгебраической системы (8),(9) для  $p(t)$  с начальными условиями (5),(6) формула приращения (7) принимает вид:

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma \Phi(\sigma^l) &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) - \langle p(t_0), \Delta a \rangle - \\ &-\int_T \left( \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \Delta_u H(p(t), x(t, \sigma), u^l, t) + \Delta_{x(t, \sigma)} H(p(t), x(t, \sigma^l), u^l, t) \right) dt = \\ &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) - \langle p(t_0), \Delta a \rangle - \\ &-\int_T \left( \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \Delta_u H(p(t), x(t, \sigma), u^l, t) + \right. \\ &\left. + \langle H_x(p(t), x(t, \sigma^l), u^l, t) + r(t), \Delta x(t) \rangle \right) dt = \\ &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) - \langle p(t_0), \Delta a \rangle - \\ &-\int_T \left( \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \Delta_u H(p(t), x(t, \sigma), u^l, t) - \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle \right) dt = \\ &= \Delta_u \varphi(x(t_1, \sigma), u^l) - \langle p(t_0), \Delta a \rangle - \int_T \Delta_u H(p(t), x(t, \sigma), u^l, t) dt = \\ &= -\Delta_u \left\{ -\varphi(x(t_1, \sigma), u^l) + \int_T H(p(t), x(t, \sigma), u^l, t) dt \right\} - \langle p(t_0), \Delta a \rangle. \quad (10) \end{aligned}$$

Для удобства записи явной зависимости  $p(t)$  от управления введем модифицированную дифференциально-алгебраическую сопряженную систему в форме

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t), u, t) - r(t), \quad (11)$$

$$\langle H_x(p(t), x(t), u, t) + r(t), y(t) - x(t) \rangle = \Delta_{y(t)} H(p(t), x(t), u, t) \quad (12)$$

с краевыми условиями

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1), u) - q, \quad (13)$$

$$\langle \varphi_x(x(t_1), u) + q, y(t_1) - x(t_1) \rangle = \Delta_{y(t_1)} \varphi(x(t_1), u), \quad (14)$$

в которой по определению полагаем  $q = 0$ ,  $r(t) = 0$  в случае линейности функций  $\varphi, F, f$  по  $x$  (линейная по состоянию задача (1), (2)), а также в случае  $x(t, \sigma) = x(t, \sigma^l)$  при соответствующих  $t \in T$ .

Отметим, что в линейной по состоянию задаче (1), (2) модифицированная сопряженная система (11)-(14) совпадает со стандартной сопря-

женной системой (3).

Для допустимых управлений  $\sigma \in \Omega, \sigma^l \in \Omega$  обозначим  $p(t, \sigma^l, \sigma), t \in T$  - решение модифицированной сопряженной системы (11)-(14) при  $x(t) = x(t, \sigma^l), y(t) = x(t, \sigma), u = u^l$ . Из определения следует очевидное равенство  $p(t, \sigma, \sigma) = \psi(t, \sigma), t \in T$ .

Формула приращения (10) в новых обозначениях, в которых указывается явная зависимость фазовых и сопряженных переменных от управления, принимает вид

$$\Delta_{\sigma} \Phi(\sigma^l) = -\Delta_u \left\{ -\varphi(x(t_1, \sigma), u^l) + \int_T H(p(t, \sigma^l, \sigma), x(t, \sigma), u^l, t) dt \right\} - \langle p(t_0, \sigma^l, \sigma), \Delta a \rangle. \quad (15)$$

Формула (10) не содержит каких-либо остаточных членов разложений. Методы улучшения управления, основывающиеся на таких формулах, обладают свойством нелокальности улучшения и позволяют получить новые условия оптимальности, а также возможность улучшать управления, удовлетворяющие принципу максимума [2 – 4].

Используемые обозначения решений фазовых и сопряженных систем, явно указывающие их зависимость от управления, позволяют удобно интерпретировать условия улучшения и оптимальности управления как задачи о неподвижной точке определяемых операторов управления.

## 2. Задача о неподвижной точке на основе операций на максимум

При заданном  $\sigma^l \in \Omega$  определим оператор  $A^* : \sigma \rightarrow \sigma^*$  на множестве допустимых управлений  $\Omega$  следующими выражениями:

$$\sigma = (u, a) \rightarrow \sigma^* = (u^*, a^*),$$

$$u^* = \arg \max_{\tilde{u} \in U} \left( -\varphi(x(t_1, \sigma), \tilde{u}) + \int_T H(p(t, \sigma^l, \sigma), x(t, \sigma), \tilde{u}, t) dt \right),$$

$$a^* = \arg \max_{\tilde{a} \in A} \langle p(t_0, \sigma^l, \sigma), \tilde{a} \rangle.$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке  $\sigma = A^*(\sigma)$  для рассматриваемого оператора  $A^*$ , которая определяется следующей системой уравнений:

$$u = \arg \max_{\tilde{u} \in U} \left( -\varphi(x(t_1, \sigma), \tilde{u}) + \int_T H(p(t, \sigma^l, \sigma), x(t, \sigma), \tilde{u}, t) dt \right), t \in T, \quad (16)$$

$$a = \arg \max_{\tilde{a} \in A} \langle p(t_0, \sigma^l, \sigma), \tilde{a} \rangle. \quad (17)$$

Предположим, что задача (16)-(17) имеет решение  $\sigma^{II} = (u^{II}, a^{II})$ , (возможно не единственное). Тогда, в силу определения отображения  $A^*$ , получаем

$$\Delta_{\sigma''} \left\{ -\varphi(x(t_1, \sigma''), u^l) + \int_T H(p(t, \sigma^l, \sigma''), x(t, \sigma''), u^l, t) dt \right\} \geq 0, \quad t \in T,$$

$$\langle p(t_0, \sigma^l, \sigma''), a'' - a^l \rangle \geq 0.$$

Отсюда и из формулы (15) следует  $\Delta_{\sigma''} \Phi(\sigma^l) \leq 0$ .

Таким образом, предлагаемый метод улучшения управления  $\sigma^l \in \Omega$ , состоит в решении задачи о неподвижной точке (16) – (17).

Для решения задачи о неподвижной точке

$$\sigma = A^*(\sigma), \quad \sigma \in \Omega, \quad (18)$$

можно использовать метод простой итерации при  $k \geq 0$  [5]:

$$\sigma^{k+1} = A^*(\sigma^k), \quad \sigma^0 \in \Omega. \quad (19)$$

Расчет задачи о неподвижной точке производится до первого улучшения исходного управления  $\sigma^l$ . Далее строится новая задача улучшения для полученного управления  $\sigma''$  и расчет повторяется. Критерием остановки служит условие

$$|\Phi(\sigma'') - \Phi(\sigma^l)| \leq \varepsilon |\Phi(\sigma^l)|,$$

где  $\varepsilon > 0$  – заданная точность расчета.

### 3. Пример (задача идентификации)

В качестве примера рассмотрим метод улучшения в задаче идентификации динамических систем.

Пусть на фиксированном отрезке времени  $T = [t_0, t_1]$  конечной длины известны выходные характеристики  $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t))$  динамического объекта. Пусть заданы система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u, t), \quad x(t_0) = a, \quad \sigma = (u, a), \quad u \in U, \quad a \in A \quad (20)$$

и функционал

$$I(\sigma) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i(t) - \bar{x}_i(t))^2 dt \rightarrow \min_{\sigma \in \Omega}, \quad (21)$$

характеризующий близость решений  $x(t)$  системы (20) к функции  $\bar{x}(t)$  на отрезке  $T$ . В качестве подынтегральной функции здесь выступает средневзвешенная квадратичная ошибка с весовыми коэффициентами  $\lambda_i \in R$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Предполагаются выполненными условия непрерывности функции  $f(x, u, t)$  вместе с их производными по переменным  $x, u$ .  $\sigma = (u, a)$  – допустимое управление со значениями в  $\Omega = U \times A$ .  $U \subseteq R^m$ ,  $A \subseteq R^n$  – замкнутые и выпуклые множества.

Задача состоит в поиске таких управляющих параметров  $\sigma^* = (u^*, a^*)$ , на которых функционал (21) принимает наименьшее значение.

Функция Понтрягина и дифференциально-алгебраическая сопряженная система здесь принимают вид:

$$H(p, x, u, t) = \langle p, f(x, u, t) \rangle - \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - \bar{x}_i(t))^2, \quad (22)$$

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t), u, t) - r(t), \quad (23)$$

$$\langle H_x(p(t), x(t), u, t) + r(t), y(t) - x(t) \rangle = \Delta_{y(t)} H(p(t), x(t), u, t), \quad (24)$$

$$p(t_1) = 0. \quad (25)$$

Для допустимых управлений  $\sigma \in \Omega, \sigma^l \in \Omega$  обозначим  $p(t, \sigma^l, \sigma), t \in T$  – решение дифференциально-алгебраической сопряженной системы (23) – (25) при  $x(t) = x(t, \sigma^l), y(t) = x(t, \sigma), u = u^l$ .

Задача о неподвижной точке для улучшения управления  $\sigma^l \in \Omega$  принимает вид:

$$u = \arg \max_{\tilde{u} \in U} \int_T H(p(t, \sigma^l, \sigma), x(t, \sigma), \tilde{u}, t) dt, t \in T, \quad (26)$$

$$a = \arg \max_{\tilde{a} \in A} \langle p(t_0, \sigma^l, \sigma), \tilde{a} \rangle. \quad (27)$$

Продемонстрируем работу метода улучшения на простом примере. Рассмотрим задачу:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = a, \quad t \in T = [0, 1],$$

$$u \in U = [-1, 1], \quad a \in A = [0, 2].$$

Зафиксируем решение  $\bar{x}(t) = t, t \in T$  при  $u = 1, a = 0$  и рассмотрим задачу идентификации этого решения:

$$\Phi(\sigma) = \int_0^1 (x - t)^2 dt \rightarrow \min_{\sigma = (u, a)},$$

Функция Понтрягина имеет вид:  $H(p, x, u, t) = pu - (x - t)^2$ . Дифференциально-алгебраическая сопряженная система:

$$\dot{p}(t) = 2x(t) - 2t - r(t), \quad t \in T,$$

$$(-2x(t) + 2t + r(t))(y(t) - x(t)) = -(y(t) - t)^2 + (x(t) - t)^2,$$

$$p(1) = 0.$$

После упрощений система принимает вид:

$$\dot{p}(t) = 2x(t) - 2t - r(t), \quad t \in T,$$

$$(y(t) - x(t) + r(t))(y(t) - x(t)) = 0,$$

$$p(1) = 0.$$

Если  $y(t) = x(t)$ , то по определению  $r(t) = 0$ . Если  $y(t) \neq x(t)$ , то  $r(t) = x(t) - y(t)$ . В итоге получаем общую формулу для  $r(t)$ :

$$r(t) = x(t) - y(t), \quad t \in T.$$

Отсюда окончательно получаем сопряженную систему в форме:

$$\dot{p}(t) = x(t) + y(t) - 2t, \quad t \in T,$$

$$p(1) = 0.$$

Обозначим  $p(t, \sigma^l, \sigma), t \in T$  – решение сопряженной системы при

$$y(t) = x(t, \sigma), \quad x(t) = x(t, \sigma^l).$$

Задача о неподвижной точке примет вид:

$$u = \arg \max_{\tilde{u} \in U} \int_T H(p(t, \sigma^l, \sigma), x(t, \sigma), \tilde{u}, t) dt = \text{sign} \int_0^1 p(t, \sigma^l, \sigma) dt,$$

$$a = \arg \max_{\tilde{a} \in A} \{p(t_0, \sigma^l, \sigma) \cdot \tilde{a}\} = \begin{cases} 0, & p(t_0, \sigma^l, \sigma) < 0, \\ 2, & p(t_0, \sigma^l, \sigma) > 0, \\ \tilde{a} \in [0, 2], & p(t_0, \sigma^l, \sigma) = 0. \end{cases}$$

I. Рассмотрим случай  $\sigma^l = (-1, 2)$ . Соответствующие  $\sigma^l$  фазовая траектория и значение функционала равны  $x(t, \sigma^l) = 2 - t, t \in T, \Phi(\sigma^l) = \frac{4}{3}$ .

Сопряженная система при  $y(t) = x(t, \sigma) = ut + a,$   
 $x(t) = x(t, \sigma^l) = 2 - t, t \in T$  принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = (u - 3)t + (a + 2), \\ p(1) = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем  $p(t) = \frac{u-3}{2}(t^2 - 1) + (a+2)(t-1), t \in [0, 1]$ .

Задача о неподвижной точке принимает вид:

$$\begin{cases} a = \arg \max_{\tilde{a}} \left[ -\frac{u-3}{2} - (a+2) \right] \tilde{a}, \\ u = \text{sign} \left[ -\frac{u-3}{3} - \frac{a+2}{2} \right]. \end{cases}$$

Рассмотрим возможные случаи:

$$1. a = 0 \Rightarrow -\frac{u-3}{2} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow u + 1 \geq 0.$$

$$1.1. u = 1 \Rightarrow -\frac{u-3}{3} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow u \leq 0 \text{ (противоречие).}$$

$$1.2. u = -1 \Rightarrow -\frac{u-3}{3} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow u \geq 0 \text{ (противоречие).}$$

$$1.3. u = \tilde{u} \Rightarrow -\frac{\tilde{u}-3}{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \tilde{u} = 0.$$

Таким образом, существует решение  $\tilde{u} = 0, a = 0$ .

$$2. a = 2 \Rightarrow -\frac{u-3}{2} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow u \leq -5 \text{ (противоречие).}$$

$$3. a = \tilde{a} \Rightarrow \frac{u-3}{2} + (\tilde{a} + 2) = 0.$$

$$3.1. u = 1 \Rightarrow -\frac{u-3}{3} - \frac{\tilde{a}+2}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{u-3}{3} - \frac{u-3}{4} \leq 0 \Rightarrow u \leq 3.$$

Для возможного  $u = 1$  получаем  $\tilde{a} = -1$  (противоречие).

$$3.2. \quad u = -1 \Rightarrow -\frac{u-3}{3} - \frac{\tilde{a}+2}{2} \leq 0 \Rightarrow \frac{u-3}{3} - \frac{u-3}{4} \geq 0 \Rightarrow u \geq 3$$

(противоречие).

$$3.3. \quad u = \tilde{u} \Rightarrow \frac{\tilde{u}-3}{3} + \frac{\tilde{a}+2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\tilde{u}-3}{3} - \frac{\tilde{u}-3}{4} = 0 \Rightarrow \tilde{u} = 3 \quad (\text{противоречие}).$$

В итоге получаем единственное решение  $\sigma = (0, 0)$  с траекторией  $x(t, \sigma) = 0$ . На полученном управлении достигается строгое улучшение  $\Phi(\sigma) = \frac{1}{3} < \Phi(\sigma')$ .

II. Рассмотрим случай  $\sigma' = (-1, 1)$ . Соответствующие  $\sigma'$  фазовая траектория и значение целевой функции равны  $x(t, \sigma') = 1 - t$ ,  $t \in T$ ,  $\Phi(\sigma') = \frac{1}{3}$ .

Сопряженная система при  $y(t) = x(t, \sigma) = ut + a$ ,  $x(t) = x(t, \sigma') = 1 - t$ ,  $t \in T$  принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = (u-3)t + (a+1), \\ p(1) = 0 \end{cases}$$

Отсюда имеем  $p(t) = \frac{(u-3)}{2}(t^2 - 1) + (a+1)(t-1)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Задача о неподвижной точке:

$$\begin{cases} a = \arg \max_{\tilde{a}} \left[ -\frac{u-3}{2} - (a+1) \right] \tilde{a}, \\ u = \text{sign} \left[ -\frac{u-3}{3} - \frac{a+1}{2} \right]. \end{cases}$$

$$1. \quad a = 0 \Rightarrow -\frac{u-3}{2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow u - 1 \geq 0 \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \text{sign} \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, существует решение  $u = 1$ ,  $a = 0$ .

$$2. \quad a = 2 \Rightarrow -\frac{u-3}{2} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow u \leq -3 \quad (\text{противоречие}).$$

$$3. \quad a = \tilde{a} \Rightarrow \frac{u-3}{2} + \tilde{a} + 1 = 0.$$

$$3.1. \quad u = 1 \Rightarrow -\frac{u-3}{3} + \frac{u-3}{4} > 0 \Rightarrow u < 3.$$

Отсюда получаем  $u = 1$ . Следовательно,  $\tilde{a} = 0$ . В итоге получаем реше-

ние, совпадающее с предыдущим,  $\sigma = (1, 0)$ .

$$3.2. u = -1 \Rightarrow -\frac{u-3}{3} + \frac{u-3}{4} \leq 0 \Rightarrow u \geq 3 \text{ (противоречие).}$$

$$3.3. u = \tilde{u} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\tilde{u}-3}{2} + \tilde{a} + 1 = 0, \\ -\frac{\tilde{u}-3}{3} - \frac{\tilde{a}+1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{\tilde{u}-3}{3} + \frac{\tilde{u}-3}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{u} = 3 \text{ (противоречие).}$$

Таким образом, имеем единственное решение  $\sigma = (1, 0)$ ,  $x(t, \sigma) = t$ ,  $\Phi(\sigma) = 0$ , которое является оптимальным в рассматриваемой задаче идентификации.

### Заключение

Предлагаемый метод сводит решение задачи параметрической оптимизации к последовательному решению конструируемых задач о неподвижной точке специального оператора управления.

В отличие от стандартных градиентных методов рассматриваемый метод характеризуется следующими особенностями:

- 1) нелокальность улучшения управления, т.е. улучшение гарантируется не только в достаточно малой окрестности улучшаемого управления;
- 2) отсутствие трудоемкой операции варьирования управления по малому параметру в окрестности улучшаемого управления для обеспечения свойства улучшения.

Указанные особенности являются существенными факторами повышения вычислительной эффективности решения задач параметрической оптимизации динамических систем.

### Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976. — 392 с.
2. Булдаев А.С. Метод неподвижных точек в задачах параметрической оптимизации систем / А.С. Булдаев, И.-Х. Д. Хишектуева // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 12. — С. 5–15.
3. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000. — 160 с.
4. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. — Улан-Удэ: Изд-во Бурятск. гос. ун-та, 2008. — 260 с.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.

---

**References**

1. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow: Nauka Publ., 1976. 392 p.
2. Buldaev A. S., Khishektueva I.-Kh. D. Metod nepodvizhnykh toчек v zadachakh parametriceskoi optimizatsii sistem [Method of Fixed Points in Problems of Systems Parametric Optimization]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Telecontrol*. 2013. No. 12. Pp. 5–15.
3. Srochko V. A. *Iteratsionnye metody resheniya zadach optimal'nogo upravleniya* [Iterative Methods for Solving Optimal Control Problems]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2000. 160 p.
4. Buldaev A. S. *Metody vozmushchenii v zadachakh uluchsheniya i optimizatsii upravlyaemykh system* [Perturbation Methods in Problems of Improvement and Optimization of Control Systems]. Buryat State University Publ., 2008. 260 p.
5. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow: Nauka Publ., 1989. 432 p.

*Хишектueva Ишин-Хорло Дамбадоржиевна*, инженер-программист Научно-образовательного и инновационного центра системных исследований и автоматизации Бурятского государственного университета, e-mail: [ishin@ulanovka.ru](mailto:ishin@ulanovka.ru)

*Ishin-Khorlo D. Khishektueva*, Software Engineer, Scientific-Educational and Innovative Center for Systems Study and Automation, Buryat State University.



# ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ

---

УДК 004.925.83:514.182.22  
doi: 10.18101/2304-5728-2016-1-49-59

© *И. И. Баглаев*

## **Кинематический метод моделирования поверхностей в среде FMSLogo**

Новая область прикладной математики – компьютерная геометрия позволяет достаточно эффективно моделировать пространственные объекты и создавать их изображение непосредственно на экране монитора. В статье рассматривается способ математической визуализации поверхностей с использованием возможностей пространственного режима русской локализации среды программирования FMSLogo. Способ задания поверхностей перемещением кривых в пространстве называется кинематическим. Данный способ проиллюстрирован на примерах моделирования двух классов кинематических поверхностей: нелинейчатых и линейчатых. В работе приведены изображения каркасов таких поверхностей как поверхности вращения, каналовые поверхности, торсы, однополостные гиперболоиды, косые поверхности, геликоиды и некоторые другие, а также листинги программ их моделирования. Представленный в статье материал может быть полезен читателям, интересующимся компьютерной геометрией, и использован в освоении современных технологий трехмерного моделирования.

**Ключевые слова:** аналитический и кинематический способы задания поверхностей, нелинейчатые и линейчатые поверхности, поверхности вращения, каналовые поверхности, развертывающиеся и неразвертывающиеся поверхности, пространственный режим среды программирования FMSLogo, правый крен / левый крен, уклон вверх / уклон вниз, направо / налево, вперед / назад.

© *I. I. Baglaev*

## **Kinematic method of surface modeling in FMSLogo programming environment**

Computer geometry as a new area of applied mathematics enables effective modeling of spatial objects and creating their images directly on the screen. The article deals with the method of surfaces mathematical visualization using the possibilities of Russian localization spatial mode in FMSLogo programming environment.

The way to define the surface by displacement of curves in space is called kinematic. This method is illustrated on the examples of two classes of kinematic modeling surfaces: nonruled and ruled. In the paper we have presented

the cases images of such surfaces as surfaces of revolution, canal surfaces, developable surfaces, hyperboloids of one sheet, oblique surfaces, helicoids and several others, as well as listings of programs for their modeling. The presented material may be useful for the readers who are of interest in computer geometry; also it may help in development of modern technologies of three-dimensional modeling.

**Keywords:** analytical and kinematic methods of defining surfaces, not ruled and ruled surfaces, surfaces of revolution, canal surface, developable and non-developable surface, space mode of FMSLogo programming environment, right bank / left bank, upgradient / downgradient, left / right, forward / back.

### Введение

Известны 2 основных способа задания поверхностей:

1. Аналитический - при помощи уравнений;
2. Кинематический – перемещением кривых в пространстве.

Первый способ используется при изучении поверхностей в аналитической и дифференциальной геометрии, второй – в начертательной геометрии.

При аналитическом задании поверхностей удобно представлять их параметрическими уравнениями вида

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (1)$$

где  $u \in (a, b), v \in (c, d)$ .

Семейства линий  $u = \text{const}, v = \text{const}$  образуют координатную сеть, так что через каждую точку поверхности проходит только одна линия семейства. Линии этих семейств называются координатными линиями, а множество всех координатных линий одного семейства создают каркас поверхности. При изображении поверхностей, заданных аналитически удобно строить изображения каркаса поверхности координатными линиями с некоторым шагом. На рис. 1 показано изображение каркаса поверхности, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = k \cdot u, \\ y = 0.3 \cdot b \cdot (u \cdot \sin 2 \cdot v + v \cdot \cos 3 \cdot u), \\ z = k \cdot v. \end{cases} \quad (2)$$

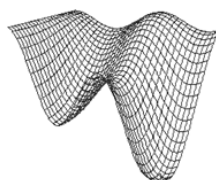


Рис. 1. Каркас поверхности, образованный координатными линиями

## **1. Задание кинематических поверхностей**

Кинематический способ предполагает формирование поверхности в результате перемещения одной кривой  $U$  (образующей) по другой кривой  $V$  (направляющей) [3]. При классификации кинематических поверхностей мы придерживаемся подхода Пираловой О.Ф. [3].

Все поверхности, задаваемые кинематическим способом, можно разбить на 2 класса:

- нелинейчатые, образующие которых не являются прямыми;
- линейчатые, образующие которых являются прямыми.

### **1.1. Нелинейчатые поверхности**

В статье будут рассматриваться нелинейчатые поверхности двух подклассов:

- поверхности вращения, образованные вращениями образующей;
- каналовые поверхности, образованные движением образующей замкнутой плоской линии вдоль некоторой криволинейной направляющей [4]:

а) параллельно какой-либо плоскости — каналовые поверхности с плоскостью параллелизма;

б) перпендикулярно к направляющей линии — прямые каналовые поверхности.

Если каркас формируется окружностями переменного радиуса, то поверхность – циклическая, а при постоянном радиусе окружности – трубчатая.

### **1.2. Линейчатые поверхности**

Также будут рассмотрены линейчатые поверхности двух подклассов:

1) развертывающиеся линейчатые поверхности, которые путем изгиба могут быть совмещены с плоскостью;

2) неразвертывающиеся линейчатые поверхности или косые, которые путем изгиба не могут быть совмещены с плоскостью.

Семейство образующих прямых линейчатой поверхности представляет собой ее каркас.

Существует только три вида развертывающихся линейчатых поверхностей: торсы, конические и цилиндрические.

а. Торсом называют поверхность, описываемую движением прямой-образующей, касающейся некоторой пространственной кривой – направляющей.

б. Коническая поверхность образуется движением прямой-образующей, проходящей через некоторую фиксированную точку и через точки направляющей кривой.

с. Цилиндрическая поверхность образуется движением прямой-образующей, проходящей через точки направляющей кривой параллельно некоторой заданной прямой.

Неразвертывающиеся линейчатые поверхности в общем случае образуются движением прямолинейной образующей по трем направляющим линиям, которые однозначно задают закон ее перемещения. Направляющие линии могут быть кривыми и прямыми. Общий случай линейчатой поверхности - семейство образующих прямых, пересекающих три заданные пространственные кривые.

В статье будут рассмотрены некоторые из таких поверхностей.

#### 1. Однополостный гиперболоид

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая образуется при перемещении прямой линии, пересекающей одновременно три скрещивающиеся прямые линии (направляющие).

#### 2. Прямой цилиндроид

Прямым цилиндроидом называется поверхность, образованная движением прямой линии, скользящей по двум криволинейным направляющим, не принадлежащим одной плоскости, и остающейся во всех своих положениях параллельной некоторой заданной плоскости. Эта плоскость называется плоскостью параллелизма. Одна из направляющих должна лежать в плоскости, перпендикулярной плоскости параллелизма.

#### 3. Косая плоскость

Косой плоскостью называется поверхность, образованная движением прямой линии, скользящей по двум скрещивающимся прямым и остающейся во всех своих положениях параллельной некоторой плоскости параллелизма.

Косую плоскость называют также гиперболическим параболоидом.

#### 4. Геликоид

Поверхность, образованная винтовым движением прямой линии, называется линейчатой винтовой поверхностью - геликоидом (винтовое движение характеризуется вращением вокруг некоторой оси  $l$  и поступательным перемещением, параллельным этой оси).

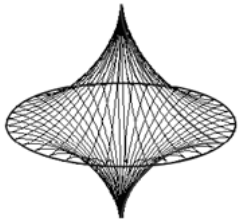
## 2. Моделирование кинематических поверхностей

Кинематический способ моделирования поверхностей в среде FMSLogo опирается на пространственный режим, в котором графический исполнитель команд может выполнять перемещения, меняющие его углы Эйлера, двигаться вперед/назад. В статье автора [2] аналогичный подход применялся для моделирования плоских кривых. В локализованной версии FMSLogo [1] соответствующие базисные команды называются ПРАВЫЙКРЕН/ЛЕВЫЙКРЕН, УКЛОНВВЕРХ/УКЛОНВНИЗ, НАПРАВО/НАЛЕВО, ВПЕРЕД/НАЗАД.

В данном пункте статьи для каждой рассматриваемой кинематической поверхности описываются ее образующие, направляющие и закон перемещения. Показано изображение каркаса поверхности данного вида и приведен листинг программы на Logo, рисующей этот каркас.

### 2.1. Моделирование поверхностей вращения

Поверхность вращения образуется произвольной кривой (плоской или пространственной) при ее вращении вокруг неподвижной оси. Каждая точка образующей при вращении вокруг оси описывает окружность с центром на оси вращения. Эти окружности называют параллелями. Плоскости, проходящие через ось поверхности вращения, называют меридиональными, а линии, по которым они пересекают поверхность, — меридианами. На рис. 2 показан каркас поверхности вращения, образованной вращением астроиды вокруг оси симметрии. Выделенные на каркасе линии: нулевая параллель - экватор, часть одного из меридианов.

 <p>Рис. 2. Поверхность вращения</p>	<pre> Это астр :a   для [t 0 2*pi 0.0174][вперед (произведение 1.5 :a radsin 2*:t) направо 1]   лв 2 нов_хуз 0 0 0   Конец   Это n_вращ :a     Пусть "rad 180/n     повтори 20 [астр :a пра- выйкрен 9]     nn вn 2*:rad вверх 90 по     окружность 2*:rad   Конец         </pre>
--	---

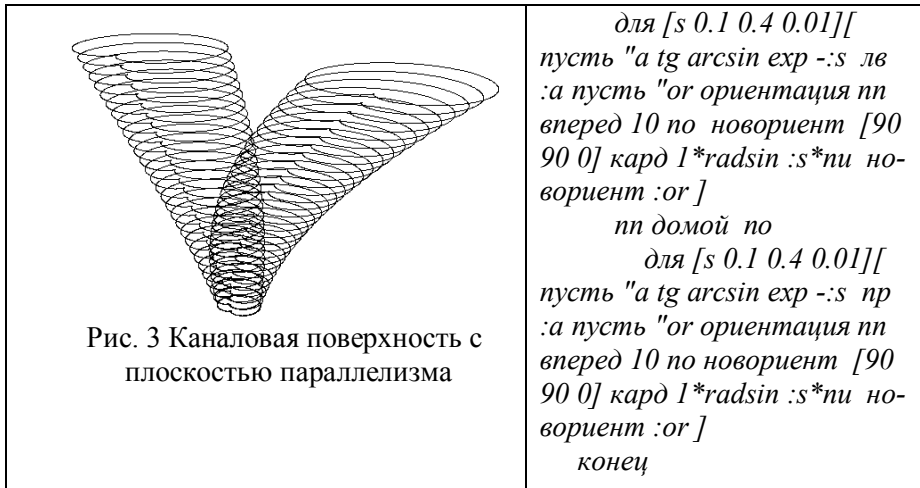
### 2.2. Моделирование каналовых поверхностей

Каналовая поверхность образуется каркасом замкнутых плоских сечений, определенным образом ориентированных в пространстве. Площади этих сечений могут оставаться постоянными или монотонно изменяться в процессе перехода от одного сечения к другому. Ранее указывалось существует 2 типа каналовых поверхностей: с плоскостью параллелизма и прямые.

а) Каналовые поверхности с плоскостью параллелизма

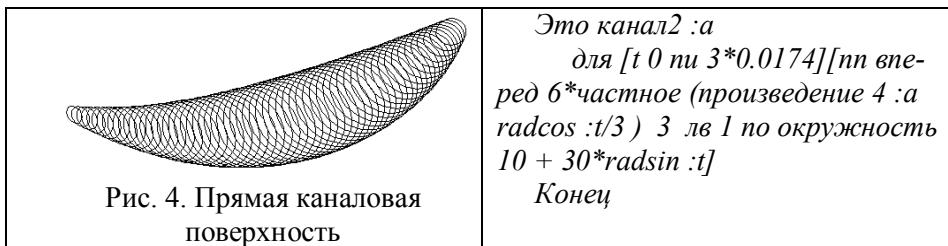
На рис. 3 показан каркас поверхности с плоскостью параллелизма, образованной перемещением кардиоиды-образующей переменного радиуса вдоль полукубической параболы-направляющей параллельно фиксированной направляющей плоскости.

	<pre> это кард :a   для [t 0 3*pi 0.0174][вперед частное (про- изведение 4 :a radcos :t/3 ) 3 лв 1 ]   конец   это канал l   по         </pre>
--	--



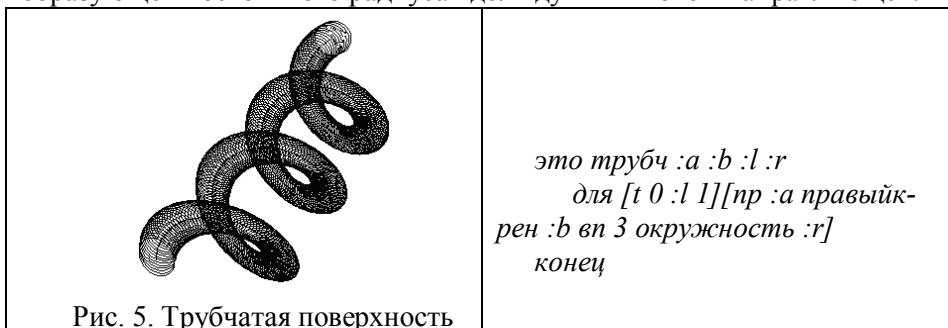
б) Прямые каналовые поверхности

На рис. 4 показан каркас прямой каналовой поверхности, образованной перемещением окружности-образующей переменного радиуса вдоль дуги кардиоиды-направляющей, так чтобы плоскость окружности и направляющая были перпендикулярны. Так как образующая окружность, то данный пример является одновременно примером циклической поверхности.



с) Трубочатая поверхность

Трубочатая поверхность получается при движении окружности постоянного радиуса по криволинейной направляющей; плоскость окружности все время остается перпендикулярной к направляющей. На рис. 5 показан каркас трубчатой поверхности, образованной перемещением окружности-образующей постоянного радиуса вдоль дуги винтовой-направляющей.



На рис. 6 показана поверхность Эшера, полученная перемещением окружности вдоль трилистника.

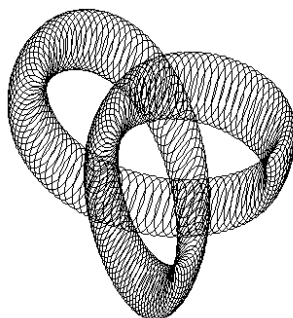


Рис. 6. Поверхность Эшера

### 2.3. Моделирование разворачивающихся поверхностей

#### а) Торсы

Торс является линейчатой поверхностью с одной криволинейной направляющей называемой ребром возврата. Поверхность торса образуется движением по ребру возврата касательной к ней. На рис. 7 показан каркас винтового торса образованного касательными к винтовой линии.

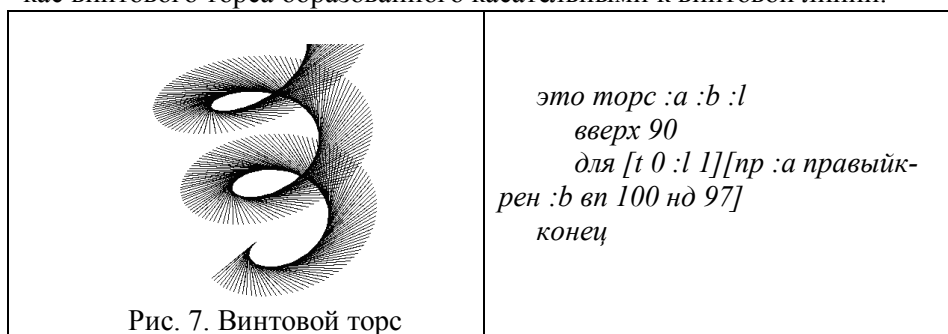


Рис. 7. Винтовой торс

#### б) Коническая поверхность

Все прямолинейные образующие конической поверхности пересекаются в собственной точке, вершине S. Ребро возврата, вырождается в собственную точку S. Коническая поверхность однозначно определяется прямолинейной образующей, кривой направляющей и точкой S. На рис. 8 показан каркас круговой конической поверхности.

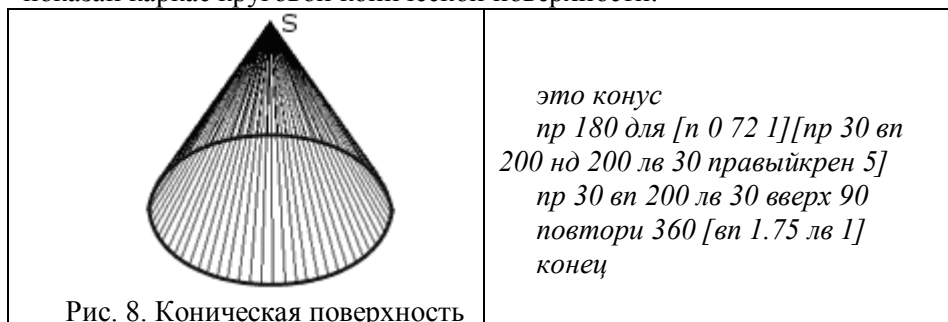
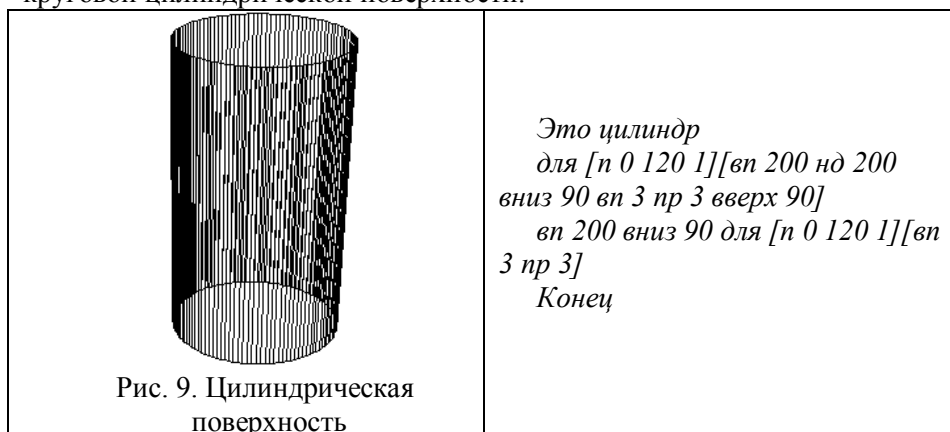


Рис. 8. Коническая поверхность

б) Цилиндрическая поверхность

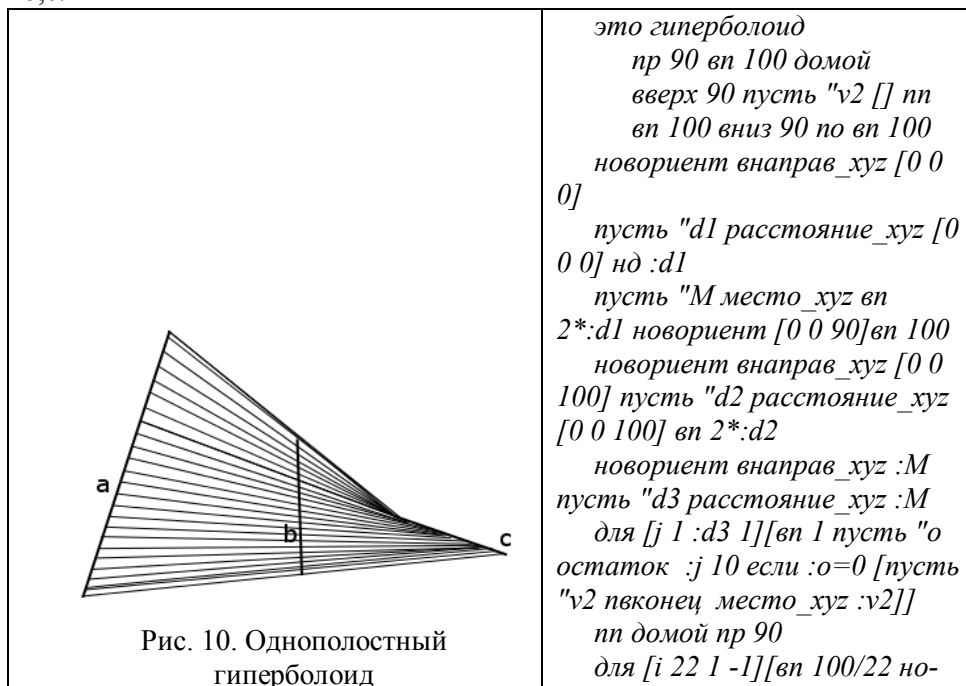
Отличие цилиндрической поверхности от конической поверхности состоит лишь в том, что образующие цилиндрической поверхности параллельны (пересекаются в несобственной точке). На рис. 9 показан каркас круговой цилиндрической поверхности.



**2.4. Моделирование однополостного гиперboloида**

а) Однополостный гиперboloид общего вида

Поверхность однополостного гиперboloида общего вида может быть получена при движении прямолинейной образующей по трем скрещивающимся прямым, не параллельным одной плоскости. На рис. 10 показан каркас однополостного гиперboloида заданного направляющими а, б, с.

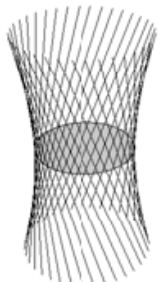




	<pre> вориент внаправ_хуз элемент :i :v2 пусть "d4 расстояние_хуз элемент :i :v2 по вп :d4 Нд :d4 новориент [0 0 90] жди 10] Конец         </pre>
--	---

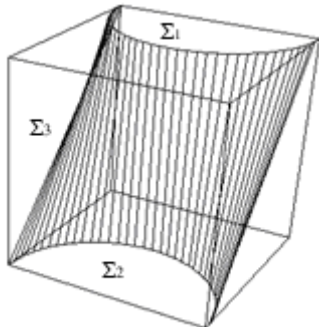
б) Однополостный гиперboloид вращения

Однополостный гиперboloид вращения можно получить перемещением прямой, образующей некоторый угол  $\varphi$  с направляющей плоскостью  $\Sigma$ , по точкам окружности, лежащей в этой плоскости. На рис. изображен каркас гиперboloида вращения, представляющих собой семейство прямых проходящих через точки горловой окружности и наклоненных к плоскости окружности под одним и тем же углом.

	<pre> это гип_вр пп домой пр 90 повтори 36[ по повтори 10[вп 1 вверх 1] лв 70 пп вп 150 по нд 300 пп вп 150 пр 70] конец         </pre>
<p>Рис. 11. Однополостный гиперboloид вращения</p>	

### 2.5. Моделирование прямого цилиндрида

На рис. 12 показан каркас прямого цилиндрида, образованного прямолинейными образующими, проходящими через точки полуокружностей лежащих в плоскостях  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ , параллельно плоскости параллелизма  $\Sigma_3$ .

	<pre> это цилиндриод пусть "v1 [] пусть "v2 [] пусть "rad 180/пи по повтори 4[повтори 4[вп 3*:rad пр 90]вп 3*:rad вниз 90] вниз 90 повтори 36[пусть "v1 пвконец место_хуз :v1 повтори 5[вп 1.5 пр 1] ] пп пр 180 вп 3*:rad вверх 90 вп 3*:rad лв 90 вп 3*:rad пр 90 вверх 90 по повтори 36[пусть "v2 пвконец ме- сто_хуз :v2 повтори 5[вп 1.5 пр 1] ] для [i 1 36 1] [пп новместо_хуз элемент :i :v1 новориент вна- прав_хуз элемент :i :v2 пусть "d рас-         </pre>
<p>Рис. 12. Прямой цилиндриод</p>	

	<p><i>стояние_хуз элемент :i :v2 по вп :d нд :d] конец</i></p>
--	--

**2.6. Моделирование косо́й поверхности**

На рис.13 показана косо́я плоскость (гиперболический параболоид) получен при скольжении прямой по двум скрещивающимся прямолинейным направляющим (на чертеже выделены), при этом образующая все время остается параллельной плоскости параллелизма  $\Sigma$ .

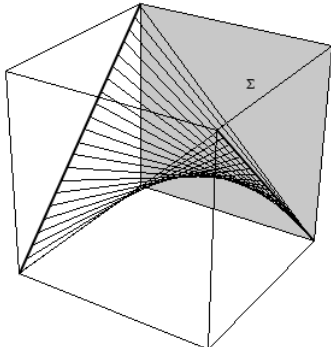
	<p><i>Это косо́я пусть "v1 [] пусть "v2 [] вверх 90 нп вп 150 вниз 135 по Для [t 0 210 1][вперед 1 пусть "o остаток :t 10 если :o=0 [пусть "v1 пвконец место_хуз :v1]] пп домой пр 90 вп 150 вверх 90 вп 150 лв 90 вп 150 лв 135 по Для [t 0 210 1][вперед 1 пусть "o остаток :t 10 если :o=0 [пусть "v2 пвконец место_хуз :v2]] для [i 1 22 1][пп новместо_хуз элемент :i :v1 новориент внаправ_хуз элемент :i :v2 по вп расстояние_хуз элемент :i :v2] Конец</i></p>
--	--

Рис. 13. Косо́я поверхность

**2.7. Моделирование прямого геликоида.**

Прямой геликоид — поверхность, образованная движением прямой, вращающейся вокруг оси и перпендикулярной к ней и одновременно поступательно движущейся в направлении этой оси, причем скорости этих движений пропорциональны. Направляющими служат винтовая линия и прямая. На рис. 14 показан каркас прямого геликоида.

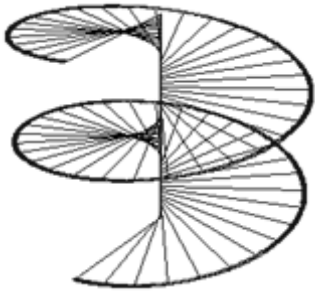
	<p><i>это геликоид новыйразмерпера 2 новыйцветпера 4 вп 150 нд 150 повтори 60 [по вверх 90 новыйраз- мерпера 1 новыйцветпера 0 вп 100 нд 100 вниз 90 повтори 12[вверх 90 нп вп 100 новыйразмерпера 1 новыйцветпера 1 по окружность 2 нп нд 100 вниз 90 вп 0.208 правыйкрен 1]] по вверх 90 новыйразмерпера 1 но- выйцветпера 0 вп 100 нд 100 вниз 90 конец</i></p>
---	--

Рис. 14. Прямой геликоид

### Заключение

Рассматриваемый в статье метод кинематического моделирования поверхностей в среде FMSLogo является вполне оригинальным и представляет практический интерес. В дальнейшем планируется расширить перечень моделируемых поверхностей.

### Литература

1. Баглаев И. И. Русская локализация среды программирования FMSLogo // Материалы Байкальской региональной научно-практической конференции с международным участием «Инфокоммуникационные образовательные технологии: модели, методы, средства, ресурсы». 1-5 июля 2009 г. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского государственного университета, 2009. — С. 227–232.
2. Баглаев И.И. Моделирование плоских кривых в среде FMSLogo // Вестник Бурятского государственного университета.— Вып. 9. — С. 252–257.
3. Пиралова О.Ф. Инженерная графика: краткий курс: [учебник для вузов]. — Москва: Акад. Естествознания, 2009. — 159 с.
4. Митюшов Е. А., Беляева З. В. Кинематический метод построения канальных поверхностей [Электронный ресурс]// Прикладная геометрия.- 2010.— Вып. 12.— № 25.— с. 1–10.— URL:  
[http://www.apg.mai.ru/Volume12/Number25/vol1225\\_1.pdf](http://www.apg.mai.ru/Volume12/Number25/vol1225_1.pdf)

### References

1. Baglaev I. I. Russkaya lokalizatsiya sredy programmirovaniya FMSLogo [Russian Localization of FMSLogo Programming Environment]. Infokommunikatsionnye obrazovatel'nye tekhnologii: modeli, metody, sredstva, resursy – *Info-Communication Educational Technologies: Models, Methods, Tools, Resources*. Proc. Baikal regional sci.-pract. conf. with int. participation (July 1–5, 2009). Ulan-Ude: Buryat State University Publ., 2009. Pp. 227–232.
2. Baglaev I. I. Modelirovanie ploskikh krivykh v srede FMSLogo [Modeling of Plane Curves in FMSLogo Environment]. *Vestnik Buryatskogo gosuniversiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2010. V. 9. Pp. 252–257.
3. Piralova O. F. *Inzhenernaya grafika: kratkii kurs* [Engineering Graphics: a Short Course]. Moscow: Academy of Natural Sciences Publ., 2009. 159 p.
4. Mityushov E. A., Belyaeva Z. V. Kinematicheskii metod postroeniya kanalovykh poverkhnostei [Kinematic Method of Constructing Canal Surfaces]. *Prikladnaya geometriya – Applied Geometry*. 2010. V. 12. No. 25. Pp. 1–10. Available at:  
[http://www.apg.mai.ru/Volume12/Number25/vol1225\\_1.pdf](http://www.apg.mai.ru/Volume12/Number25/vol1225_1.pdf)

Баглаев Игорь Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, e-mail: [bii@bsu.ru](mailto:bii@bsu.ru)

Igor I. Baglaev, PhD, A/Professor, Department of Geometry and Methods of Teaching Mathematics, Buryat State University.

УДК 004.932

doi: 10.18101/2304-5728-2016-1-60-72

© М. В. Харинов

### Основы модели квазиоптимальных приближений изображения

В статье обобщаются результаты исследований, представленных в серии предыдущих публикаций по, так называемой, «проблеме сегментации» или автоматического выделения объектов на изображении. Для компьютерного выделения объектов формулируется постановка задачи и предлагается модель сегментации цифрового изображения. Перечисляются основные положения модели. Приводятся результаты очередного эксперимента и обсуждаются особенности организации скоростных вычислений в ограниченном объеме оперативной памяти компьютера.

**Ключевые слова:** сегментация, кусочно-постоянное приближение, суммарная квадратичная ошибка, минимизация, обратимые вычисления.

© М. V. Kharinov

### Fundamentals of the model of image quasi-optimal approximations

In the article the results of researches and publications on the so-called *segmentation problem*, or automatic detection of objects in the image, were summarized. For the automatic object detection we formulated the problem statement, and proposed a model for segmentation of digital images. The article presented the results of current experiments and discussed the features of high-speed computing in a limited amount of RAM.

**Keywords:** segmentation, piecewise constant approximation, total squared error, minimization, reversible computing.

### Введение

При современных темпах внедрения технологий искусственного интеллекта (ИИ) в ближайшие годы следует ожидать появления эффективных средств создания продуктов ИИ благодаря унификации прикладных решений. Указанная цель декларируется в проекте PPAML (Probabilistic Programming for Advancing Machine Learning) американского агентства DARPA (Defense Advanced Research Projects Agency), который начат в 2013 и закончится в 2017 г.<sup>1</sup> В результате планируется разработать программные средства, поддерживающие эффективное создание приложений ИИ силами рядовых инженеров-программистов.

В области машинного зрения для автоматизации распознавания лиц,

<sup>1</sup> <https://ru.wikipedia.org/wiki/PPAML>, <http://www.darpa.mil/program/probabilistic-programming-for-advancing-machine-Learning>

искусственных и природных объектов на дистанционных изображениях, оценки расстояний по стереоснимкам, а также в многочисленных других типовых задачах обработки изображений цель сводится к созданию программного средства, помогающего неискушенному в обработке изображений программисту выделять для дальнейшего распознавания «объекты интереса» среди многих объектов, детектируемых на изображении компьютером. При этом программисту необходимо понимать и представлять результаты предварительной обработки изображения в наглядной модели.

В наглядной модели изображение и объекты описываются в матричной (табличной) форме. Подобная модель необходима для первоначального анализа и упорядочения визуальных данных так, чтобы программист без особых усилий представлял, какие объекты «видит» компьютер на изображении и в терминах этих объектов программировал выделение и распознавание целевых объектов сцены посредством измерения и запоминания характерных признаков объектов, фильтрации объектов по заданным признакам и др. стандартных приемов обработки.

Однако, вычисления с объектами, заданными заранее не установленными множествами пикселей, без специальных приемов оптимизации требуют чрезмерно много памяти и времени обработки. Поэтому для практической реализации наглядной модели оказывается необходимым разработать эквивалентную модель вычислений в терминах структуры данных, поддерживающей скоростную обработку изображения в ограниченном объеме оперативной памяти компьютера. Подходящая структура данных на основе динамических деревьев Слейтора-Тарьяна [1] в приложении к адаптивной иерархической сегментации изображений была предложена в СПИИРАН в начале 90-х годов прошлого столетия [2] и в настоящее время начала эксплуатироваться также за рубежом [3].

Развитие аппарата адаптивной иерархической сегментации [2,4,5] в сочетании с активно развиваемыми в США методами сегментации изображения посредством оптимальных кусочно-постоянных приближений [6, 7] и обратимых вычислений [8] привело к созданию модели иерархической квазиоптимальной сегментации [9–12], обсуждаемой в статье.

### 1. Постановка задачи

В отличие от традиционных методов сегментации, ориентированных на выделение заранее заданных *целевых* объектов, в модели квазиоптимальной сегментации ставится задача перечисления объектов на изображении. Объектами считаются кластеры пикселей, в частности, связанные сегменты цветового изображения, которые составляют оптимизированные разбиения изображения. Качество разбиения оценивается [13] по среднеквадратичному отклонению  $\sigma$  изображения от своего *кусочно-постоянного приближения*, заполненного пикселями с усредненными значениями яркости, или по суммарной квадратичной ошибке  $E = 3N\sigma^2$ , где  $N$  — число пикселей в изображении, а коэффициент 3 учитывает число цветовых  $R, G, B$  компонент. При этом полагается, что выделение

объектов достигается вычислением не одного или нескольких приближений изображения, а аппроксимацией всей последовательности оптимальных приближений иерархической последовательностью квазиоптимальных приближений (рис.1).

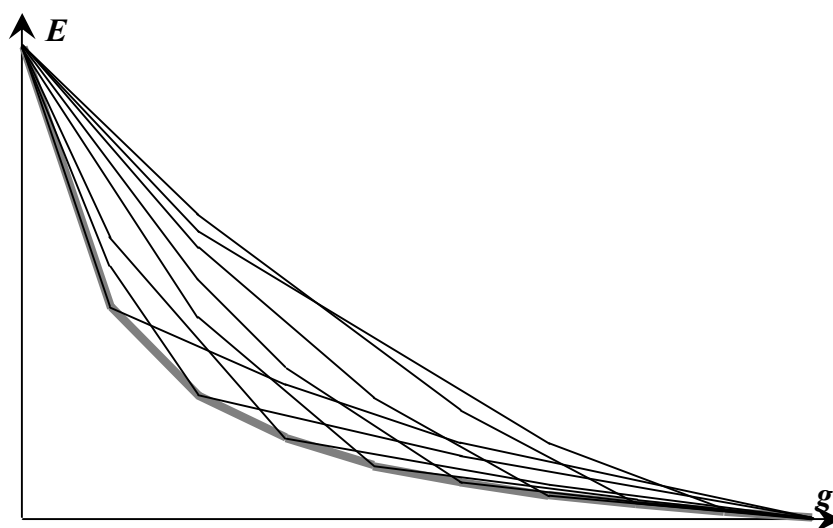


Рис. 1. Задача аппроксимации оптимальных приближений квазиоптимальными приближениями

На рис. 1 для последовательностей приближений изображения показаны графики суммарной квадратичной ошибки аппроксимации изображения  $E$  в зависимости от числа кластеров  $g$ , изменяющегося от 1 до  $N$ . Нижняя серая жирная кривая, отвечает оптимальным приближениям. Верхние кривые отвечают вариантам последовательности квазиоптимальных приближений.

Последовательность оптимальных приближений изображения, вообще говоря, не является иерархической. Поэтому последовательность квазиоптимальных приближений вычисляется не однозначно. Поскольку последовательность оптимальных приближений описывается выпуклой кривой, в модели полагается, что квазиоптимальные приближения также должны описываться выпуклыми кривыми (рис. 1).

Из рис. 1 следует, что в модели квазиоптимальных приближений не всякое разбиение изображения может являться результатом сегментации. Например, изображение из не всех одинаковых пикселей не может разделиться на пару совпадающих по средней яркости частей, так как условие выпуклости тогда нарушится. Характерно, что для итеративных алгоритмов сегментации выпуклая зависимость  $E$  от  $g$ , как правило, нарушается при числе сегментов в начальном диапазоне, приблизительно, от 1 до 100, и при некотором числе сегментов достигается точка перегиба, которую в алгоритмах слияния часто используют для останова процесса итеративной сегментации с целью нахождения кусочно-постоянного приближения

изображения с выделенными «объектами интереса» [14]. В обсуждаемой модели объекты задаются полными иерархическими последовательностями приближений с числом кластеров 1 до  $N$  и все являются целевыми. При этом нарушений выпуклости последовательности значений  $E$  не допускается, что способствует снижению ошибки аппроксимации  $E$  и устойчивому выделению объектов при модификации содержания изображения [11].

## 2. Модель квазиоптимальной иерархической сегментации цифрового изображения

На сегодняшний день, модель выражается следующими пятью основными положениями.

**Положение 1.** Изображение состоит из изображений, которые задаются кусочно-постоянными приближениями и именуются «объектами».

**Положение 2.** Объекты составляют бинарную иерархию.

**Положение 3.** Результирующая последовательность квазиоптимальных приближений изображения с различным числом кластеров описывается выпуклой зависимостью суммарной квадратичной ошибки.

**Положение 4.** Любая иерархическая последовательность приближений изображения по определенному алгоритму преобразуется в последовательность приближений, описываемых выпуклой последовательностью значений суммарной квадратичной ошибки  $E$  или среднеквадратичного отклонения  $\sigma$  приближения от изображения.

**Положение 5.** Последовательность квазиоптимальных приближений представима в виде изображения, называемого «инвариантным представлением».

В первом положении утверждается, что изображение структурировано и рассматривается как множество, состоящее из элементов одной природы, которые обрабатываются по единым алгоритмам. При этом термины «изображение», «объект», «кластер пикселей», в частности, «сегмент изображения», употребляются как синонимы. Термин «объект» преимущественно используется при рассмотрении одного изображения как элемента другого изображения.

Благодаря второму положению в вычислениях удастся обойти  $NP$ -трудную задачу получения оптимальных приближений изображения, которая заменяется полиномиально сложной задачей аппроксимации неиерархической последовательности оптимальных приближений посредством иерархической последовательности квазиоптимальных приближений изображения.

Третье положение устанавливает закон, согласно которому квазиоптимальные приближения изображения сохраняют аналогичное свойство оптимальных приближений. При этом для множества получаемых кластеров необходимо, чтобы любая тройка вложенных друг в друга объектов описывалась выпуклой последовательностью значений суммарной квадратичной ошибки.

Согласно четвертому положению любая иерархическая последовательность приближений преобразуется в последовательность *квазиоптимальных* приближений изображения, которые:

- ограничены по числу сегментов;
- близки к изображению по суммарной квадратичной ошибке;
- в зависимости от числа кластеров  $g$  описываются выпуклой последовательностью значений  $E_g$  суммарной квадратичной ошибки:

$$E_g \leq \frac{E_{g-1} + E_{g+1}}{2}, \quad g = 2, 3, \dots, N-1.$$

Согласно пятому положению любую иерархическую последовательность приближений можно задать как новое изображение, которое называется «инвариантным представлением», так как не меняется при определенной модификации исходного изображения [4,9]. Таким образом, изображение описывается семейством переплетающихся выпуклых кривых рис. 1 и массивом инвариантных представлений, порождающих *инвариантное пространство*, которое отличается от традиционного признакового пространства тем, что в качестве признака учитывает единственную среднюю яркость по-разному усредняемых пикселей и не меняется при масштабировании изображения посредством дублирования пикселей, а также при линейной модификации яркостей пикселей изображения.

В программной реализации практический смысл модели квазиоптимальной иерархической сегментации состоит в том, что для изображения, скажем, из 1 млн. пикселей программист получает 1 млн. квазиоптимальных приближений и 1 млн.999 тыс. 999 вложенных изображений объектов, которые машина строит «сама». При этом квазиоптимальные приближения лучше оптимальных тем, что составляют иерархическую последовательность и поэтому в кодированном виде удерживаются в RAM, быстро строятся, преобразуются, а также оказываются гораздо эффективней для оперативного анализа признаков объектов и выполнения другой обработки. Неоднозначность аппроксимации оптимальных приближений квазиоптимальными отражает двойственную неоднозначность объектов, детектируемых в контексте решения различных прикладных задач. При этом каждый объект определяется выбором иерархической последовательности приближений и номером вложения в большие объекты. Каждая иерархическая последовательность приближений кодируется как изображение (инвариантное представление), и исходная картинка независимо от масштабирования и линейного изменения яркости преобразуется в несколько инвариантных картинок, которые обеспечивают устойчивое выделение объектов посредством аппарата признаковых пространств [13].

### **3. Применение обратимого слияния кластеров для минимизации ошибки аппроксимации**

Генерация иерархической последовательности квазиоптимальных приближений, выполняется в алгоритмах слияния/разделения кластеров пик-



селей, в частности, сегментов изображения из условия минимизации суммарной квадратичной ошибки.

В вычислениях поддерживается *обратимая* операция слияния кластеров, при которой для каждого кластера 1 автоматически запоминается пара кластеров 2, 3, слиянием которых он получен. В этом случае, аналитическое обоснование модели выражается несколькими элементарными формулами для приращения суммарной квадратичной ошибки  $\Delta E$  при трех базовых операциях с кластерами пикселей 1, 2, 3 из  $n_1, n_2, n_3$  пикселей со значениями  $I_1, I_2, I_3$  трехмерных средних яркостей по цветовым компонентам изображения [5, 9–12]:

1. Слияние (*merge*):  $\Delta E_{merge}(1, 2) = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \|I_1 - I_2\|^2 \geq 0$  ;
2. Разделение (*divide*):  $\Delta E_{divide}(1) = -\Delta E_{merge}(2, 3) \leq 0$  ;
3. Коррекция (*correct*):

$$\Delta E_{correct} = \frac{n_2 n_3}{n_2 + n_3} \|I_3 - I_2\|^2 - \frac{n_1 n_3}{n_1 - n_3} \|I_3 - I_1\|^2 ,$$

где во второй формуле  $1 \equiv 2 \cup 3$ , в третьей формуле  $3 \subset 1$ , а знак  $\| \|$  обозначает евклидово расстояние.

Первые две операции «слияния»/«разделения» обеспечивают обратимое слияние кластеров для фиксированного иерархического множества кластеров или сегментов, вычисляемой формы и размеров. Третья операция «коррекции» состоит в реклассификации пикселей из одного кластера в другой, что влечет модификацию иерархического множества кластеров пикселей изображения.

Три перечисленных операции порождают множество алгоритмов получения квазиоптимальных приближений изображения.

Критичной и определяющей по скорости обработки является первоначальная генерация приближений изображения, которая в модели выполняется в методах итеративного слияния кластеров пикселей или смежных сегментов изображения, выбираемых по критерию минимизации приращения суммарной квадратичной ошибки  $\Delta E_{merge}$  :

$$\Delta E_{merge}(1, 2) = \min .$$

Логически самым простым методом, позволяющим при этом сразу получить выпуклую иерархическую последовательность приближений изображения, является метод Уорда [15], в котором анализируются всевозможные пары кластеров пикселей. Однако, расчеты методом Уорда занимают много времени, особенно, в случае изображений большого размера. Для снижения вычислительной сложности при минимизации  $\Delta E_{merge}$  анализируют и объединяют друг с другом только смежные сегменты, как в модели Мамфорда-Шаха [6, 7], что приводит к нарушению выпуклой зависимости ошибки аппроксимации  $E$  от числа сегментов и снижает эф-

фективность ее минимизации, особенно при малом числе сегментов. Для достижения компромисса методы обработки по Мамфорду-Шаху и по Уорду выполняются один за другим, что снижает детализацию изображения до ограниченного числа суперпикселей [9-12]. Для развития модели квазиоптимальных приближений без снижения общности рассуждений в настоящее время реализуется метод комбинированной сегментации/кластеризации, в котором метод кластеризации Уорда применяется для «редакции» сегментации по Мамфорду-Шаху из условия сохранения выпуклости последовательности значений  $E$ .

Для минимизации суммарной квадратичной ошибки в рамках модели квазиоптимальных приближений разработаны методы улучшения кластеризации и сегментации изображения, которые разделяются на два типа — глобальные и локальные.

При глобальном улучшении сегментации суммарная квадратичная ошибка снижается за счет циклического разделения надвое сегмента 1 в одном месте изображения с одновременным слиянием пары смежных сегментов 2, 3 в другом месте по критерию уменьшения суммарной квадратичной ошибки:

$$\Delta E_{divide}(1) + \Delta E_{merge}(2, 3) < 0,$$

где предполагается, что все три сегмента различны.

Метод назван *SI*-методом (Segmentation Improvement method). Одна версия метода предусмотрена для улучшения отдельного приближения изображения [10-12], другая — для улучшения иерархической последовательности приближений в целом [9]. Основное преимущество *SI*-метода состоит в том, что он эффективно справляется с улучшением грубой сегментации.

При локальном улучшении сегментации сегменты поглощают части смежных. Критерием выполнения исключения пикселей сегмента 3 из состава пикселей сегмента 1 и включения их в состав сегмента 2, смежного с сегментом 3, служит условие отрицательного приращения суммарной квадратичной ошибки:

$$\Delta E_{correct} < 0.$$

По существу, метод локального улучшения сегментации является усиленной версией метода *K*-средних в современной интерпретации [16]. Однако он эффективен только при условии предварительного глобального улучшения качества [9-12].

#### 4. Структура данных

В модели квазиоптимальных приближений изображения все вычисления проводятся в терминах деревьев Слейтора-Тарьяна, к которым в настоящее время добавляются адресные списки, заданные в виде циклов [9, 12]. Вместе они образуют «динамическую» сеть, которая «набрасывается» на пиксели для ускорения вычислений и экономии памяти (рис. 2).

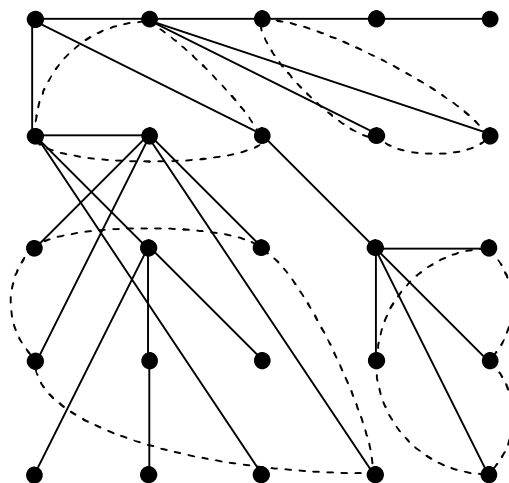


Рис. 2. Структура данных на основе динамических деревьев и циклов.

Циклы на рис. 2 обозначены пунктирными линиями.

На самом деле, машина работает не с пикселями, изображениями или объектами в матричном виде, а с массивами деревьев и массивами циклов, что достигается благодаря специально разработанному программно-алгоритмическому обеспечению вычислений в терминах деревьев Слейтора-Тарьяна. Характерно, что в отличие от традиционной интерпретации, при интерпретации деревьев по Слейтору-Тарьяну бинарная иерархия множеств описывается не бинарным, а нерегулярным деревом с произвольной структурой, что позволяет использовать их в контексте рассматриваемых задач квазиоптимальной аппроксимации изображения.

Благодаря использованию динамических деревьев Слейтора-Тарьяна снимаются ограничения по памяти и обеспечивается ускорение вычислений не менее, чем в 100 раз. Эффект применения сети на основе динамических деревьев достигается за счет того, что:

- метаданные, которые задают иерархическое множество кластеров, размещаются на том же множестве координат, что и сами данные;
- реализуется *обобщенный* механизм обратимых вычислений, когда любую стадию вычислений можно не только восстановить, но и получить в модифицированном виде, что особенно полезно при минимизации суммарной квадратичной ошибки  $E$ .

Развитие сетевой технологии решения проблемы сегментации посредством квазиоптимальных приближений изображения расширяет классическую область применения теории графов. С практической точки зрения, динамические сети на основе деревьев Слейтора-Тарьяна интересны тем, что, со временем, могут составить альтернативу общеупотребительным нейронным сетям и оказаться полезными при изучении механизмов зрительного восприятия человека и других живых систем.

### 5. Результаты эксперимента

Рис. 3 на примере стандартного цветового изображения иллюстрирует преобразование любой иерархической последовательности приближений изображения в иерархическую последовательность квазиоптимальных приближений.

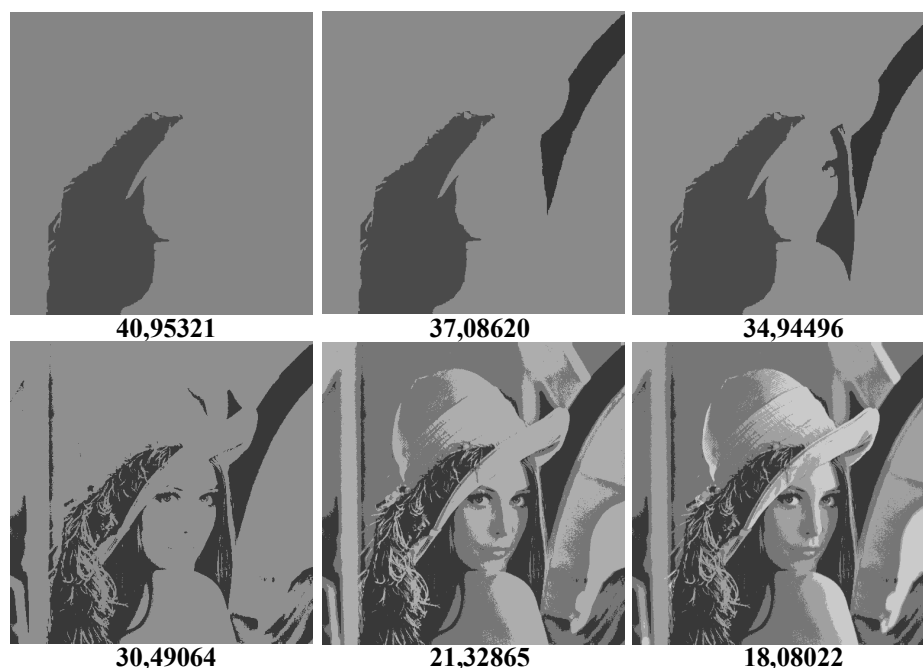


Рис. 3. Приближения изображения с 2, 3, 4 сегментами (вверху) и, соответственно, в 2, 3, 4 цветах (внизу).

Верхний ряд на рис.3 иллюстрирует иерархическую сегментацию в модели Мамфорда-Шаха, полученную итеративным слиянием смежных сегментов [6,7]. В нижнем ряду показана квазиоптимальная кластеризация пикселей изображения, индуцированная реструктуризацией множеств пикселей, которые составляют сегменты изображения, вычисленные по Мамфорду-Шаху. Под приближениями выписаны значения среднеквадратичного отклонения  $\sigma$  приближения от изображения.

Алгоритм состоит в том, что при слиянии сегментов, сопровождающемся убыванием приращения суммарной квадратичной ошибки, они сначала разделяются на части, которые затем соединяются в целое методом Уорда. В результате итеративного слияния/разделения возникающих кластеров формируется множество из  $2N-1$  кластеров пикселей, которые затем  $SI$ -методом [9] упаковываются в результирующую иерархическую последовательность из  $N$  приближений, описываемых выпуклой последовательностью значений ошибки аппроксимации  $E$ .

Графики на рис. 4 позволяют оценить эффект преобразования приближений из связанных сегментов изображения по Мамфорду-Шаху (верхняя

пунктирная кривая) в квазиоптимальные приближения обсуждаемым методом комбинированной сегментации/кластеризации (нижняя сплошная кривая).

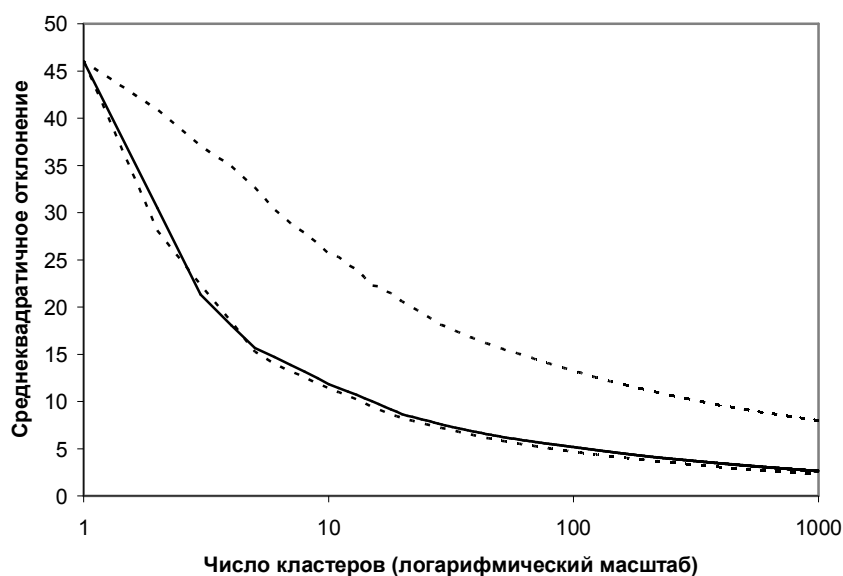


Рис. 4. Зависимость среднеквадратичного отклонения  $\sigma$  от числа кластеров  $g$  в диапазоне от 1 до 1000.

Нижняя пунктирная кривая описывает кластеризацию пикселей методом Уорда. Она переплетается со сплошной кривой, построенной для метода комбинированной сегментации/кластеризации. Однако если в предложенном методе сегментации/кластеризации метод Уорда применяется к тысячам кластеров пикселей, возникающих при разделении сегментов, то в оригинальном методе Уорда приходится анализировать сотни тысяч кластеров. Поэтому, наш метод существенно более перспективен для скоростной обработки.

В целом применение модели квазиоптимальных приближений для решения проблемы сегментации перспективно тем, что позволяет создавать алгоритмы для устойчивого автоматического выделения заранее не установленных объектов [11].

### Заключение

В статье подытожены результаты исследований по проблеме автоматического выделения объектов на цифровом изображении. Проблема возникла одновременно с обработкой изображений и до сих пор с ней сталкивается практически каждый программист, занимающийся машинным зрением. Если раньше при унификации решений для выделения и распознавания объектов упор делался на создание программ, ориентированных

на обучение специалистом-предметником, то сейчас наметилась тенденция разработки специального программного инструментария, рассчитанного на использование инженером-программистом. Роль последнего сводится к установлению соответствия между объектами, которые «видит» компьютер и объектами, которые видит человек. При этом решающее значение может иметь не применение сложившегося разнообразия подходов и решений, а проработанная единая модель низкоуровневого машинного зрения, которая совершенно необходима для исключения проб и ошибок, как при постановке, так и при решении задачи. По всей видимости, уже через несколько лет сегментация изображений станет предметом исследования немногочисленных команд профессионалов, а остальные специалисты будут пользоваться готовыми программными продуктами, подобно тому, как в настоящее время пользуются готовыми программами сжатия «без потерь».

За решением проблемы автоматического выделения объектов, вероятно, последует эффективное решение проблемы сжатия «с потерями» при условии минимизации потерь в модели квазиоптимальных приближений или другой эффективной модели.

#### Литература

1. Sleator D.D., Tarjan R.E. Self-Adjusting Binary Search Trees // Journal of the ACM. — 1985. — Vol. 32. — № 3. — P. 652–686.
2. Харинов М.В. Разработка динамических структур данных системы автоматизированного распознавания изображений / руков. В.В. Александров / Автореф. Дис. канд. технич. наук. — СПб., 1993. — 20 с.
3. Nock R., Nielsen F. Statistical Region Merging // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. — Vol. 26(11). — 2004. — P. 1452–1458.
4. Харинов М.В. Запоминание и адаптивная обработка информации цифровых изображений / Под ред. Р.М. Юсупова. — СПб.: Изд-во С.Петербург. ун-та, 2006. — 138 с.
5. Харинов М.В. Обобщение трех подходов к оптимальной сегментации цифрового изображения // Труды СПИИРАН. — 2013. — Вып. 2(25). — С. 294–316.
6. Mumford D., Shah J. Boundary detection by minimizing functionals, I // Proceedings of IEEE Computer. Vision Pattern. Recognition Conference. — San Francisco, 1985. — P. 22–26.
7. Bar L., Chan T.F., Chung G., Jung M., Vese L.A., Kiryati N., Sochen N. Mumford and Shah Model and Its Applications to Image Segmentation and Image Restoration // Handbook of Mathematical Methods in Imaging. — 2015. — P. 1539–1597.
8. Toffoli T. Reversible computing. — Springer Berlin Heidelberg. — 1980. — P. 632–644.
9. Kharinov M.V. Pixel Clustering for Color Image Segmentation // Programming and Computer Software. — 2015. — Vol. 41. — №. 5. — P. 258–

266.

10. Kharinov M.V. Model of the quasi-optimal hierarchical segmentation of a color image // *Journal of Optical Technology*.— 2015. — Vol. 82.— Issue 7.— P. 425–429.

11. Харинов М.В., Ханыков И.Г. Комбинированный метод улучшения сегментации изображения // *Вестник Бурятского государственного университета*. — Вып.9. Математика и информатика.— 2015. — С. 118–124.

12. Харинов М.В., Ханыков И.Г. Оптимизация кусочно-постоянного приближения сегментированного изображения. // *Труды СПИИРАН*. — 2015. — Вып. 3(40). — С. 183–202.

13. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности // М.: Финансы и статистика, 1989. — 607 с.

14. Redding N.J., Crisp D.J., Tang D.H., Newsam G.N. An efficient algorithm for Mumford–Shah segmentation and its application to SAR imagery // *Proc. Conf. Digital Image Computing Techniques and Applications (DICTA'99)*. — 1999. — P. 35–41.

15. Ward J.H., Jr. Hierarchical grouping to optimize an objective function. // *J. Am. Stat. Assoc.* — 1963. — Vol. 58.— Issue 301. — P. 236–244.

16. Dvoenko S.D. Meanless k-means as k-meanless clustering with the bipartial approach // *Pattern Recognition and Information Processing (PRIP'2014) / Proc. of the 12th Int. Conf.*— Minsk, 2014. — P. 50–54.

### References

1. Sleator D. D., Tarjan R. E. Self-Adjusting Binary Search Trees. *Journal of the ACM*. 1985. V. 32. No. 3. Pp. 652–686.

2. Kharinov M. V. *Razrabotka dinamicheskikh struktur dannykh sistemy avtomatizirovannogo raspoznavaniya izobrazhenii. Avtoref. dis. kand. tekhn. nauk* [Development of Dynamic Data Structures of the System for Automated Image Recognition. Author's abstract of Cand. techn. sci. diss.]. St. Petersburg, 1993. 20 p.

3. Nock R., Nielsen F. Statistical Region Merging. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* V. 26(11). 2004. Pp. 1452–1458.

4. Kharinov M. V. *Zapominanie i adaptivnaya obrabotka informatsii tsifrovyykh izobrazhenii* [Storing and Adaptive Processing of Digital Images Information]. St Petersburg: St Petersburg University Publ., 2006. 138 p.

5. Kharinov M. V. Obobshchenie trekh podkhodov k optimal'noi segmentatsii tsifrovogo izobrazheniya [Generalization of Three Approaches to the Optimal Segmentation of Digital Images]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2013. V. 25. No. 2. Pp. 294–316.

6. Mumford I. D., Shah J. Boundary Detection by Minimizing Functionals. *Proceedings of IEEE Computer. Vision Pattern. Recognition Conference*. San Francisco, 1985. Pp. 22–26.

7. Bar L., Chan T. F., Chung G., Jung M., Vese L. A., Kiryati N., Socher N. Mumford and Shah Model and Its Applications to Image Segmentation

and Image Restoration. *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*. 2015. Pp. 1539–1597.

8. Toffoli T. *Reversible computing*. Springer Berlin Heidelberg, 1980. Pp. 632–644.

9. Kharinov M. V. Pixel Clustering for Color Image Segmentation. *Programming and Computer Software*. 2015. – Vol. 41, –No. 5, – pp. 258–266.

10. Kharinov M. V. Model of the Quasi-Optimal Hierarchical Segmentation of a Color Image. *Journal of Optical Technology*. 2015. V. 82, Iss. 7. Pp. 425–429.

11. Kharinov M. V., Khanykov I. G. Kombinirovannyi metod uluchsheniya segmentatsii izobrazheniya [A Combined Method of Improving Image Segmentation]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i informatika – Bulletin of Buryat State University. Mathematics and Computer Science*. No. 9. 2015. Pp. 118–124.

12. Kharinov M. V., Khanykov I. G. Optimizatsiya kusochno-postoyannogo priblizheniya segmentirovannogo izobrazheniya [Optimization of Piecewise Constant Approximation of Segmented Image]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2015. V. 3 (40). Pp. 183–202.

13. Aivazyan S. A., Bukhshtaber V. M., Enyukov I. S., Meshalkin L. D. *Prikladnaya statistika: Klassifikatsiya i snizhenie razmernosti* [Applied Statistics: Classification and Dimension Reduction]. Moscow: Finansy i statistika Publ., 1989. 607 p.

14. Redding N. J., Crisp D. J., Tang D. H., Newsam G. N. An Efficient Algorithm for Mumford–Shah Segmentation and Its Application to SAR Imagery. *Proc. Conf. Digital Image Computing Techniques and Applications (DICTA'99)*. 1999. Pp. 35–41.

15. Ward J. H., Jr. Hierarchical Grouping to Optimize an Objective Function. *J. Am. Stat. Assoc.* 1963. V. 58. Iss. 301. Pp. 236–244.

16. Dvoenko S. D. Meanless K-Means as K-Meanless Clustering with the Bi-Partial Approach. *Pattern Recognition and Information Processing (PRIP'2014)*. Proc. of the 12<sup>th</sup> Int. Conf. Minsk, 2014. Pp. 50–54.

*Харинов Михаил Вячеславович*, кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории Прикладной информатики Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации, e-mail: khar@iias.spb.su

*Mikhail V. Kharinov*, PhD in Engineering, Senior Researcher, Laboratory of Applied Informatics, St. Petersburg Institute of Informatics and Automation, RAS.



# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

---

УДК 51-76

doi: 10.18101/2304-5728-2016-1-73-78

© Л. В. Антонова, А. В. Данеев

## Анализ электрокардиограмм при помощи функций распознавания

В данной статье описывается алгоритм анализа и сравнения электрокардиограмм. Разрабатывается система обучения кардиограмм для проведения дальнейшего анализа. По результатам сравнения определяется наличие заболевания у человека.

**Ключевые слова:** электрокардиограмма, FRiS-Stolp функция, KRAB функция, столп, кластер, остовное дерево.

© L. V. Antonova, A. V. Daneev

## Analysis of electrocardiograms using the recognition function

In the article the algorithm of ECG analysis and comparison is described. We have developed the training system for further analysis of cardiograms. Using the results of comparison we can determine the disease in a human.

**Keywords:** electrocardiogram, FRiS-Stolp function, KRAB function, stolp, cluster, spanning tree.

## Введение

Электрокардиография – это методика регистрации исследования электрических полей, образующихся при работе сердца. Результатом электрокардиографии является получение электрокардиограммы – графического представления разности потенциалов, возникающих в результате работы сердца и проводящихся на поверхность тела. Кардиограмма является ценным диагностическим инструментом.

ЭКГ состоит из нескольких элементов: зубцов, сегментов и интервалов. В патологии величина зубцов, их продолжительность и направление, также как и продолжительность, и расположение интервалов ЭКГ, может значительно изменяться, что дает основание использовать электрокардиографию в диагностике многих заболеваний.

С развитием в XX веке искусственного интеллекта и его подразделов стало возможным автоматизировать многие процессы из различных областей. Так, в статье 1967 года Савченко Л.А. [1] был предложен алгоритм автоматического распознавания электрокардиограмм при помощи машинного обучения. Исследования и попытки создания отлаженной системы обработки и анализа ЭКГ ведутся до сих пор. В работах Красичкова А.С., Фролова Е.В. и Акулова А.Н. [2] предложен статистический подход,

но данный метод трудно реализуем на практике. Также, основной проблемой существующих методов является их высокая вычислительная мощность.

На данный момент, врач ставит диагноз только на основе собственного анализа, «на глаз». Автоматизация же данного процесса позволит упростить труд и повысить эффективность работы врачей кардиологов, также, исключив ошибки анализа, происходящие из-за человеческого фактора.

### 1. Постановка задачи

Заданы кардиограммы [2]  $k$  здоровых людей  $N = \{n_1, \dots, n_k\}$  и  $s$  кардиограмм людей с различными заболеваниями  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ . Необходимо выявить наличие заболевания у человека по его электрокардиограмме.

На первом этапе: методом динамического программирования [3] сравниваем кардиограммы из множества  $N$  и  $G$  между собой. Выявляем разницу между ними. На втором: при помощи алгоритма FRiS-Stolp [4] сравниваем кардиограммы  $n_1, \dots, n_k$  и  $g_1, \dots, g_s$ , и выявляем эталоны для каждого множества. На третьем: алгоритмом KRAB [4] строим виртуальный эталон для каждого множества с использованием кардиограмм, выровненных методом динамического программирования. На четвертом: распознаем контрольные электрокардиограммы, не участвовавшие в обучении. По ошибкам распознавания двух классов определяется надежность обучения.

### 2. Сравнение ЭКГ

Дано множество  $N = \{n_1, \dots, n_k\}$ , где кардиограммы заданы функцией вида  $n(x_d) = t_d$ , и множество  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ , где кардиограммы заданы функцией вида  $g(x_h) = t_h$ . Каждая кардиограмма представлена последовательностью интервалов  $R - R$ .  $R - R$  интервалу первой кардиограммы сопоставляем  $R - R$  интервал второй кардиограммы так, чтобы расстояния между соответствующими зубцами было минимальным. Заполняем таблицу минимальных расстояний. Если  $i = j$ , то

$$d(i, j) = \sum_{k=1}^i d(a_k, b_k). \quad (1)$$

Иначе,

$$d(i, j + 1) = \min(d(i, j); d(a_i, b_{j+1}) + d(i - 1, j)). \quad (2)$$

Пример таблицы расстояний для 10 ЭКГ здоровых людей:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	42,8									
3	39,1	21,6								
4	26,4	17,2	33,1							
5	48,2	26,5	37,4	56,8						
6	51,7	53,2	34,6	51,3	47,9					
7	45,3	42,5	58,6	31,7	46,2	54,4				
8	57,8	48,1	43,4	37,3	20,9	32	49,1			
9	44,1	51,2	46,7	41,6	39,4	50,9	38,4	55,2		
10	59,6	33,8	47,3	32,4	38,5	53	57,1	49,6	43,5	

и для 10 ЭКГ больных людей:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	42,8									
3	39,1	21,6								
4	26,4	17,2	33,1							
5	48,2	26,5	37,4	56,8						
6	51,7	53,2	34,6	51,3	47,9					
7	45,3	42,5	58,6	31,7	46,2	54,4				
8	57,8	48,1	43,4	37,3	20,9	32	49,1			
9	44,1	51,2	46,7	41,6	39,4	50,9	38,4	55,2		
10	59,6	33,8	47,3	32,4	38,5	53	57,1	49,6	43,5	

### 3. Алгоритм FRiS-Stolp

Даны множества  $N = \{n_1, \dots, n_k\}$  и  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ . Необходимо множества  $N$  и  $G$  разбить на кластеры, каждый из которых должен быть представлен своим эталоном. Представим, что объект  $a_i$  является столпом (эталон) образа  $N$ . Для каждого образа выбираются такие столпы, на которые свои объекты похожи больше, чем на столпы конкурирующих образов. Выберем произвольный объект  $a_j \neq a_i$ , расстояние между ними  $r_1$ . Среди объектов  $G$  найдем объект  $b_j$ , являющийся ближайшим соседом объекта  $a_j$ , расстояние между ними равно  $r_2$ . Сходство объекта  $a_j$  со столпом  $a_i$  в конкуренции с объектом  $b_j$  оцениваем:

$$F(a_i, a_j | b_j) = 1 - \frac{2r_1}{r_1 + r_2}. \quad (3)$$

Если эта величина больше порога  $F^*$ , то объект  $a_j$  защищен столпом  $a_i$ , и добавим величину к счетчику  $D_i$ . Вместо  $a_j$  ставим по очереди объекты из  $N$  и оцениваем их защищенность столпом  $a_i$ . Теперь проверим отличия объектов образа  $B$  от этого столпа величиной:

$$F(b_i, b_q | a_i) = 1 - \frac{2r_2}{r_1 + r_2}, \quad (4)$$

характеризующую несходство объекта  $b_i$  с объектом  $a_i$ . Если величина превышает порог, то добавляем ее к счетчику  $T_i$ . В качестве исполнения роли столпа объектом  $a_i$  будем оценивать величиной

$$S_i = \frac{D_i + T_i}{2}. \quad (5)$$

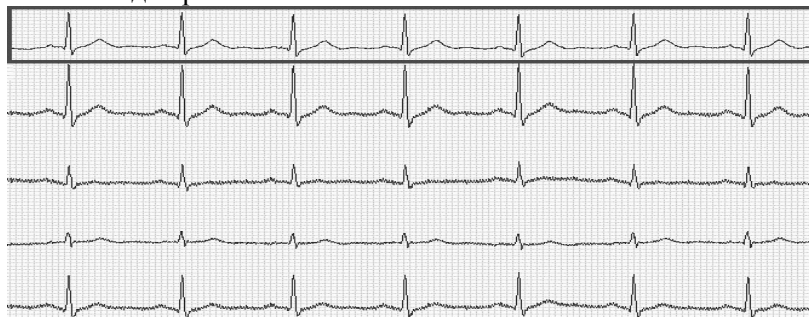
Получаем, что для множества  $N$  выбран один столп, а для  $G$  людей выбраны 10 столпов, для каждого характерного рассмотренного заболевания.

#### 4. Алгоритм КРАВ, поиск виртуального эталона

Необходимо множества электрокардиограмм  $N$  и  $G$  разбить на кластеры, в каждом из которых найти центр  $m_i$ , где  $i$  – количество кластеров. Применяем алгоритм для каждого множества по очереди.

Пусть все множество один кластер, считаем его дисперсию. Строим минимальное остовное дерево, узлы которого есть кардиограммы из заданного множества. Сортируем по длине ребра в убывающем порядке и помещаем в очередь. Из очереди удаляется ребро максимальной длины. По этому ребру производим разбиение, дерево распадается на два поддерева. Если одно из получившихся деревьев вырождено, то деление не производим. Иначе, образуем из одного кластера два новых. Пересчитываем сумму дисперсий. Если она меньше лучшей оценки, то заменяем ее на текущую оценку, и принимаем кластеризацию в качестве лучшей.

Пример выбора эталона для кардиограмм здоровых людей. Полученный эталон обведен рамкой.



Пример выбора эталона для кардиограмм больных людей.



### Заключение

В результате работы были выведены характеристики заболеваний для обучения ЭКГ. Также, были получены характеристики ЭКГ здоровых людей:

Столбец P – длительность  $< 0,1$  с, амплитуда 1,5 – 2,5 мм;

Столбец Q – длительность  $< 0,03$  с, амплитуда  $> 3$  мм;

Столбец R – длительность 0,02 – 0,04 с, амплитуда 5 – 25 мм;

Столбец S – длительность 0,01 – 0,02 с, амплитуда 5 – 25 мм;

Столбец T – амплитуда 0,5 – 6 мм.

Интервал PQ – длительность 0,12 – 0,2 с.

Интервал QT – длительность 0,3 – 0,46 с.

Сегмент ST – длительность 0,27 – 0,33 с.

Комплекс QRS – длительность 0,06 – 0,1 с.

Контрольные кардиограммы, прошедшие обучение, распределились по соответствующим множествам. Такая точность гарантируется благодаря сглаживанию динамического программирования.

Сумма расстояний внутри множества здоровых и больных людей меньше, чем между множествами. А значит, у каждое множество болезни представляет собой отдельный кластер.

Полученный алгоритм показывает, что применение динамического программирования позволяет правильно диагностировать заболевание и определить амплитуду элементов электрокардиограмм до сотых.

### Литература

1. Савченко Л. А. Автоматическое распознавание электрокардиограмм с использованием алгоритмов обучения машины // Автоматика и телемеханика. — 1967. — №11. — С. 145–148.

2. Красичкова А. С., Фролова Е. В., Акулова А. Н. Статистический подход к синтезу алгоритма обнаружения QRS-комплекса для многоканальных записей электрокардиосигнала // Медицинская радиоэлектроника. — 2012. — №1. — С. 53–57.

3. База данных <http://www.physionet.org/physiobank/database/ptbdb>.
4. Беллман Р. Динамическое программирование.— Москва: Издательство иностранной литературы, 1960.— 401 с.
5. Загоруйко Н. Г. Методы распознавания и их применение.— Москва: Наука, 1972. — 206 с.

#### References

1. Savchenko L. A. Avtomaticheskoe raspoznavanie elektrokardiogramm s ispol'zovaniem algoritmov obucheniya mashiny [Automatic ECG Recognition Using Machine Learning Algorithms]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Telecontrol*. 1967. No. 11. Pp. 145–148.
2. Krasichkova A. S., Frolova E. V., Akulova A. N. *Statisticheskii podkhod k sintezu algoritma obnaruzheniya QRS-kompleksa dlya mnogokanal'nykh zapisei elektrokardiosignala* [The Statistical Approach to the Synthesis of QRS-complex Detection Algorithm for Multi-Channel Recordings of Electrocardiosignal]. *Meditsinskaya radioelektronika – Medical Radio Electronics*. 2012. No. 1. Pp. 53–57.
3. <http://www.physionet.org/physiobank/database/ptbdb>.
4. Bellman R. *Dynamic Programming*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1957.
5. Zagoruiko N. G. *Metody raspoznavaniya i ikh primeneniye* [Recognition Methods and Their Application]. Moscow: Nauka Publ., 1972. 206 p.

*Антонова Лариса Васильевна*, кандидат физико-математических наук, профессор Института математики и информатики Бурятского государственного университета, e-mail: [dekan.imi@gmail.com](mailto:dekan.imi@gmail.com).

*Данеев Александр Васильевич*, доцент Института математики и информатики Бурятского государственного университета, e-mail: [dshanara@gmail.com](mailto:dshanara@gmail.com).

*Larisa V. Antonova*, PhD in Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University.

*Aleksandr V. Daneev*, A/Professor, Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University.

УДК 519.62, 519.63

doi: 10.18101/2304-5728-2016-1-79-87

© *В. В. Гармаева*

### **Алгоритмическое обеспечение исследования свободных колебаний балки Эйлера-Бернулли с прикрепленными телами <sup>1</sup>**

В статье обсуждается алгоритмическое обеспечение исследования класса механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами описываемого обобщенной математической моделью. Под обобщенной математической моделью понимается система гибридных дифференциальных уравнений заданной структуры, описывающая динамику балки Эйлера-Бернулли с прикрепленной системой взаимосвязанных твердых тел. Алгоритмическое обеспечение реализовано в виде комплекса программ на языке Фортран.

**Ключевые слова:** балка Эйлера-Бернулли, система твердых тел, математическая модель, алгоритмическое обеспечение.

© *V. V. Garmaeva*

### **Algorithmic solution for research of natural oscillations of an Euler-Bernoulli beam with attached solids**

The article deals with the algorithmic solution for research of mechanical systems with lumped and distributed parameters. This class of systems is described by the generalized mathematical model. Generalized mathematical model is understood as a system of hybrid differential equations with the given structure, it describes the dynamics of an Euler-Bernoulli beam with the attached system of interconnected solids. Algorithmic solution is implemented as a set of programs in the Fortran language.

**Keywords:** Euler-Bernoulli beam, the system of solids, mathematical model, algorithmic solution.

#### **Введение**

В работах [1, 2] была предложена обобщенная математическая модель, представляющая собой гибридную систему дифференциальных уравнений (ГСДУ), заданной структуры, описывающая динамику класса механических систем, представляющих собой системы твердых тел, прикрепленных к балке Эйлера-Бернулли. Под ГСДУ понимаются системы дифференциальных уравнений, состоящие из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Отметим, для исследования свободных колебаний систем из данного класса механических

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-08-00973-а

систем при тех или иных конкретных типовых расчетных схемах в зарубежных изданиях [3-11] каждый раз разрабатывались специальные ориентированные на них аналитические, численно-аналитические методы или использовался метод конечных элементов. Между тем собственные колебания, рассмотренных зарубежными исследователями механических систем [3-11], можно исследовать единым аналитико-численным методом, разработанным в [1,2] на основе обобщенной математической модели.

В данной статье предлагается алгоритмическое обеспечение исследования свободных колебаний балки Эйлера-Бернулли с прикрепленными с помощью пружин твердыми телами. В основу разработки алгоритмического обеспечения положен аналитико-численный метод исследования обобщенной математической модели систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера-Бернулли [1,2].

### 1. Теоретические положения

Обобщенная математическая модель любой произвольной системы твердых тел, прикрепленных к балке Эйлера-Бернулли, описывается ГСДУ вида [1]

$$\begin{cases} A\ddot{z} + Bz + C(Dz - \bar{u}) = 0, \\ k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = \sum_{i=1}^m q_i (d^{iT} z(t) - u(x,t)) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (1)$$

где  $z(t)$   $n$ -мерная вектор-функция;  $u(x,t)$  – скалярная функция;  $\bar{u}(t)$  –  $m$ -мерная вектор-функция с компонентами  $u(a_1,t), \dots, u(a_m,t)$ ;  $A, B$  – заданные, постоянные  $n \times n$  – матрицы;  $C$  – заданная, постоянная  $n \times m$  – матрица;  $D$  – заданная, постоянная  $m \times n$  – матрица;  $d^i$  –  $n$ - мерный вектор, составленный из строк матрицы  $D$ ;  $k, b, a_i, q_i, (i = \overline{1, m})$  – заданные постоянные, причем  $0 \leq a_i \leq l$ ;  $()^T$  – здесь и ниже операция транспонирования.

Функция  $u(x,t)$  описывает поперечные перемещения точек балки. В связи с этим на функцию  $u(x,t)$  следует наложить граничные условия, соответствующие тем или иным способам закрепления концов.

В частности, в случае жесткой заделки на концах имеем

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \quad (2)$$

в случае жесткой заделки на левом и шарнирно-опертого закрепления на правом конце

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t) = 0, \quad (3)$$

в случае жесткой заделки на левом и свободного правого конца

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(l,t) = 0. \quad (4)$$



Заменой

$$z(t) = Z \sin \omega t, \quad u(x, t) = V(x) \sin \omega t,$$

система (1) сведется к алгебраическо-дифференциальной системе

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = 0, \\ -\omega^2 kV(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \sum_{i=1}^m q_i (d^{i''} Z - V(x)) \delta(x - a_i). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $\omega$  – собственная частота,  $Z$  –  $n$ -мерный вектор амплитуд колебаний масс,  $V(x)$  – амплитуда колебаний точек балки (собственная форма колебаний),  $\bar{V}$  –  $m$ -мерный вектор с компонентами  $V(a_1), \dots, V(a_m)$ .

В силу граничных условий, накладываемых на функцию  $u(x, t)$ , функция  $V(x)$  должна удовлетворять условиям:

- при граничных условиях (2)

$$V(0) = V(l) = 0, \quad \frac{dV}{dx}(0) = \frac{dV}{dx}(l) = 0, \quad (6)$$

- при граничных условиях (3)

$$V(0) = 0, \quad \frac{dV}{dx}(0) = 0, \quad V(l) = 0, \quad \frac{d^2 V}{dx^2}(l) = 0, \quad (7)$$

- при граничных условиях (4)

$$V(0) = 0, \quad \frac{dV}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d^2 V}{dx^2}(l) = 0, \quad \frac{d^3 V}{dx^3}(l) = 0. \quad (8)$$

**Теорема 1.** При любых значениях  $\omega$  и  $Z$  для обобщенного решения  $V(x)$  дифференциального уравнения

$$-\omega^2 kV(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \sum_{i=1}^m q_i (d^{i''} Z - V(x)) \delta(x - a_i), \quad (9)$$

удовлетворяющего одному из граничных условий (6), (7), (8), справедливо представление

$$V(x) = \sum_{i=1}^m G_i(x - a_i) q_i (d^{i''} Z - V(a_i)), \quad (10)$$

где функции  $G_i(x)$ ,  $(i = 1, \dots, m)$  обобщенные решения уравнения

$$-\omega^2 kG_i(x) + b \frac{d^4 G_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (i = 1, \dots, m), \quad (11)$$

удовлетворяющие условиям:

при граничном условии (6)

$$G_i(-a_i) = G_i(l - a_i) = 0, \quad \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = \frac{dG_i}{dx}(l - a_i) = 0, \quad (12),$$

при граничном условии (7)

$$G_i(-a_i) = 0, \quad G_i(l - a_i) = 0, \quad \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = 0, \quad \frac{d^2 G_i}{dx^2}(l - a_i) = 0, \quad (13)$$

при граничном условии (8):

$$G_i(-a_i) = 0, \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = 0, \frac{d^2G_i}{dx^2}(l-a_i) = 0, \frac{d^3G_i}{dx^3}(l-a_i) = 0. \quad (14)$$

Если найдены обобщенные решения  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  уравнения (11), удовлетворяющие заданным согласно поставленной задаче крайевым условиям, то принимая в (10) последовательно значения  $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_m$ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V(a_1), V(a_2), \dots, V(a_m)$

$$M\bar{V} = NZ, \quad (15)$$

где  $M$  – матрица системы размерности  $m \times m$ :

$$M = \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)q_1 & G_2(a_1 - a_2)q_2 & \dots & G_m(a_1 - a_m)q_m \\ G_1(a_2 - a_1)q_1 & 1 + G_2(0)q_2 & \dots & G_m(a_2 - a_m)q_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_1(a_m - a_1)q_1 & G_2(a_m - a_2)q_2 & \dots & 1 + G_m(0)q_m \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$N$  – матрица размерности  $m \times n$

$$N = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_n^i \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_n^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_n^i \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Объединив (15) с алгебраической частью алгебраическо-дифференциальной системы (5), получим систему линейных, однородных алгебраических уравнений относительно вектора амплитуд  $Z$  и  $\bar{V}$

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = 0, \\ NZ - M\bar{V} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Система (18) имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю. Приравняв определитель системы (18) к нулю, получим уравнение для нахождения собственных частот

$$\det \begin{pmatrix} -\omega^2 A + B + CD & -C \\ N & -M \end{pmatrix} = 0. \quad (19)$$

## 2. Алгоритмическое обеспечение поиска собственных частот

Для нахождения собственных частот системы, описываемой обобщенной моделью (1) следует:

1. Найти функции  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  при некотором значении  $\varpi$ .
2. Составить матрицу системы алгебраических уравнений (18)

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 A + B + CD & -C \\ N & -M \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где матрицы  $M$  и  $N$  находятся в соответствии с (16) и (17).

3. Разработать процедуру вычисления определителя матрицы (20)

$$\Delta(\varpi) = \det \begin{pmatrix} -\omega^2 A + B + CD & -C \\ N & -M \end{pmatrix}. \quad (21)$$

4. Разработать процедуру поиска частот  $\varpi$ , при котором определитель (21) обращается в нуль с заданной точностью.

Для нахождения функций  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  при некотором значении  $\varpi$  имеем  $m$  краевых задач для уравнения

$$-\omega^2 kG(x) + b \frac{d^4 G(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (21)$$

с теми или иными, в зависимости от поставленной задачи, краевыми условиями (12), (13) или (14).

Общее решение  $G(x, c_1, c_2, c_3, c_4)$  уравнения (21) можно найти в виде суммы общего обобщенного решения  $G_0(x, c_1, c_2, c_3, c_4)$  однородного уравнения

$$-\omega^2 kG(x) + b \frac{d^4 G(x)}{dx^4} = 0, \quad (22)$$

и некоторого обобщенного решения  $\tilde{G}(x)$  неоднородного уравнения (21), то есть

$$G(x) = G_0(x, c_1, c_2, c_3, c_4) + \tilde{G}(x). \quad (23)$$

Общее решение  $G_0(x, c_1, c_2, c_3, c_4)$  однородного уравнения (22) можно записать в виде

$$G_0(x, c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1 S_1(\beta x) + c_2 S_2(\beta x) + c_3 S_3(\beta x) + c_4 S_4(\beta x),$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  - постоянные интегрирования,  $\beta = \frac{\sqrt{\omega} \sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{b}}$ ,

$S_1(\beta x), S_2(\beta x), S_3(\beta x), S_4(\beta x)$  – функции Крылова,

Функции Крылова определяются следующим образом

$$S_1(\beta x) = \frac{ch(\beta x) + \cos(\beta x)}{2}, \quad S_2(\beta x) = \frac{sh(\beta x) + \sin(\beta x)}{2},$$

$$S_3(\beta x) = \frac{ch(\beta x) - \cos(\beta x)}{2}, \quad S_4(\beta x) = \frac{sh(\beta x) - \sin(\beta x)}{2}.$$

Для нахождения частного обобщенного решения  $\tilde{G}(x)$  неоднородного уравнения (21), воспользуемся следующим утверждением, которое явля-

ется следствием теоремы о фундаментальном решении для линейного дифференциального оператора [12].

**Утверждение 1.** Если функция  $\tilde{g}(x)$  частное решение однородного дифференциального уравнения (22), удовлетворяющее начальным условиям

$$g(0) = 0, \quad \frac{dg}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d^2g}{dx^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3g}{dx^3}(0) = \frac{1}{b}, \quad (24)$$

то фундаментальное решение уравнения (21) запишется в виде

$$g(x) = \tilde{g}(x)\theta(x), \quad (25)$$

где  $\theta(x)$  – классическая функция Хэвисайда.

Отметим, если выберем функцию  $\tilde{g}(x) = \frac{S_4(\beta x)}{b\beta^3}$ , то в силу свойств

функций Крылова, она удовлетворяет всем условиям данного утверждения: является решением однородного уравнения (22), удовлетворяющим начальным условиям (24).

Таким образом, фундаментальное решение может быть представлено следующим образом

$$g(x) = \theta(x) \frac{S_4(\beta x)}{b\beta^3}.$$

В качестве частного решения  $\tilde{G}(x)$  неоднородного уравнения (21) выберем фундаментальное решение

$$\tilde{G}(x) = g(x) = \theta(x) \frac{S_4(\beta x)}{b\beta^3}. \quad (26)$$

Определив произвольные константы  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , входящие в общее решение (23) из условий выполнения граничных условий, соответствующих заданным, согласно поставленной задаче краевым условиям, найдем обобщенные решения  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$

$$G_i(x) = G_0(x, c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}) + \tilde{G}(x), \quad (i = 1, \dots, m). \quad (27)$$

Отметим, нахождение констант  $c_1, c_2, c_3, c_4$  сводится к линейной системе алгебраических уравнений четвертого порядка, для представления решения которой при программной реализации используются аналитические соотношения, полученные методом Гаусса.

Найденные функции  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  позволяют построить матрицу (20) и организовать вычисление ее определителя при некотором фиксированном значении  $\varpi$ . Вычисление определителя сводится к приведению определителя к треугольному виду методом Гаусса.

Для нахождения собственных частот  $\varpi$  производится вычисление определителя (21) в точках, начиная со значения  $\varpi$  равного нулю, с некоторым шагом, зависящим от точности, до определения первых 5-7 интервалов смены знака частотной функции  $\Delta(\varpi)$ . На каждом частичном интер-

вале производится поиск корней уравнения (21) одним из методов поиска корней монотонной функции на отрезке. При этом, при каждом новом выбранном значении  $\omega$  производится вычисление функций  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  и построение матрицы (20) согласно изложенному выше.

Изложенный подход по подсчету собственных частот реализован на языке Фортран [13]. Тестирование разработанного программного комплекса проводилось на основе численных расчетов для конкретных расчетных схем и их сравнения с результатами ручного счета с использованием Маткад, а также с имеющимися расчетами известными из литературных источников [4].

Собственные формы колебаний балки  $V(x)$ , соответствующие собственной частоте  $\omega$  могут быть найдены по формуле (10). Для этого должны быть найдены нетривиальные решения (вектора амплитуд  $Z$  и  $\bar{V}$ ) линейного однородного алгебраического уравнения при собственной частоте  $\omega$ .

#### **Заключение**

Алгоритмическое обеспечение исследования свободных колебаний балки Эйлера-Бернулли с прикрепленными с помощью пружин твердыми телами, предложенное в данной статье, является универсальным в том смысле, что позволяет исследовать любые системы из данного класса механических систем [3-11]. При этом отпадает необходимость проведения исследований, связанных с разработкой специальных ориентированных на конкретные расчетные схемы аналитических, численно-аналитических методов, которые приведены в [3-11]. Сравнение расчетов проведенных разработанным комплексом программ [13] с имеющимися расчетами известными из литературных источников, в частности из [4], показало хорошее совпадение результатов.

#### **Литература**

1. Миждон А.Д., Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.). Обобщенная математическая модель системы твердых тел, установленных на упругом стержне // Вестник ВСГУТУ. — 2013. — № 6. — С. 5–12.
2. Миждон А.Д., Баргуев С.Г. Краевая задача для одной гибридной системы дифференциальных уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. — 2013. — № 9. — С. 130–137.
3. Kukla S., Posiadala B. Free vibrations of beams with elastically mounted masses // Journal of Sound and Vibration. — 1994. — № 175(4). — P. 557–564.
4. Philip D.Cha. Free vibrations of a uniform beam with multiple elastically mounted two-degree-of-freedom systems // Journal of Sound and Vibration. — 2007. — № 307. — P. 386–392.
5. Wu J.-J., Whittaker A.R. The natural frequencies and mode shapes of a uniform cantilever beam with multiple two-DOF spring-mass systems // Journal of Sound and Vibration. — 1999. — № 227. — P. 361–381.
6. Wu J.S., Chou H.M. A new approach for determining the natural fre-

quancies and mode shape of a uniform beam carrying any number of spring masses // *Journal of Sound and Vibration*. — 1999. — № 220. — P. 451–468.

7. Wu J.S. Alternative approach for free vibration of beams carrying a number of two-degree of freedom spring-mass systems. // *Journal of Structural Engineering*. — 2002. — № 128. — P. 1604–1616.

8. Naguleswaran S. Transverse vibration of an Euler-Bernoulli uniform beam carrying several particles // *International Journal of Mechanical Sciences*. — 2002. — № 44. — P. 2463–2478.

9. Naguleswaran S. Transverse vibration of an Euler-Bernoulli uniform beam on up a five resilient supports including end // *Journal of Sound and Vibration*. — 2003. — № 261. — P. 372–384.

10. Su H., Banerjee J.R. Exact natural frequencies of structures consisting of two part beam-mass systems // *Structural Engineering and Mechanics*. — 2005. — № 19(5). — P. 551–566.

11. Lin H.Y., Tsai Y.C. Free vibration analysis of a uniform multi-span beam carrying multiple spring-mass systems // *Journal of Sound and Vibration*. — 2007. — № 302. — P. 442–456.

12. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1976. — 280 с.

13. Мижидон А.Д., Баргуев С.Г., Дабаяева М.Ж., Гармаева В.В. Расчет собственных частот балки Эйлера-Бернулли с прикрепленными твердыми телами // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015612387 – 18 фев. 2015.

### References

1. Mizhidon A. D., Dabaeva M. Zh. (Tsytsyrenova M. Zh.). Obobshchennaya matematicheskaya model' sistemy tverdykh tel, ustanovlennykh na upravnom sterzhne [Generalized Mathematical Model of the System of Solids Mounted on Elastic Rod]. *Vestnik VSGUTU – Bulletin of ESSUTM*. 2013. – No. 6. Pp. 5–12.

2. Mizhidon A. D., Barguev S. G. Kraevaya zadacha dlya odnoi gibridnoi sistemy differentsial'nykh uravnenii [A Boundary Value Problem for the Hybrid System of Differential Equations]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2013. No. 9. Pp. 130–137.

3. Kukla S., Posiadala B. Free Vibrations of Beams with Elastically Mounted Masses. *Journal of Sound and Vibration*. 1994. No. 175(4). Pp. 557–564.

4. Philip D. Cha. Free Vibrations of a Uniform Beam with Multiple Elastically Mounted Two-Degree-of-Freedom Systems. *Journal of Sound and Vibration*. 2007. No. 307. Pp. 386–392.

5. Wu J.-J., Whittaker A. R. The Natural Frequencies and Mode Shapes of a Uniform Cantilever Beam with Multiple Two-DOF Spring-Mass Systems. *Journal of Sound and Vibration*. 1999. No. 227. Pp. 361–381.

6. Wu J. S., Chou H. M. A New Approach for Determining the Natural Frequencies and Mode Shape of a Uniform Beam Carrying Any Number of Spring

Masses. *Journal of Sound and Vibration*. 1999. No. 220. Pp. 451–468.

7. Wu J. S. Alternative Approach for Free Vibration of Beams Carrying a Number of Two-Degree-of-Freedom Spring-Mass Systems. *Journal of Structural Engineering*. 2002. No. 128. Pp. 1604–1616.

8. Naguleswaran S. Transverse Vibration of an Euler-Bernoulli Uniform Beam Carrying Several Particles. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2002. No. 44. Pp. 2463–2478.

9. Naguleswaran S. Transverse Vibration of an Euler-Bernoulli Uniform Beam on Up a Five Resilient Supports Including End. *Journal of Sound and Vibration*. 2003. No. 261. Pp. 372–384.

10. Su H., Banerjee J. R. Exact Natural Frequencies of Structures Consisting of Two Part Beam-Mass Systems. *Structural Engineering and Mechanics*. 2005. No. 19 (5). Pp. 551–566.

11. Lin H. Y., Tsai Y. C. Free Vibration Analysis of a Uniform Multi-Span Beam Carrying Multiple Spring-Mass Systems. *Journal of Sound and Vibration*. 2007. No. 302. Pp. 442–456.

12. Vladimirov V. S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized Functions in Mathematical Physics]. Moscow: Nauka Publ., 1976. 280 p.

13. Mizhidon A. D., Barguev S. G., Dabaeva M. Zh., Garmaeva V. V. *Raschet sobstvennykh chastot balki Eйлера-Bернулли s prikreplennymi tverdymi telami* [Calculation of the Natural Frequencies of the Euler-Bernoulli Beam with Attached Solids]. State Registration Certificate of Computer Program No. 2015612387. February 18, 2015.

*Гармаева Валентина Валерьевна*, аспирант Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: [gfik-siv@gmail.com](mailto:gfik-siv@gmail.com).

*Valentina V. Garmaeva*, Postgraduate, East Siberian State University of Technology and Management.

УДК 519.62, 519

doi: 10.18101/2304-5728-2016-1-88-101

© *А. Д. Мижидон, А. В. Харахинов***К исследованию краевой задачи для балки Тимошенко с упруго прикрепленным телом с двумя степенями свободы<sup>1</sup>**

В работе рассматривается механическая система, состоящая из твердого тела с двумя степенями свободы, прикрепленного с помощью двух пружин к балке Тимошенко. Для вывода уравнений динамики используется вариационный принцип Гамильтона. Для полученной в виде гибридной системы дифференциальных уравнений математической модели обсуждается подход к исследованию свободных колебаний.

**Ключевые слова:** вариационный принцип Гамильтона, твердое тело, балка Тимошенко, математическая модель, гибридная система дифференциальных уравнений.

*A. D. Mizhidon, A. V. Kharakhinov***The research of boundary value problem for a Timoshenko beam having elastically attached solid with two degrees of freedom**

The article deals with the mechanical system consisting of solid attached to a Timoshenko beam by two springs. The Hamilton's variational principle was used for derivation of dynamic equations. We discussed the approach to research free vibrations for the mathematical model, obtained as a hybrid system of differential equations.

**Keywords:** Hamilton's variational principle, solid, a Timoshenko beam, mathematical model, hybrid system of differential equations.

**Введение**

Исследованиям систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных к упругому стержню (балке Эйлера-Бернулли), посвящены следующие работы [1-17]. В работах [1-4] для построения математических моделей использовался вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, который справедлив, как для систем с сосредоточенными, так и для систем с распределенными параметрами. Полученные на основании принципа Гамильтона, уравнения движений таких механических систем являются гибридными системами дифференциальных уравнений (ГСДУ). Под ГСДУ понимается система дифференциальных уравнений, состоящая из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-08-00973-а



производных. В работе [6] была предложена обобщенная математическая модель системы твердых тел, прикрепленных к балке Эйлера-Бернулли в виде ГСДУ, заданной структуры, и на ее основе разработан единый метод построения частотного уравнения для данного класса механических систем. Отметим, в приведенных выше работах основой описания стержня являлась теория Эйлера-Бернулли. В дальнейшем Релей предложил улучшение классической теории Эйлера-Бернулли, вводя в уравнение движения инерцию вращательного движения. В первой половине прошлого столетия Тимошенко развил теорию, добавив влияние поперечного сдвига. В работах [18,19] рассматривался стержень, с прикрепленным осциллятором, для которого уравнения движения учитывали инерцию вращательного движения стержня.

В данной работе на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского строится математическая модель балки Тимошенко, с прикрепленным с помощью двух упругих элементов твердым телом, с двумя степенями свободы. Под балкой Тимошенко понимается стержень, при описании которой учитываются поперечные сдвиги и инерция поворота сечений. Для построенной модели исследуется возможность обобщения подхода к построению частотного уравнения, развиваемого в работах [1-7].

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, состоящую из массы  $m$ , установленной с помощью двух пружин на упругом стержне. Пружины жёсткости  $c_1$  и  $c_2$  присоединены к стержню в точке  $x = a_1$  и  $x = a_2$ , соответственно.

Введем две системы координат: неподвижную систему координат  $Oxz$ , центр которой совпадает с левым концом стержня, а ось  $Ox$  направлена вдоль оси балки; подвижную систему координат  $O'x'z'$ , связанную с твердым телом. В состоянии равновесия соответствующие оси координат  $Oxz$  и  $O'x'z'$  параллельны. Масса  $m$  может перемещаться поступательно в направлении оси  $Oz$  и совершать угловые отклонения  $\varphi$ . Перемещение точек балки в направлении оси  $Oz$  описывается функцией  $u(x, t)$ .

Для вывода уравнений движения данной механической системы используется вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, который, как было сказано выше, справедлив, как для систем с сосредоточенными, так и для систем с распределенными параметрами. Принцип Гамильтона-Остроградского для консервативной системы принимает вид (вариация интеграла действия обращается в нуль):

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0. \quad (1)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы,  $U$  – потенциальная энергия системы.

Потенциальная энергия системы складывается из суммы энергии пружины и стержня, а кинетическая энергия из суммы энергии тела и стержня

$$T = T_1 + T_2, \quad U = U_1 + U_2,$$

где  $U_1, T_1$  – соответственно потенциальная и кинетическая энергия стержня,  $U_2, T_2$  – соответственно потенциальная энергия пружин и кинетическая энергия твёрдого тела.

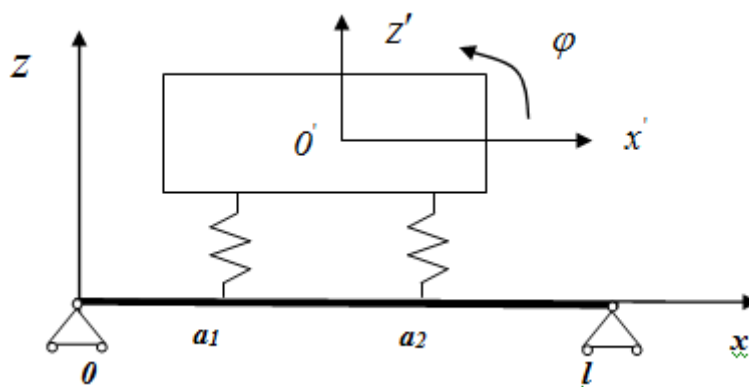


Рис. 2. Механическая система «упругая балка с телом, установленным на двух пружинах»

Выражения для потенциальной и кинетической энергии балки Тимошенко, в соответствии с технической теорией стержней имеют вид [20]

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \chi GF \beta(x,t)^2 dx, \tag{2}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho I \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \beta(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx.$$

где  $U_1, T_1$  - соответственно потенциальная и кинетическая энергии балки;  $E$  – модуль Юнга;  $I$  – момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения;  $u(x,t)$  – поперечное смещение точек балки с координатой  $x$  в момент времени;  $\chi$  – фактор сдвига;  $G$  – модуль сдвига балки;  $F$  – площадь поперечного сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний;  $\beta(x,t)$  – угол сдвига;  $\rho$  – плотность материала стержня.

Заметим, согласно теории плоского движения твердого тела, движение любой точки тела с координатами  $x', z'$  в системе координат  $O'x'z'$  в общем случае удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cos \varphi - z' \sin \varphi, \\ z = z_0 + x' \sin \varphi + z' \cos \varphi, \end{cases} \quad (3)$$

где  $x_0, z_0$  – перемещение в неподвижной системе координат  $Oxz$  начала координат системы  $O'x'z'$ .

Принимая во внимание, что перемещение тела в направлении оси  $Ox$  отсутствует, а также предполагая малым угол поворота (заменяя синус его аргументом, а косинус единицей), можем перемещение в направлении оси  $Oz$  любой точки тела с координатами  $x', z'$  записать в виде

$$z = z_0 + z' + x' \varphi. \quad (4)$$

Таким образом, в соответствии с (3) перемещения в направлении оси  $Oz$  точек крепления упругих элементов к телу  $z_1, z_2$  запишутся в виде

$$z_1 = z + z'_1 - d_1 \varphi, \quad z_2 = z + z'_2 + d_2 \varphi,$$

где  $z$  – перемещение в неподвижной системе координат в направлении оси  $Oz$  начала координат системы  $O'x'z'$ ;  $z'_1, z'_2$  – компоненты координат точек крепления упругих элементов к телу;  $d_1, d_2$  – соответственно расстояния от оси  $O'z'$  до осей пружин прикрепленных к стержню в точке  $a_1$  и точке  $a_2$ .

Учитывая, что потенциальная энергия пружины пропорциональна квадрату ее линейной деформации запишем потенциальную энергию пружин следующим образом

$$U_2 = \frac{c_1(z + z'_1 - d_1 \varphi - u(a_1, t))^2}{2} + \frac{c_2(z + z'_2 + d_2 \varphi - u(a_2, t))^2}{2}, \quad (5)$$

где  $c_1, c_2$  – жесткость упругих элементов.

Кинетическую энергию твердого тела можно записать в виде суммы кинетической энергии поступательного и вращательного движений:

$$T_2 = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{I_\varphi \dot{\varphi}^2}{2}, \quad (6)$$

где  $I_\varphi$  – момент инерции твердого тела относительно центра масс, при повороте на угол  $\varphi$ .

Построим математическую модель рассматриваемой механической системы.

## 2. Математическая модель.

Для вывода уравнений движения воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского (1).

Составим интеграл действия.

$$\begin{aligned}
 J(z(\cdot), \varphi(\cdot), u(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)) = & \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{I_\varphi \dot{\varphi}^2}{2} - \right. \\
 & \left. - \frac{c_1(z + z'_1 - d_1\varphi - u(a_1, t))^2}{2} - \frac{c_2(z + z'_2 + d_2\varphi - u(a_2, t))^2}{2} + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho I \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 dx - \\
 & \left. - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \chi GF \beta^2 dx \right] dt. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Вариацию  $\delta J$  функционала (6) можно найти, как производную от функции

$\phi(\alpha) = J(z(\cdot) + \alpha \delta z(\cdot), \varphi(\cdot) + \alpha \delta \varphi(\cdot), u(\cdot, \cdot) + \alpha \delta u(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot) + \alpha \delta \beta(\cdot, \cdot))$  по параметру  $\alpha$  при значении  $\alpha = 0$ . Отметим, здесь допустимые вариации  $\delta z(\cdot)$ ,  $\delta \varphi(\cdot)$ ,  $\delta u(\cdot, \cdot)$ ,  $\delta \beta(\cdot, \cdot)$  в граничных точках временного интервала  $t_0 \leq t \leq t_1$  обращаются в нуль.

Составим функцию  $\phi(\alpha)$ :

$$\begin{aligned}
 \phi(\alpha) = & \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{m(\dot{z} + \alpha \delta \dot{z})^2}{2} + \frac{I_\varphi(\dot{\varphi} + \alpha \delta \dot{\varphi})^2}{2} - \right. \\
 & \left. - \frac{c_1(z + \alpha \delta z + z'_1 - d_1(\varphi + \alpha \delta \varphi) - u(a_1, t) - \alpha \delta u(a_1, t))^2}{2} - \right. \\
 & \left. - \frac{c_2(z + \alpha \delta z + z'_2 + d_2(\varphi + \alpha \delta \varphi) - u(a_2, t) - \alpha \delta u(a_2, t))^2}{2} + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^l \rho I \left( \frac{\partial^2 (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t))}{\partial x \partial t} - \frac{\partial (\beta(x, t) + \alpha \delta \beta(x, t))}{\partial t} \right)^2 dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t))}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \chi GF (\beta(x, t) + \alpha \delta \beta(x, t))^2 dx - \\
 & \left. - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 (u(x, t) + \alpha \delta u(x, t))}{\partial x^2} - \frac{\partial (\beta(x, t) + \alpha \delta \beta(x, t))}{\partial x} \right)^2 dx \right] dt. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Продифференцировав (8) по параметру  $\alpha$  и вычислив найденную производную при  $\alpha = 0$ , получим вариацию интеграла действия (6), которая согласно принципу Гамильтона-Остроградского (1) должна равняться нулю:

$$\begin{aligned}
 \delta J = \frac{\partial \phi(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ m \dot{z} \delta \dot{z} + I_\varphi \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} - c_1 (z + z'_1 - d_1 \varphi - u(a_1, t)) \delta z + \right. \\
 &+ c_1 d_1 (z + z'_1 - d_1 \varphi - u(a_1, t)) \delta \varphi + c_1 (z + z'_1 - d_1 \varphi - u(a_1, t)) \delta u(a_1, t) - \\
 &- c_2 (z + z'_2 + d_2 \varphi - u(a_2, t)) \delta z - c_2 d_2 (z + z'_2 + d_2 \varphi - u(a_2, t)) \delta \varphi + \\
 &+ c_2 (z + z'_2 + d_2 \varphi - u(a_2, t)) \delta u(a_2, t) + \int_0^l \rho I \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \delta u(x, t)}{\partial x \partial t} dx - \\
 &- \int_0^l \rho I \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial t} \right) \frac{\partial \delta \beta(x, t)}{\partial t} dx + \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right) \frac{\partial \delta u(x, t)}{\partial t} dx - \\
 &- \int_0^l \chi G F(\beta(x, t)) \delta \beta(x, t) dx - \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \delta u(x, t)}{\partial x^2} dx + \\
 &\left. + \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta \beta(x, t)}{\partial x} dx \right] dt = 0.
 \end{aligned}$$

Входящие, в полученное выражение, интегралы проинтегрируем по частям:

- 1) интегралы, содержащие вариации производных  $\delta \dot{z}$ ,  $\delta \dot{\varphi}$ ,  $\frac{\partial \delta u(x, t)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \delta \beta(x, t)}{\partial t}$  по переменной  $t$ ;
- 2) интегралы, содержащие  $\frac{\partial \delta \beta(x, t)}{\partial x}$  по переменной  $x$ ;
- 3) интегралы, содержащие  $\frac{\partial^2 \delta u(x, t)}{\partial x \partial t}$ , дважды по переменным  $x$  и  $t$ ;
- 4) интегралы, содержащие  $\frac{\partial^2 \delta u(x, t)}{\partial x^2}$ , дважды по переменной  $x$ .

При этом все слагаемые, выносимые из-под интеграла, обращаются в нуль так, как на концах временного отрезка обобщенные координаты не варьируются, и кроме того в силу имеющихся условий прикрепления стержня на концах и введения естественных граничных условий. Пусть в соответствии с этим на функции  $u(x, t)$  и  $\beta(x, t)$  наложены некоторые граничные условия

$$\Gamma_1(u(0, t), \beta(0, t)) = 0, \quad \Gamma_2(u(l, t), \beta(l, t)) = 0. \quad (9)$$

В данной статье имеющие здесь место краевые условия (9), вызванные конкретным прикреплением стержня на концах, и в зависимости от них введенные естественные граничные условия, не обсуждаются.

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_1} [m\ddot{z} + c_1(z - d_1\varphi - u(a_1, t)) + c_2(z + d_2\varphi - u(a_2, t))] \delta z dt + \\
 & \int_{t_0}^{t_1} [I_\varphi \ddot{\varphi} - c_1 d_1(z - d_1\varphi - u(a_1, t)) - c_2 d_2(z + d_2\varphi - u(a_2, t))] \delta \varphi dt + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \left[ \rho I \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \beta(x, t) \right) \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \rho F \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c_1(z - d_1\varphi - u(x, t)) \delta(x - a_1) + \right. \\
 & \quad \left. + c_2(z + d_2\varphi - u(x, t)) \delta(x - a_2) \right] \delta u dx dt + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right) \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \beta(x, t) \right) + \chi GF \beta(x, t) \right] \delta \beta dx dt = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

В силу независимости и произвольности вариаций обобщенных координат  $\delta z(t)$ ,  $\delta \varphi(t)$ ,  $\delta u(x, t)$  и  $\delta \beta(x, t)$  в силу (8) имеем ГСДУ

$$\left\{ \begin{aligned}
 & m\ddot{z} + c_1(z - d_1\varphi - u(a_1, t)) + c_2(z + d_2\varphi - u(a_2, t)) = 0, \\
 & I_\varphi \ddot{\varphi} - c_1 d_1(z - d_1\varphi - u(a_1, t)) + c_2 d_2(z + d_2\varphi - u(a_2, t)) = 0, \\
 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \left[ \rho I \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \beta(x, t) \right) \right] + \\
 & + \rho F \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c_1(z - d_1\varphi - u(x, t)) \delta(x - a_1) + \\
 & \quad + c_2(z + d_2\varphi - u(x, t)) \delta(x - a_2), \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right) \right] - \\
 & \quad - \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \beta(x, t) \right) + \chi GF \beta(x, t) = 0.
 \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Решение ГСДУ (11) следует понимать в обобщенном смысле. В связи с этим при исследовании следует ввести понятие обобщенного решения гибридной системы дифференциальных уравнений (11), удовлетворяющей граничным условиям (9).

Отметим, в качестве определения обобщенного решения дифференциальных уравнений (11) можно принять соотношение (10), соответствующее вариационному принципу, и при этом класс основных функций трактовать как множество допустимых вариаций обобщенных координат в

принципе Гамильтона-Остроградского. Таким образом, при исследовании краевой задачи для ГСДУ (11) под ее обобщенным решением понимаем функции  $z(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $u(x,t)$  и  $\beta(x,t)$ , удовлетворяющие некоторым крайним условиям (9), и для которых при любых допустимых вариациях обобщенных координат  $\delta z(t)$ ,  $\delta\varphi(t)$ ,  $\delta u(x,t)$ ,  $\delta\beta(x,t)$  имеет место тождество (10).

### 3. Собственные значения краевой задачи.

В случае стержня постоянного поперечного сечения система (11) примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{z} + c_1(z - d_1\varphi - u(a_1, t)) + c_2(z + d_2\varphi - u(a_2, t)) = 0, \\ I_\varphi\ddot{\varphi} - c_1d_1(z - d_1\varphi - u(a_1, t)) + c_2d_2(z + d_2\varphi - u(a_2, t)) = 0, \\ EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} - EI \frac{\partial^3 \beta(x, t)}{\partial x^3} - \rho I \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho I \frac{\partial^3 \beta(x, t)}{\partial x \partial t^2} + \\ + \rho F \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c_1(z - d_1\varphi - u(x, t))\delta(x - a_1) + \\ + c_2(z + d_2\varphi - u(x, t))\delta(x - a_2), \\ EI \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} - EI \frac{\partial^2 \beta(x, t)}{\partial x^2} - \rho I \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x \partial t^2} + \rho I \frac{\partial^2 \beta(x, t)}{\partial t^2} + \chi GF \beta(x, t) = 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

Подставив в систему (12) функции  $z(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $u(x, t)$ ,  $\beta(x, t)$ , в виде  $z(t) = A \sin \lambda t$ ,  $\varphi(t) = A_\varphi \sin \lambda t$ ,  $u(x, t) = V(x) \sin \lambda t$ ,  $\beta(x, t) = B(x) \sin \lambda t$ , получим алгебраическо-дифференциальную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} mA\lambda^2 + c_1(A - d_1A_\varphi - V(a_1)) + c_2(A + d_2A_\varphi - V(a_2)) = 0, \\ I_\varphi A_\varphi \lambda^2 - c_1(A - d_1A_\varphi - V(a_1)) + c_2(A + d_2A_\varphi - V(a_2)) = 0, \\ \frac{d^4 V(x)}{dx^4} - \frac{d^3 B(x)}{dx^3} + \frac{p\lambda^2}{E} \frac{d^2 V(x)}{dx^2} - \frac{p\lambda^2}{E} \frac{dB(x)}{dx} - \frac{pF\lambda^2}{EI} V(x) = \\ = \frac{c_1}{EI} (A - d_1A_\varphi - V(x))\delta(x - a_1) + \frac{c_2}{EI} (A + d_2A_\varphi - V(x))\delta(x - a_2), \\ \frac{d^3 V(x)}{dx^3} - \frac{d^2 B(x)}{dx^2} + \frac{p\lambda^2}{E} \frac{dV(x)}{dx} - \frac{p\lambda^2}{E} B(x) + \frac{\chi GF}{EI} B(x) = 0. \end{array} \right. \quad (13)$$

Отметим, функции  $V(x)$  и  $B(x)$  удовлетворяют граничным условиям соответствующим граничным условиям, накладываемым на функции  $u(x, t)$  и  $\beta(x, t)$  (9):

$$\gamma_1(V(0), B(0)) = 0, \quad \gamma_2(V(l), B(l)) = 0. \quad (14)$$

Вектора  $A$ ,  $A_\varphi$ , функции  $V(x)$  и  $B(x)$  назовём обобщенным решением краевой задачи системы (13)-(14), если они удовлетворяют алгебраиче-

ским уравнениям из системы (13), краевым условиям (14) и при любых допустимых вариациях обобщенных координат  $\delta u(x,t)$ ,  $\delta\beta(x,t)$  имеют место тождества при любом  $t \in [0, T]$ :

$$\left\{ \int_0^l \left( \frac{d^4 V(x)}{dx^4} - \frac{d^3 B(x)}{dx^3} + \frac{p\lambda^2}{E} \frac{d^2 V(x)}{dx^2} - \frac{p\lambda^2}{E} \frac{dB(x)}{dx} - \frac{pF\lambda^2}{EI} V(x) - \frac{c_1}{EI} (A - d_1 A_\varphi - V(x)) \delta(x - a_1) - \frac{c_2}{EI} (A + d_2 A_\varphi - V(x)) \delta(x - a_2) \right) \square \right. \quad (15)$$

$$\left. \square \delta u(x,t) dx = 0, \right.$$

$$\left. \int_0^l \left( \frac{d^3 V(x)}{dx^3} - \frac{d^2 B(x)}{dx^2} + \frac{p\lambda^2}{E} \frac{dV(x)}{dx} - \frac{p\lambda^2}{E} B(x) + \frac{\chi GF}{EI} B(x) \right) \delta\beta(x,t) dx = 0. \right.$$

Действительные значения  $\lambda$ , при котором существует решение краевой задачи системы (13)-(14) назовем собственным значением краевой задачи.

**Теорема.** Если вектора  $A, A_\varphi$ , функции  $V(x)$  и  $B(x)$  удовлетворяют алгебраическо-дифференциальной системе уравнений (13), функции  $V(x)$  и  $B(x)$  граничным условиям (14), то для функций  $V(x)$  и  $B(x)$  справедливо представление

$$\begin{cases} V(x) = V_1(x - a_1) \frac{c_1}{EI} (A - d_1 A_\varphi - V(a_1)) + V_2(x - a_2) \frac{c_2}{EI} (A + d_2 A_\varphi - V(a_2)), \\ B(x) = B_1(x - a_1) \frac{c_1}{EI} (A - d_1 A_\varphi - V(a_1)) + B_2(x - a_2) \frac{c_2}{EI} (A + d_2 A_\varphi - V(a_2)), \end{cases} \quad (16)$$

где функции  $V_i(x), B_i(x)$ ,  $(i = 1, 2)$  являются обобщенными решениями системы

$$\begin{cases} \frac{d^4 V_i(x)}{dx^4} - \frac{d^3 B_i(x)}{dx^3} + \frac{p\lambda^2}{E} \frac{d^2 V_i(x)}{dx^2} - \frac{p\lambda^2}{E} \frac{dB_i(x)}{dx} - \frac{pF\lambda^2}{EI} V_i(x) = \delta(x), \\ \frac{d^3 V_i(x)}{dx^3} - \frac{d^2 B_i(x)}{dx^2} + \frac{p\lambda^2}{E} \frac{dV_i(x)}{dx} - \frac{p\lambda^2}{E} B_i(x) + \frac{\chi GF}{EI} B_i(x) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

с краевыми условиями

$$\gamma_1(V_i(-a_i), B_i(-a_i)) = 0, \quad \gamma_2(V_i(l - a_i), B_i(l - a_i)) = 0. \quad (18)$$

**Доказательство.** Для функций  $V(x)$  и  $B(x)$ , удовлетворяющих представлению (16), справедливость выполнения краевых условий (14) непосредственно следует из краевых условий (18) для функций  $V_i(x), B_i(x)$ ,  $(i = 1, 2)$ , в силу линейности представления (16) и краевых условий.

Если вектора  $A, A_\varphi$ , функции  $V(x)$  и  $B(x)$  удовлетворяют алгебраическо-дифференциальной системе уравнений (13), то при любых допустимых вариациях обобщенных координат  $\delta u(x,t)$ ,  $\delta\beta(x,t)$ , они удовлетворяют соотношениям (15). Отметим, из первого выражения из (15) следует



*А. Д. Миждон, А. В. Харахинов.* К исследованию краевой задачи для балки Тимошенко с упруго прикрепленным телом с двумя степенями свободы

$$\int_0^l \left( \frac{d^4 V(x)}{dx^4} - \frac{d^3 B(x)}{dx^3} + \frac{p\lambda^2}{E} \frac{d^2 V(x)}{dx^2} - \frac{p\lambda^2}{E} \frac{dB(x)}{dx} - \frac{pF\lambda^2}{EI} V(x) \right) \delta u(x,t) dx =$$

$$= \frac{c_1}{EI} (A - d_1 A_\varphi - V(a_1)) \delta u(a_1, t) + \frac{c_2}{EI} (A + d_2 A_\varphi - V(a_2)) \delta u(a_2, t) dx. \quad (19)$$

В силу (16) функции  $V(x)$  и  $B(x)$  можем представить в виде

$$V(x) = \int_0^i V_1(x-\xi) \frac{c_1}{EI} (A - d_1 A_\varphi - V(\xi)) \delta(\xi - a_1) d\xi +$$

$$+ \int_0^l V_2(x-\xi) \frac{c_2}{EI} (A + d_2 A_\varphi - V(\xi)) \delta(\xi - a_2) d\xi \quad (20)$$

и

$$B(x) = \int_0^i B_1(x-\xi) \frac{c_1}{EI} (A - d_1 A_\varphi - V(\xi)) \delta(\xi - a_1) d\xi +$$

$$+ \int_0^l B_2(x-\xi) \frac{c_2}{EI} (A + d_2 A_\varphi - V(\xi)) \delta(\xi - a_2) d\xi \quad (21)$$

В том, что для обобщенного решения  $V(x)$  и  $B(x)$  справедливо представление (16) убедимся непосредственной подстановкой (20) и (21) в левую часть (19) и во второе соотношение из системы (15).

Подставим (20) и (21) в левую часть (19), Далее, меняя порядок интегрирования и учитывая (17), получим

$$\int_0^l \int_0^l \left( \left( \frac{d^4 \bar{V}_1(x-\xi)}{dx^4} - \frac{d^3 \bar{B}_1(x-\xi)}{dx^3} + \frac{p\lambda^2}{E} \frac{d^2 \bar{V}_1(x-\xi)}{dx^2} - \frac{p\lambda^2}{E} \frac{d\bar{B}_1(x-\xi)}{dx} - \frac{pF\lambda^2}{EI} \bar{V}_1(x-\xi) \right) \frac{c_1}{EI} (A - d_1 A_\varphi - V(\xi)) \delta(\xi - a_1) d\xi \right) \delta u(x,t) dx +$$

$$+ \int_0^l \int_0^l \left( \left( \frac{d^4 \bar{V}_2(x-\xi)}{dx^4} - \frac{d^3 \bar{B}_2(x-\xi)}{dx^3} + \frac{p\lambda^2}{E} \frac{d^2 \bar{V}_2(x-\xi)}{dx^2} - \frac{p\lambda^2}{E} \frac{d\bar{B}_2(x-\xi)}{dx} - \frac{pF\lambda^2}{EI} \bar{V}_2(x-\xi) \right) \frac{c_2}{EI} (A + d_2 A_\varphi - V(\xi)) \delta(\xi - a_2) d\xi \right) \delta u(x,t) dx =$$

$$= \int_0^l \delta u(x,t) dx \int_0^l \frac{c_1}{EI} (A - d_1 A_\varphi - V(\xi)) \delta(\xi - a_1) \delta(x - \xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^l \delta u(x,t) dx \int_0^l \frac{c_2}{EI} (A + d_2 A_\varphi - V(\xi)) \delta(\xi - a_2) \delta(x - \xi) d\xi =$$

$$= \frac{c_1}{EI} (A - d_1 A_\varphi - V(a_1)) \delta u(a_1, t) + \frac{c_2}{EI} (A + d_2 A_\varphi - V(a_2)) \delta u(a_2, t),$$

что совпадает с правой частью (19).

Аналогично, подставив (20)-(21) во второе соотношение из системы (15) можем показать выполнение равенства. *Теорема доказана.*

### Заключение

В статье для механической системы, состоящей из твердого тела с двумя степенями свободы, прикрепленного с помощью двух пружин к балке Тимошенко построена математическая модель в виде гибридной системы дифференциальных уравнений. Для построения был использован вариационный принцип Гамильтона-Остроградского. Была сформулирована и доказана теорема, о представлении решения вспомогательной алгебраическо-дифференциальной системы уравнений, на основе которой строится уравнение частот, аналогично [5,6].

### Литература

1. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д. Определение собственных частот простейшей механической системы на упругом основании // Вестник Бурятского государственного университета. — 2009. — № 9. — С. 58–66.
2. Мижидон А.Д., Баргуев С.Г., Лебедева Н.В. К исследованию виброзащитной системы с упругим основанием // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2009. — №2(22). — С. 13–203.
3. Мижидон А.Д., Баргуев С.Г. О собственных колебаниях механической системы каскадного типа, установленной на упругом стержне // Вестник ВСГУТУ. — 2010. — № 1. — С. 26–32.
4. Баргуев С.Г., Елтошкина Е.В., Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж.(Цыцыренова М.Ж.) Исследование возможности гашения  $n$  масс, установленных на упругом стержне // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2010. — №4(28). — С. 78–84.
5. Мижидон А.Д., Баргуев С.Г. Краевая задача для одной гибридной системы дифференциальных уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. — 2013. — № 9. — С. 130–137.
6. Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж.(Цыцыренова М.Ж.) Обобщенная математическая модель системы твердых тел, установленных на упругом стержне // Вестник ВСГУТУ. — 2013. — № 6. — С. 5–128.
7. Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж. Математическое моделирование, учет демфирующих свойств упругих связей в обобщенной математической модели системы твердых тел, установленных на упругом стержне // Вестник ВСГУТУ. — 2015. — № 2. — С. 10–17.
8. Cha P.D. Free vibrations of a uniform beam with multiple elastically mounted two-degree-of-freedom systems // Journal of Sound and Vibration. — 2007. — № 307. — P. 386–392.
9. Wu J.-J., Whittaker A.R. The natural frequencies and mode shapes of a uniform cantilever beam with multiple two-DOF spring-mass systems // Journal of Sound and Vibration. — 1999. — № 227. — P. 361–381.
10. Wu J.S., Chou H.M. A new approach for determining the natural frequencies and mode shape of a uniform beam carrying any number of spring

masses // Journal of Sound and Vibration. — 1999. — № 220. — P. 451–468.

11. Wu J.S. Alternative approach for free vibration of beams carrying a number of two-degree of freedom spring-mass systems // Journal Structural Engineering. — 2002. — № 128. — P. 1604–1616.

12. Naguleswaran S. Transverse vibration of an Euler-Bernoulli uniform beam carrying several particles // International Journal of Mechanical Sciences. — 2002. — № 44. — P. 2463–2478.

13. Naguleswaran S. Transverse vibration of an Euler-Bernoulli uniform beam on up a five resilient supports including end // Journal of Sound and Vibration. — 2003. — № 261. — P. 372–384.

14. Kukla S., Posiadala B. Free vibrations of beams with elastically mounted masses // Journal of Sound and Vibration. — 1994. — № 175(4). — P. 557–564.

15. Su H., Banerjee J.R. Exact natural frequencies of structures consisting of two part beam-mass systems // Structural Engineering and Mechanics. — 2005. — № 19(5). — P. 551–566.

16. Lin H.Y., Tsai Y.C. Free vibration analysis of a uniform multi-span beam carrying multiple spring-mass systems // Journal of Sound and Vibration. — 2007. — № 302. — P. 442–456.

17. Wu J.S., Chen D.W. Dynamic analysis of uniform cantilever Beam carrying a number of elastically mounted point masses with dampers // Journal of Sound and Vibration. — 2000. — № 229(3). — P. 549–578.

18. Yesilce Y., Demirdag O., Catal S. Free vibrations of a multi-span Timoshenko beam carrying multiple spring-mass systems // Sadhana. — 2008. — № 33(4). — P. 385–401.

19. Миждидон А.Д., Баргуев С.Г., Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.) Собственные колебания двухпролётной балки Тимошенко с присоединённым осциллятором // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2013. — № 4 (40). — С. 34–38.

20. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). Т.1. Колебания линейных систем. /Под редакцией В.В. Болотина. — М.: Машиностроение, 1978. — 136 с.

21. Владимирова В.С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1976. — 280 с.

### References

1. Barguev S. G., Mizhidon A. D. Opredelenie sobstvennykh chastot prostishei mekhanicheskoi sistemy na uprugom osnovanii [Determination of Natural Frequencies of the Simplest Mechanical System on an Elastic Foundation]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2009. No. 9. Pp. 58–66.

2. Mizhidon A. D., Barguev S. G., Lebedeva N. V. K issledovaniyu vibrozashchitnoi sistemy s uprugim osnovaniem [To the Research of Vibration Isolation System on an Elastic Foundation]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie – Modern Technologies. System Analysis. Modeling*.

2009. No. 2(22). Pp. 13–203.

3. Mizhidon A. D., Barguev S. G. O sobstvennykh kolebaniyakh mekhanicheskoi sistemy kaskadnogo tipa, ustanovlennoi na uprugom sterzhne [About Natural Vibrations of the Mechanical Cascade-Type System Mounted on an Elastic Rod]. *Vestnik VSGTU – Bulletin of ESSTU*. 2010. No. 1. Pp. 26–32.

4. Barguev S. G., Eltoshkina E. V., Mizhidon A. D., Dabaeva M. Zh. (Tsyt-syrenova M. Zh.) Issledovanie vozmozhnosti gasheniya n mass, ustanovlen-nykh na uprugom sterzhne [Studies in Possibility of Suppression of n Masses Mounted on an Elastic Rod]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie – Modern Technologies. System Analysis. Modeling*. 2010. No. 4(28). Pp. 78–84.

5. Mizhidon A. D., Barguev S. G. Kraevaya zadacha dlya odnoi gibridnoi sistemy differentsial'nykh uravnenii [A Boundary Value Problem for the Hybrid System of Differential Equations]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2013. No. 9. Pp. 130–137.

6. Mizhidon A. D., Dabaeva M. Zh. (Tsyt-syrenova M. Zh.). Obobshchennaya matematicheskaya model' sistemy tverdykh tel, ustanovlennykh na uprugom sterzhne [Generalized Mathematical Model of the System of Solids Mounted on Elastic Rod]. *Vestnik VSGUTU – Bulletin of ESSUTM*. 2013. No. 6. Pp. 5–12.

7. Mizhidon A. D., Dabaeva M. Zh. Matematicheskoe modelirovanie, uchet dempfiroyushchikh svoystv uprugikh svyazei v obobshchennoi matematicheskoi modeli sistemy tverdykh tel, ustanovlennykh na uprugom sterzhne [Mathematical Modeling, Consideration of Elastic Links Damping Properties in Generalized Mathematical Model of the System of Solids Mounted on Elastic Rod]. *Vestnik VSGUTU – Bulletin of ESSUTM*. 2015. No. 2. Pp. 10–17.

8. Cha F. D. Free Vibrations of a Uniform Beam with Multiple Elastically Mounted Two-Degree-of-Freedom Systems. *Journal of Sound and Vibration*. 2007. No. 307. Pp. 386–392.

9. Wu J. J., Whittaker A. R. The Natural Frequencies and Mode Shapes of a Uniform Cantilever Beam with Multiple Two-DOF Spring-Mass Systems. *Journal of Sound and Vibration*. 1999. No. 227. Pp. 361–381.

10. Wu J. S., Chou H. M. A New Approach for Determining the Natural Frequencies and Mode Shape of a Uniform Beam Carrying Any Number of Spring Masses. *Journal of Sound and Vibration*. 1999. No. 220. Pp. 451–468.

11. Wu J. S. Alternative Approach for Free Vibration of Beams Carrying a Number of Two-Degree-of-Freedom Spring-Mass Systems. *Journal of Structural Engineering*. 2002. No. 128. Pp. 1604–1616.

12. Naguleswaran S. Transverse Vibration of an Euler-Bernoulli Uniform Beam Carrying Several Particles. *Int. J. Mech. Sci.* 2002. No. 44. Pp. 2463–2478.

13. Naguleswaran S. Transverse Vibration of an Euler-Bernoulli Uniform Beam on up a Five Resilient Supports Including End. *Journal of Sound Vibration*. 2003. No. 261. Pp. 372–384.

14. Kukla S., Posiadala B. Free Vibrations of Beams with Elastically

*А. Д. Мижидон, А. В. Харахинов. К исследованию краевой задачи для балки Тимошенко с упруго прикрепленным телом с двумя степенями свободы*

---

Mounted Masses. *Journal of Sound and Vibration*. 1994. No. 175(4). Pp. 557-564.

15. Su H., Banerjee J. R. Exact Natural Frequencies of Structures Consisting of Two Part Beam-Mass Systems. *Structural Engineering and Mechanics*. 2005. No. 19 (5). Pp. 551–566.

16. Lin H. Y., Tsai Y. C. Free Vibration Analysis of a Uniform Multi-Span Beam Carrying Multiple Spring-Mass Systems. *Journal of Sound Vibration*. 2007. No. 302. Pp. 442–456.

17. Wu J. S., Chen D. W. Dynamic Analysis of Uniform Cantilever Beam Carrying a Number of Elastically Mounted Point Masses with Dampers. *Journal of Sound and Vibration*. 2000. No. 229(3). Pp. 549–578.

18. Yesilce Y., Demirdag O., Catal S. Free Vibrations of a Multi-Span Timoshenko Beam Carrying Multiple Spring-Mass Systems. *Sadhana*. 2008. No. 33(4). Pp. 385–401.

19. Mizhidon A. D., Barguev S. G., Dabaeva M. Zh. (Tsytseyrenova M. Zh.) *Substvennye kolebaniya dvukhproletnoi balki Timoshenko s prisoedinennym ostsillyatorom* [Free Vibrations of Two-Span Timoshenko Beams with Adjoint Oscillator]. *Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie – Modern technologies. System analysis. Modeling*. 2013. No. 4 (40). Pp. 34–38.

20. *Vibratsii v tekhnike. T. 1. Kolebaniya lineinykh sistem* [Vibrations in Technics. V. 1. Vibrations of Linear Systems]. In 6 v. Moscow: Mashinostroyeniye Publ., 1978. 136 p.

21. Vladimirov V. S. *Obobshchennyye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized Functions in Mathematical Physics]. Moscow: Nauka Publ., 1976. 280 p.

*Мижидон Арсалан Дугарович*, доктор технических наук, профессор, Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: [miarsdu@mail.ru](mailto:miarsdu@mail.ru).

*Харахинов Алдар Владиславович*, аспирант, Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: [comma967@gmail.com](mailto:comma967@gmail.com).

*Mizhidon Arsalan Dugarovich*, DSc in Engineering, Professor, East Siberian State University of Technology and Management.

*Kharakhinov Aldar Vladislavovich*, Postgraduate, East Siberian State University of Technology and Management.

УДК 537.523

doi: 10.18101/2304-5728-2016-1-102-112

© *Б. Д. Цыдыпов, М. А. Аветян, Т. Г. Дармаев, Т. А. Чимытов*

**Постановка и метод решения обобщенных краевых задач электро- и тепломассопереноса в катодном узле сильноточных плазменных систем**

В работе представлены постановка и метод решения стационарной электрофизической и нестационарных теплофизической и диффузионной задач для осесимметричных катодных узлов сильноточных плазменных устройств. Задачи основаны на решении двумерных уравнений непрерывности тока, теплопроводности и диффузии активаторов с нелинейными граничными условиями для системы «вставка – обойма» с анализом всех основных видов энергообмена с внешней средой. При этом учтены локальные джоулево тепловыделение в объеме электродного узла, конвективная и радиационная составляющие сложного теплообмена на его поверхности, нелинейные зависимости тепло- и электрофизических характеристик материалов конструкции от температуры.

**Ключевые слова:** катодный узел, сильноточная плазменная система, энергообмен, краевая задача, математическое моделирование.

© *B. D. Tsydyпов, M. A. Avetyan, T. G. Darmaev, T. A. Chimytov*

**A statement and methods of solving generalized boundary problems of electro-, heat and mass transfer in cathode assembly of high-current plasma systems**

The article presents a statement and methods of solving stationary electro-physical and unsteady heat conduction and diffusion problems for axisymmetric cathode assemblies of high-current plasma devices. The problems are based on solution of two-dimensional current continuity, heat conduction and activators diffusion equations with nonlinear boundary conditions for the "insert-framework" system and analysis of all major types of energy exchange with the environment. Herewith local Joule heat in the electrode assembly volume, convection and radiation heat components of complex heat transfer on its surface, nonlinear dependences of heat and electrophysical characteristics of construction materials from the temperature have been taken into consideration.

**Введение**

Теплофизическое состояние и уровень эрозии катодов сильноточных плазменных систем (СПС) определяют их функциональные параметры и работоспособность [1–3]. Наибольший ресурс катодов достигается в режиме термоэмиссии при использовании в качестве электродного материа-

ла тугоплавких металлов, активированных легирующими компонентами из окислов редкоземельных элементов с низкой работой выхода электронов [4]. Во время работы плазменного устройства в связи с испарением и выгоранием активаторов происходит деградация физико-механических свойств материала, что приводит к снижению эксплуатационных характеристик катода. Ресурс данного класса электродов зависит от интенсивности выхода легирующего элемента из объема матрицы основного металла. Поэтому для оптимизации их функциональных режимов необходимо исследование динамики процессов электро – и тепломассопереноса в объеме и на поверхности твердого тела в зависимости от внешних параметров системы, задаваемых условиями эксперимента и практики. Именно вопрос повышения ресурса работы катодов в наибольшей степени сдерживает применение СПС в инновационных энергоемких технологиях и является одним из главных практических задач фундаментальной проблемы исследования взаимодействия низкотемпературной плазмы с токонесущей стенкой – термоэмиссионным дуговым катодом.

#### **Постановка задачи**

Электродный узел с термоэмиссионным катодом в сильноточных плазменных системах (СПС) представляют собой структуру, функционирующую в экстремальных условиях в термическом и радиационном полях большой интенсивности ( $10^3 - 10^5$  Вт/см<sup>2</sup>). Характер теплоотвода от катода определяется особенностями конструкции электродного узла. В настоящее время в СПС ввиду конструктивной простоты и многофункциональности эксплуатационных характеристик наиболее эффективными являются составные катодные узлы, состоящие из стержневого катода – вставки I из активированного вольфрама, запрессованного в интенсивно охлаждаемую медную обойму II (рис.1). Осевая симметрия физической системы «катодный узел – дуговой разряд» обеспечивает наиболее устойчивый контакт при взаимодействии прикатодной плазмы с твердым телом. При этом катодное пятно представляет собой круг диаметром  $d_0$ .

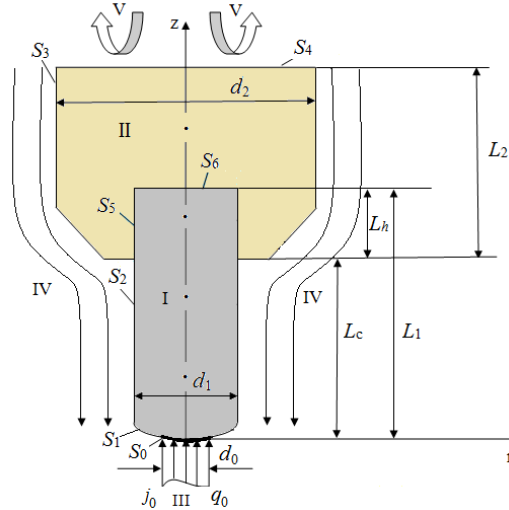


Рис. 1. Составной катодный узел плазменных устройств.

I – катод (вставка), II – корпус узла (обоймы), III – плазма разряда,  
 IV – плазмообразующий газ, V – теплоотвод (жидкость)

На рис.1 показаны геометрические размеры осесимметричной конструкции, где  $S_0$  – поверхность контакта "плазма – металл",  $S_1$  – неэмиттирующий торец катода,  $S_2$  – поверхность радиационно-конвективного теплообмена катода,  $S_3$  – поверхность конвективного теплообмена обоймы,  $S_4$  – охлаждаемый торец обоймы,  $S_5, S_6$  – поверхности контакта "катод - обойма".

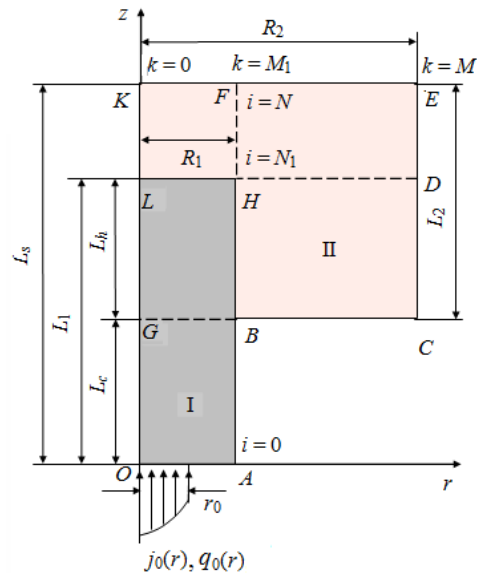


Рис. 2. Расчетная модель катодного узла.

Полуплоскость осевого сечения расчетной модели составного катодного узла представлена на рис.2. На торец стержневого катода  $S_1(r,$



0) в пределах контакта с дуговым разрядом радиуса  $r_0$  из прикатодной плазмы поступают тепловой и электрический потоки с плотностями  $q_0(r, 0)$  и  $j_0(r, 0)$  соответственно ( $r, z$  – цилиндрические координаты). Значения этих параметров определяются из совместного анализа процессов на поверхности металла и в прикатодной плазме [5].

Строгий подход к обобщенной задаче электро- и тепломассопереноса состоит в совместном решении уравнений математической физики эллиптического и параболического типов с краевыми условиями, адекватными условиям функционирования катодных узлов реальных плазменных устройств. Цилиндрическая симметрия рассматриваемого электродного узла позволяет трехмерные физические поля  $F(x, y, z)$  привести к двумерным  $F(r, z)$ , что в значительной степени упрощает их математическое моделирование и анализ. Таким образом, задача сводится к решению трех дифференциальных уравнений с нелинейными граничными условиями в двумерном приближении:

1) уравнения нестационарной теплопроводности

$$c_k \rho_k \frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \lambda_k(T_k) \frac{\partial T_k}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_k(T_k) \frac{\partial T_k}{\partial z} \right] + j_k^2 / \sigma_k(T_k) \quad (1)$$

2) уравнения непрерывности тока (Лапласа)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \sigma_k(T_k) \frac{\partial U_k}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sigma_k(T_k) \frac{\partial U_k}{\partial z} \right] = 0, \quad (2)$$

$$j_k = (j_r^2 + j_z^2)^{1/2}, \quad j_r = -\sigma_k(T_k) \partial U_k / \partial r, \quad j_z = -\sigma_k(T_k) \partial U_k / \partial z$$

для катодного узла ( $k = 1$  – катод,  $k = 2$  – обойма), показанного схематически на рис. 2.

3) уравнения нестационарной диффузии активатора в объеме катода

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r D(T_k) \frac{\partial n}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(T_k) \frac{\partial n}{\partial z} \right], \quad D(T_k) = D_0 \exp\left(-\frac{Q_a}{k_B T_k}\right), \quad (3)$$

где  $T_k$  – температура;  $c_k, \rho_k, \lambda_k, \sigma_k$  – соответственно удельная теплоемкость, плотность, коэффициент теплопроводности, удельная электрическая проводимость материалов катодного узла;  $j_k$  – плотность тока;  $U_k$  – потенциал электрического поля;  $n, D, D_0, Q_a$  – соответственно концентрация, коэффициент диффузии, фактор диффузии, энергия активации легирующего элемента (присадки);  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $t$  – время.

Решения уравнений (1) и (2) с соответствующими граничными условиями проведены в [6, 7]. В отличие от краевых электрической и термической задач диффузионная задача ставится и решается только для катода – вставки.

Граничные условия к уравнению (3) следующие:

1. В начальный момент времени концентрация присадки в катоде считается распределенной равномерно и равной

$$n(r, z, 0) = n_0$$

2. На холодном торце катода (поверхность  $LH$ ) концентрация остается постоянной

$$n(r, L_1, t) = n_0, \quad 0 \leq r \leq R_1$$

3. На поверхности горячего торца катода ( $OA$ ) происходит испарение присадки и возврат ее из приэлектродной области в пределах контакта с разрядом – круга радиуса  $r_0$ :

$$-D(T) \frac{\partial n(r, 0, t)}{\partial z} = \begin{cases} (1 - \eta)(n/n_m)^{2/3} w(T), & 0 \leq r \leq r_0 \\ (n/n_m)^{2/3} w(T), & r_0 < r \leq R_1 \end{cases}$$

где  $n_m$  – концентрация частиц основного металла в катоде; коэффициент  $(n/n_m)^{2/3}$  учитывает различие поверхностных и объемных концентраций присадки;  $\eta$  – доля ее атомов, возвратившихся на поверхность катода за счет рециклинга из приэлектродной области;  $w(T)$  – скорость испарения присадки (частиц/м<sup>2</sup>·с).

4. Радиальный поток активатора на оси симметрии катода ( $OL$ ) равен нулю

$$\frac{\partial n(0, z, t)}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq z \leq L_1$$

5. Граничное условие на цилиндрической поверхности ( $AH$ )

$$-D(T) \frac{\partial n(R_1, z, t)}{\partial r} = (n/n_m)^{2/3} w(T), \quad 0 \leq z \leq L_c,$$

$$\frac{\partial n(R_1, z, t)}{\partial r} = 0, \quad L_c < z \leq L_1$$

Граничное условие в месте контакта дугового разряда с катодом отражает уникальное явление – ионно-атомный рециклинг в прикатодной плазме [1]. Испарившиеся атомы металла, попадая в приэлектродную область, легко ионизируются электронами, так как вероятность ионизации металла больше вероятности ионизации рабочего газа.

Соотношение  $\beta/\alpha \sim n_e^0/n_a^0$  ( $\beta, \alpha$  – скорости ионизации и рекомбинации;  $n_e^0, n_a^0$  – равновесные концентрации электронов и атомов соответственно) больше для металла с меньшим  $V_i$ , что приводит к увеличению скорости избыточной ионизации атомов присадки по сравнению с атомами основного металла и рабочего газа. Под действием электрического поля ионы материала катода возвращаются обратно на поверхность, где восстанавливаются до атома. В результате этого скорость испарения и удельная эрозия катода в области пятна получают значительно ниже рассчитанных по температуре поверхности.

Скорость испарения в вакууме рассчитывается по известной ленгмюровской формуле

$$w(T) = P_n \sqrt{1/(2\pi MRT)}, \quad (4)$$

где  $P_n$  – давление насыщенных паров;  $M$  – молярная масса.

При испарении в газовой среде выражение (4) записывается в виде:

$$w(T) = \alpha_p P_H \sqrt{1/(2\pi MRT)},$$

где  $\alpha_p$  – коэффициент испарения (Ленгмюра), который зависит от рельефа и чистоты поверхности катода, давления и рода рабочего газа.

### Метод решения

Уравнение диффузии (3) в рассмотренной выше постановке аналитически не решается, так как является квазилинейным уравнением с переменными коэффициентами. Поэтому для численного решения применяем локально-одномерную схему прогонки метода конечных разностей [8]. Чтобы обойти трудности, связанные с выбором системы единиц измерения, а также в целях универсализации решения исходное уравнение приводим к безразмерному виду:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = G_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{D} \frac{\partial y}{\partial z} \right) + G_2 \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \tilde{D} \frac{\partial y}{\partial \tilde{r}} \right), \quad \tilde{D} = \exp(-Q/kT) \quad (5)$$

где

$$y = n/n_0, \quad \tau = t/\tau_0, \quad \tilde{z} = z/L_1, \quad \tilde{r} = r/R_1, \\ \tilde{D} = D/D_0, \quad G_1 = D_0\tau_0/L_1^2, \quad G_2 = D_0\tau_0/R_1^2.$$

Остановимся на некоторых особенностях поставленной задачи. В данном случае использование явных схем нецелесообразно, так как  $D(T)$  является быстроменяющейся функцией и условие устойчивости таких схем  $\tau \leq h_2 / 2\max D(T)$  требует очень малого шага  $\tau$  по времени. Поэтому расчет необходимо вести по безусловно устойчивым неявным схемам с весом  $\delta > 0,5$  [8]. Используя пространственно-временную сетку, введенную при решении электрической и тепловой задач [6, 7], с учетом переменности коэффициента  $\tilde{D}(T)$ , производные уравнения аппроксимируем следующим образом (знак «тильда» для упрощения опускаем):

$$\left( \frac{\partial y}{\partial \tau} \right)_j \sim y_{i,k}^{j+1} - y_{i,k}^j, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial y}{\partial z} \right] \sim \frac{1}{h_1/L_1} \left( D_{i+1/2} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_1/L_1} - D_{i-1/2} \frac{y_i - y_{i-1}}{h_1/L_1} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r D \frac{\partial y}{\partial r} \right] \sim \frac{1}{h_2/R_1} \left( D_{k+1/2} \frac{y_{k+1} - y_k}{h_2/R_1} - D_{k-1/2} \frac{y_k - y_{k-1}}{h_2/R_1} \right) + \\ + \frac{1}{2r_k} (D_{k-1/2} \cdot y_{\tilde{r},k} + D_{k+1/2} \cdot y_{r,k}),$$

где  $y_{\tilde{r},k} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_2/R_1}$  – левая разностная производная в точке  $y_k$ ;

$$y_{r,k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_2 / R_1} - \text{правая разностная производная в точке } y_k.$$

Коэффициенты

$$D(i,k) - 1/2 = D(x_{i,k} - 0,5h_{1,2}), D(i,k) + 1/2 = D(x_{i,k} + 0,5h_{1,2})$$

выбираются из условий второго порядка аппроксимации на полушаге пространственной сетки в точках  $(x_{i,k} - 0,5h_{1,2})$  и  $(x_{i,k} + 0,5h_{1,2})$  соответственно. Это позволяет устранить немонотонность в решении сеточных функций, появляющихся при использовании полных шагов на пространственной сетке. Применяемая схема является абсолютно устойчивой, монотонной, непрерывно дифференцируемой и имеет погрешность аппроксимации  $O(\tau + h_2)$ .

Уравнение (5) в разностном виде запишется:

$$\begin{aligned} y_i^{j+1} - y_i^j &= G_1 [D_{i+1/2}(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - D_{i-1/2}(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1})] / (h_1 / L_1)^2 + \\ &+ G_2 [D_{k+1/2}(y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1}) - D_{k-1/2}(y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1})] / (h_2 / R_1)^2 + \\ &+ \frac{G_2}{2r_k} (D_{k-1/2} \cdot y_{\bar{r},k} + D_{k+1/2} \cdot y_{r,k}). \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя локально-одномерную схему, вместо уравнения (6) последовательно решаем одномерные задачи с соответствующими граничными условиями

$$y_i^{j+1} - y_i^j = G_1 [D_{i+1/2}(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - D_{i-1/2}(y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1})] / (h_1 / L_1)^2 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} y_k^{j+1} - y_k^j &= G_2 [D_{k+1/2}(y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1}) - D_{k-1/2}(y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1})] / (h_2 / R_1)^2 + \\ &+ \frac{G_2}{2r_k} (D_{k-1/2} \cdot y_{\bar{r},k} + D_{k+1/2} \cdot y_{r,k}) \end{aligned} \quad (8)$$

соответственно по координатам  $z$  и  $r$ .

### Расчет по координате $z$

После несложных преобразований уравнения (7) имеем:

$$D_{i-1/2} \cdot y_{i-1}^{j+1} - (D_{i-1/2} + D_{i+1/2} + 1/N^2 G_1) y_i^{j+1} + D_{i-1/2} y_{i+1} = y_i^j / (N^2 G_1)$$

Обозначив

$$A_i = D_{i-1/2}, \quad B_i = D_{i+1/2}, \quad C_i = D_{i-1/2} + D_{i+1/2} + 1/(N^2 G_1), \quad F_i = y_i^j / (N^2 G_1),$$

получим разностное уравнение вида:

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i.$$

Решение системы алгебраических уравнений такого типа подробно рассмотрено в предыдущей главе. Здесь остановимся на деталях аппроксимации граничных условий данной задачи.

После обезразмеривания граничное условие на рабочем торце электрода в разностном виде запишется следующим образом:

$$\frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^j}{h_2 / L_1} = \begin{cases} -\frac{(1-\eta)w_0 L_1 w(N,k) \cdot y_N^{j+1}}{D_0 n_0^{1/3} n_m^{2/3} D_{N-1/2} (y_N^j)^{1/3}}, & 0 \leq r \leq r_0 \\ -\frac{w_0 L_1 w(N,k) \cdot y_N^{j+1}}{D_0 n_0^{1/3} n_m^{2/3} D_{N-1/2} (y_N^j)^{1/3}}, & r_0 < r \leq R_1 \end{cases}$$

Подставив  $y_{N-1}^{j+1} = \alpha_N y_N^{j+1} + \beta_N$  в уравнение, находим значение концентрации  $y_N^j$  на новом временном слое:

$$y_N^{j+1} = \begin{cases} \frac{(1-\eta)D_{N-1/2} \cdot \beta_N}{(1-\alpha_N)D_{N-1/2} + P_1 w(N,k)/(y_N^j)^{1/3}}, & 0 \leq r \leq r_0, \\ \frac{D_{N-1/2} \cdot \beta_N}{(1-\alpha_N)D_{N-1/2} + P_1 w(N,k)/(y_N^j)^{1/3}}, & r_0 < r \leq R_1, \end{cases}$$

где  $P_1 = w_0 h_1 / (D_0 n_0^{1/3} n_m^{2/3})$  – безразмерный параметр;  $w_0$  – скорость испарения присадки при температуре  $T_0$ .

### Расчет по координате $r$

Подставляя в уравнение (8) выражения соответствующих производных из (6), получим

$$y_k^{j+1} - y_k^j = \frac{G_2}{(h_2 / R_1)^2} [D_{k+1/2} (y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1}) - D_{k-1/2} (y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1})] + \\ + \frac{G_2}{2k(h_2 / R_1)^2} [D_{k-1/2} (y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}) + D_{k+1/2} (y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1})]$$

С учетом соотношения  $M^2 = 1/(h_2/R_1)^2$  имеем

$$y_k^{j+1} - y_k^j = G_2 M^2 \{ D_{k+1/2} (y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1}) - D_{k-1/2} (y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}) + \\ + \frac{1}{2k} [D_{k-1/2} (y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}) + D_{k+1/2} (y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1})] \}$$

Раскрывая скобки, приведя подобные члены и обозначив

$$A_k = (2k-1)D_{k-1/2}, \quad B_k = (2k+1)D_{k+1/2}, \\ C_k = (2k+1)D_{k+1/2} + (2k-1)D_{k-1/2} + 2k/(G_2 M^2), \\ F_k = 2k y_k^j / (G_2 M^2), \quad M = R_1/h_2$$

получим систему разностных уравнений для значения искомой функции  $y_k$  на новом временном слое  $t = t^{j+1}$

$$A_k y_{k-1}^{j+1} - C_k y_k^{j+1} + B_k y_{k+1}^{j+1} = -F_k, \quad 0 < k \leq M$$

где  $F_k$  – известная функция, определяемая по значениям функции на предыдущем слое  $j$ .

На внутренней границе ( $k=0$ ) определяются начальные прогоночные коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ . Так как на оси симметрии радиальный поток равен нулю, в уравнении диффузии член  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rD \frac{\partial n}{\partial r})$  при  $r \rightarrow 0$  является неопределенностью типа  $0/0$ . Раскрывая эту неопределенность

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rD \frac{\partial n}{\partial r}) = 2D \frac{\partial^2 n}{\partial r^2}$$

на оси симметрии для прогонки по  $r$  получаем следующее разностное уравнение:

$$y_0^{j+1} - y_0^j = 2G_2 D_{0+1/2} (y_{-1}^{j+1} - 2y_0^{j+1} - y_1^{j+1}) / (h_2 / R_1)^2$$

Поскольку  $y_{-1}^{j+1} = y_1^{j+1}$ , получим

$$y_0^{j+1} - y_0^j = 4M^2 G_2 D_{0+1/2} (y_1^{j+1} - y_0^{j+1})$$

Сравнивая с  $y_0^{j+1} = \alpha_1 y_1^{j+1} + \beta_1$ , находим

$$\alpha_1 = 4M^2 G_2 D_{0+1/2} / (1 + 4M^2 G_2 D_{0+1/2}), \quad \beta_1 = y_0^j / (1 + 4M^2 G_2 D_{0+1/2})$$

Краевое условие на цилиндрической поверхности в разностном виде запишется как

$$\frac{y_M^{j+1} - y_{M-1}^{j+1}}{h_2 / R_1} = \frac{w_0 R_1}{D_0 n_0^{1/3} n_M^{2/3}} \times \frac{w(M, z) y_M^{j+1}}{D_{M-1/2} (y_M^j)^{1/3}}, r = R_1,$$

$$y_{M-1}^{j+1} = \alpha_M y_M^{j+1} + \beta_M$$

Исключая  $y_{M-1}^{j+1}$ , находим граничное значение искомой функции

$$y_M^{j+1} = \frac{D_{M-1/2} \cdot \beta_M}{D_{M-1/2} (1 - \alpha_M) + P_2 w(M, z) / (y_M^j)^{1/3}},$$

с обозначениями

$$P_2 = w_0 h_2 / (D_0 n_0^{1/3} n_M^{2/3}), \quad D_{M-1/2} = (D_M - D_{M-1}) / 2.$$

При прогонке по локально-одномерной схеме разностные уравнения (7) и (8) преобразуем к алгебраической системе вида

$$A_{i,k} y_{(i,k)-1} - C_{i,k} y_{i,k} + B_{i,k} y_{(i,k)+1} = -F_{i,k}$$

с условиями  $A_{i,k} > 0$ ,  $B_{i,k} > 0$ ,  $C_{i,k} > A_{i,k} + B_{i,k}$  разрешимости системы данным методом. Далее решение задачи находим по известной формуле:

$$y_{(i,k)} = \alpha_{(i,k)} y_{(i,k)+1} + \beta_{(i,k)+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (9)$$

$$\alpha_{(i,k)+1} = \frac{\beta_{i,k}}{C_{i,k} - A_{i,k} \alpha_{i,k}}, \quad \beta_{(i,k)+1} = \frac{F_{i,k} - A_{i,k} \beta_{i,k}}{C_{i,k} - A_{i,k} \alpha_{i,k}}$$

Значения начальных прогоночных коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  определяются на внутренних граничных условиях катода. Затем из других граничных условий вычисляются значения сеточных функций  $y_{N,M}$  и по формуле (9) – все остальные значения  $y_{(i,k)}$ . Переход от времени  $t$  к  $t+1$  реализуется через последовательное чередование прогонок по координатам  $z$ ,  $r$ . В результате получается двумерное распределение концентрации активатора в объеме цилиндрического катода в зависимости от времени работы плазменного устройства.

### Заключение

Математическое моделирование процессов электро- и тепломассопереноса проводится в следующей последовательности. Сначала решаются электрофизическая и термическая задачи в предположении постоянства эмиссионных характеристик катода. Затем, используя поле температур в системе «катод – обойма», решается уравнение диффузии по составленному выше алгоритму. Цикл повторяется до выхода газового разряда на стационарный режим. Численный алгоритм позволяет исследовать динамику выхода и испарения легирующей примеси из термоэмиссионных катодов плазменных устройств в широком диапазоне изменения их рабочих параметров.

### Литература

1. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Вводный том IV / Под ред. В.Е. Фортова. — М.: Наука, 2000. — С. 153–459.
2. Даутов Г.Ю., Тимошевский А.Н., Урюков Б.А. и др. Генерация низкотемпературной плазмы и плазменные технологии: проблемы и перспективы. — Новосибирск: Наука, 2004. — 464 с.
3. Жуков М.Ф., Засыпкин И.М., Тимошевский А.Н. и др. Электродуговые генераторы термической плазмы. — Новосибирск: Наука, 1999. — 712 с.
4. Fauchais P., Vardelle A. Thermal plasmas // IEEE Trans. on Plasma Sci. — 1997. — V. 25. — № 6. — P. 1258–1280.
5. Цыдыпов Б.Д. Катодные и прикатодные процессы сильноточных плазменных систем. Saarbrücken: Lambert Academics Publishing. — 2012.— 272 с.
6. Цыдыпов Б.Д., Аветян М.А. Нелинейная электрофизическая задача для сильноточных катодных узлов генераторов низкотемпературной плазмы // Вестник БГУ. — Вып.9. Математика и информатика. — 2015. — С. 83–88.
7. Цыдыпов Б.Д., Симаков И.Г. Тепловое состояние катодных узлов сильноточных плазменных систем // Теплофизика высоких температур. — 2011. — Т. 49. — №4. — С. 663–670.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.

### References

1. *Entsiklopediya nizkotemperaturnoi plazmy* [Encyclopedia of Low-Temperature Plasma]. Moscow: Nauka Publ., 2000. V. 4. Pp. 153–459.
2. Dautov G. Yu., Timoshevskii A. N., Uryukov B. A. et al. *Generatsiya nizkotemperaturnoi plazmy i plazmennye tekhnologii: problemy i perspektivy* [Generation of Low-Temperature Plasma and Plasma Technologies: Problems and Prospects]. Novosibirsk: Nauka Publ., 2004. 464 p.

3. Zhukov M. F., Zasyupkin I. M., Timoshevskii A. N. et al. *Elektrodugovye generatory termicheskoi plazmy* [Electric Arc Thermal Plasma Generators]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1999. 712 p.

4. Fauchais P., Vardelle A. Thermal plasmas. *IEEE Trans. on Plasma Sci.* 1997. V. 25. No. 6. Pp. 1258–1280.

5. Tsydyпов B. D. *Katodnye i prikatodnye protsessy sil'notochnykh plazmennyykh sistem* [Cathode and Near-Cathode Processes of High-Current Plasma Systems]. Saarbrücken: Lambert Academics Publishing, 2012. 272 p.

6. Tsydyпов B. D., Avetyan M. A. Nelineinaya elektrofizicheskaya zadacha dlya sil'notochnykh katodnykh uzlov generatorov nizkotemperaturnoi plazmy [Nonlinear Electrophysical Problem for High-Current Cathode Assemblies in Generators of Low-Temperature Plasma]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University.* 2015. V. 9. Pp. 83–88.

7. Tsydyпов B. D., Simakov I. G. Teplovoe sostoyanie katodnykh uzlov sil'notochnykh plazmennyykh sistem [Thermal State of Cathode Assemblies in High-Current Plasma Systems]. *Teplofizika vysokikh temperatur – Thermal Physics of High Temperatures.* 2011. V. 49. No. 4. Pp. 663–670.

8. Samarskii A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The Theory of Differential Schemes]. Moscow: Nauka Publ., 1977. 656 p.

*Цыдыпов Балдандоржо Дашиевич*, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник Института физического материаловедения СО РАН, e-mail: [tsydyповbd@rambler.ru](mailto:tsydyповbd@rambler.ru)

*Аветян Арсеновна*, аспирант Института физического материаловедения СО РАН, e-mail: [magdaavetian@mail.ru](mailto:magdaavetian@mail.ru)

*Дармаев Тумэн Гомбоцыренович*, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией вычислительных и геоинформационных технологий Бурятского государственного университета, e-mail: [dtg@bsu.ru](mailto:dtg@bsu.ru)

*Чимытов Тимур Андреевич*, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры экспериментальной и космической физики Бурятского государственного университета, e-mail: [tchimytov@gmail.com](mailto:tchimytov@gmail.com)

*Baldandorzho D. Tsydyпов*, DSc in Engineering, Leading Researcher, Institute of Physical Materials Science, SB RAS.

*Maktakh A. Avetyan*, Postgraduate, Institute of Physical Materials Science, SB RAS.

*Tumen G. Darmaev*, PhD in Physics and Mathematics, Laboratory of Computing and GIS Technologies, Buryat State University.

*Timur A. Chimyтов*, PhD in Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Department of Experimental and Space Physics, Buryat State University.



## Содержание

### Алгебра и геометрия

<i>Ковыришина А. И.</i> К вопросу о стабильных элементах свободной нильпотентной группы $F_{3,12}$ .....	3
<i>Цыренова В. Б.</i> Комплексы в трехмерном квазигиперболическом пространстве ${}^{01}S_3^1$ .....	9

### Управляемые системы и методы оптимизации

<i>Булдаев А. С., Мижидон К. А.</i> Задача построения управления линейной динамической системой по эталонному закону движения..	16
<i>Расина И. В., Гусева И. С., Фесько О. В., Усенко О. В.</i> Метод локального улучшения управления для неоднородных дискретных систем.....	27
<i>Хишектыева И.-Х. Д.</i> Применение метода неподвижных точек в задачах оптимизации динамических систем по параметрам и начальным условиям .....	38

### Информационные системы и технологии

<i>Баглаев И. И.</i> Кинематический метод моделирования поверхностей в среде FMSLogo.....	49
<i>Харинов М. В.</i> Основы модели квазиоптимальных приближений изображения.....	60

### Математическое моделирование и обработка данных

<i>Антонова Л. В., Данеев А. В.</i> Анализ электрокардиограмм при помощи функций распознавания.....	73
<i>Гармаева В. В.</i> Алгоритмическое обеспечение исследования свободных колебаний балки Эйлера-Бернулли с прикрепленными телами.....	79
<i>Мижидон А. Д., Харахинов А. В.</i> К исследованию краевой задачи для балки Тимошенко с упруго прикрепленным телом с двумя степенями свободы.....	88
<i>Цыдыпов Б. Д., Аветян М. А., Дармаев Т. Г., Чимытов Т. А.</i> Постановка и метод решения обобщенных краевых задач электро- и тепломассопереноса в катодном узле сильноточных плазменных систем.....	102

## Contents

### Algebra and Geometry

<i>Kovyrshina A. I.</i> To the problem of stable elements in free nilpotent group $F_{3,12}$ .....	3
<i>Tsyrenova V. B.</i> Complexes in three-dimensional quasi-hyperbolic space ${}^0S_3^1$ .....	9

### Control systems and methods for optimization

<i>Buldaev A. S., Mizhidon K. A.</i> The problem of construction control for linear dynamical system according to reference law of motion .....	16
<i>Rasina I. V., Guseva I. S., Fesko O. V., Usenko O. V.</i> Method of control local improvement for non-homogeneous discrete systems .....	27
<i>Khishektueva I.-Kh. D.</i> Application of the fixed points method for the problems of dynamic systems optimization on parameters and initial conditions .....	38

### Information Systems and Technology

<i>Baglaev I. I.</i> Kinematic method of surface modeling in FMSLogo programming environment .....	49
<i>Kharinov M. V.</i> Fundamentals of the model of image quasi-optimal approximations .....	60

### Mathematical modeling and data processing

<i>Antonova L. V., Daneev A. V.</i> Analysis of electrocardiograms using the recognition function .....	73
<i>Garmaeva V. V.</i> Algorithmic solution for research of natural oscillations of an Euler-Bernoulli beam with attached solids .....	79
<i>Mizhidon A. D., Kharakhinov A. V.</i> The research of boundary value problem for a Timoshenko beam having elastically attached solid with two degrees of freedom .....	88
<i>Tsydypov B. D., Avetyan M. A., Darmaev T. G., Chimytov T. A.</i> A statement and methods of solving generalized boundary problems of electro-, heat and mass transfer in cathode assembly of high-current plasma systems .....	102

**ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ,  
ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ В ЖУРНАЛ  
«ВЕСТНИК БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА»**

Отбор и рецензирование публикуемых статей производятся редакционной коллегией из ведущих ученых и приглашенных специалистов.

В журнал следует направлять статьи, отличающиеся высокой степенью научной новизны и значимостью. Каждая статья имеет УДК, а также письменную развернутую рецензию доктора наук, заверенную печатью. Рецензенты должны являться признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и иметь в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи.

Автор статьи обязан заключить лицензионный договор о предоставлении неисключительных прав на использование созданного им произведения (статьи) ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет». Образец лицензионного договора представлен на сайте БГУ.

Общие требования	Тексты представляются в электронном и печатном виде. Файл со статьей может быть отправлен электронным письмом. На последней странице – подпись автора(ов) статьи. Название статьи и аннотация даются на русском и английском языках. Аннотация (авторское резюме) должна заключать от 100 до 250 слов. После аннотации необходимо дать ключевые слова (не менее семи слов) на русском и английском языках. Несоответствие между русскоязычным и англоязычными текстами не допускается. Нужно выполнить транслитерацию русского текста литературы латиницей.
Электронная копия	Статья представляется на русском языке в doc-файле, набранная в текстовом редакторе Microsoft Word. Текстовый редактор Microsoft Word (версии XP, 2003). В имени файла указывается фамилия первого автора.
Параметры страницы	Формат B5 (ISO) (176x250 мм). Поля: все поля – 2,7 см.
Форматирование основного текста	С нумерацией страниц внизу по центру. Абзацный отступ – 0,5 см. Интервал – одинарный.
Гарнитура шрифта	Times New Roman. Размер кегля – 11 пт.
Объем статьи (ориентировочно)	Кратких сообщений – 4-8 с., статей – 8-15 с. Название статьи должно содержать не более 10 слов.
Сведения об авторах	Указываются фамилия, имя, отчество (полностью), ученая степень, звание, должность и место работы, страна, адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail (на русском и английском языках)

В начале статьи ставится подробный индекс УДК согласно действующим в настоящее время классификаторам. Далее следуют инициалы и фамилии авторов (полуужирный курсив, выравнивание по правому краю), название статьи (полуужирным шрифтом, по центру), аннотация, ключевые слова и перевод перечисленных частей текста на английский язык. В конце документа после списка литературы приводятся сведения об авторах и их перевод на английский язык (фамилия, имя, отчество полностью, ученая степень, ученое звание, должность, место

работы (указываются официальные названия организаций), контактный адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail). Ссылки на гранты приводятся в сноске на первой странице.

Статья должна быть структурирована и содержать введение, ряд разделов с возможными подразделами, заключение, список литературы.

Набор формул осуществляется в редакторе формул Microsoft Equation 3/4 или MathType 5/6. Не допускается: набор формул как текста (включая таблицу символов, надстрочные и подстрочные индексы), а также с применением автофигур; вставка формул как рисунков; сжатие формулы как рисунка. Не допускается набор формул с применением появившегося в Word 2007 нестандартного редактора формул, функционирующего только с форматом docx. Все формулы, на которые в тексте даются ссылки, выносятся в отдельную строку с нумерацией в круглых скобках в тексте по правому краю страницы (строка выравнивается по правому краю). Основной размер шрифта в формулах 11 пт.

- Список литературы – все работы необходимо пронумеровать, в тексте ссылки на литературу оформлять в квадратных скобках.

- Материалы, не соответствующие предъявленным требованиям, к рассмотрению не принимаются. Все статьи проходят проверку в системе «Антиплагиат. ВУЗ».

- Решение о публикации статьи принимается редакцией «Вестника БГУ». Корректурa авторам не высылается, присланные материалы не возвращаются. Гонорар авторам не выплачивается.

- Допустима публикация статей на английском языке, сведения об авторах, название, аннотацию и ключевые слова которых необходимо перевести на русский язык.

- Формат журнала 70 x 100 1/16.

- Желательно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Все объекты должны быть черно-белыми без оттенков. Рисунки и графики должны иметь четкое изображение и быть выдержаны в черно-белой гамме, лучше применять штриховку. Фотографии и рисунки в формате \*.tif или \*.jpg должны иметь разрешение не менее 300 dpi. Диаграммы, рисунки, графики должны прилагаться отдельными файлами, чтобы издательство имело возможность ввести в них правки. Математические формулы в текстах должны быть выполнены в MathType. Если работа содержит примеры на старославянском языке или языках народов, то отправить соответствующие символы.

Стоимость опубликования одной статьи составляет за одну страницу формата В5 для сотрудников Бурятского государственного университета – 200 р., для остальных – 400 р.

Оплата за публикацию статьи, авторами которой являются только аспиранты, не взимается. Должна прилагаться справка учреждения, подтверждающая, что авторы являются аспирантами этого учреждения.