



Адрес редакции  
670000, г. Улан-Удэ,  
ул. Смолина, 24а  
E-mail: vbsumi@yandex.ru

Адрес издателя  
670000, г. Улан-Удэ,  
ул. Смолина, 24а  
E-mail: riobsu@gmail.com

Свидетельство о регистрации  
ПИ №ФС77-36152 от 06 мая  
2009 г. Федеральная служба по  
надзору в сфере связи, инфор-  
мационных технологий и мас-  
совых коммуникаций (Роском-  
надзор)

Перевод на английский язык  
С. В. Сазоновой

Редактор  
Е. П. Евдокимова  
Компьютерная верстка  
Д. О. Трунина

Подписано в печать 15.06.15.  
Формат 60 x 84 1/8.  
Усл. печ. л. 17,9. Уч.-изд. л. 9,46.  
Тираж 1000. Заказ 162.  
Цена свободная.  
Дата выхода в свет 22.06.15.

Отпечатано в типографии  
Издательства БГУ  
670000, г. Улан-Удэ,  
ул. Сухэ-Батора, 3а

Учредитель  
ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет»

## ВЕСТНИК БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Издается с 1997 г.

Выходит 15 раз в год

### Выпуск 9/2015 МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

*Журнал включен Высшей аттестационной комиссией в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук*

*Редакционный совет «Вестника БГУ»*

*Н. И. Мошкин*, д-р техн. наук, проф., и. о. ректора Бурятского государственного университета (председатель); *А. В. Номоев*, д-р физ.-мат. наук, доц., проректор по НИР БГУ (зам. председателя); *П. А. Минакир*, д-р экон. наук, акад. РАН; *А. Л. Асеев*, акад. РАН, вице-президент РАН, председатель Сибирского отделения РАН; *М. Р. Бакланов*, д-р хим. наук, проф. (Бельгия); *П. Ю. Саух*, д-р филос. наук, проф. (Украина); *С. Н. Васильев*, д-р физ.-мат. наук, акад. РАН; *И. А. Тайманов*, д-р физ.-мат. наук, акад. РАН; *К. Цецура*, д-р философии по коммуникации и связям с общественностью, проф. Университета Оклахомы (США); *Оде Сесилия*, проф. (Нидерланды); *Ван Яминь*, проф., декан факультета русского языка Института иностранных языков Восточно-Китайского педагогического университета (Китай); *Г. Ц. Дамбаев*, д-р мед. наук, проф., чл.-кор. РАН; *О. В. Матыцин*, д-р пед. наук, проф., чл.-кор. РАО, президент Российского студенческого союза, президент РГАФК

*Редакционная коллегия выпуска*

*А. С. Булдаев*, д-р физ.-мат. наук, проф. (главный редактор); *С. Н. Васильев*, акад. РАН; *В. И. Гурман*, д-р техн. наук, проф.; *Ж. Г. Дамбаев*, д-р техн. наук, проф.; *А. В. Данеев*, д-р техн. наук, проф.; *А. И. Кожанов*, д-р физ.-мат. наук, проф.; *А. В. Лакеев*, д-р физ.-мат. наук, проф.; *А. Д. Миждон*, д-р техн. наук, проф.; *Ни Минь Кань*, д-р наук, проф.; *Б. Очирбат*, д-р наук, проф.; *В. А. Срочко*, д-р физ.-мат. наук, проф.; *Д. Ш. Ширавов*, д-р физ.-мат. наук, проф.; *Р. Энхбат*, д-р наук, проф.



# 1. Алгебра и геометрия

УДК 512.54

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-3-6

## О СТАБИЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В СВОБОДНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ РАНГА ДВА

© Ковыршина Анна Ивановна

кандидат физико-математических наук, доцент Педагогического института Иркутского государственного университета

Россия, 664003, ул. Карла Маркса, 1, e-mail: annkow@mail.ru

В статье представлено полное описание элементов свободных нильпотентных групп ранга два степени восемь, остающихся неизменными под действием любого автоморфизма группы. Известно, что в таких группах существуют нетривиальные стабильные элементы, но их количество найдено не было. В работе доказывается теорема о единственности (с точностью до его степеней) нетривиального стабильного элемента в свободных нильпотентных группах ранга два степени восемь.

**Ключевые слова:** автоморфизмы групп, неподвижные точки.

## STABLE ELEMENTS IN FREE NILPOTENT GROUPS OF RANK TWO

Anna I. Kovyrshina

PhD, A/Professor, Pedagogical Institute of Irkutsk State University

1 Karla Marksa st., Irkutsk 664003, Russia

The article presents a complete description of the elements of free nilpotent groups of rank two and stage 8 that remain unchanged under the action of any automorphism of the group. Existence of non-trivial stable elements in such groups is known, but their number was not found. We prove a theorem on the uniqueness (up to its powers) of nontrivial stable element in free nilpotent groups of rank two and stage 8.

**Keywords:** automorphisms of groups, fixed points.

### Введение

Стабильными элементами группы называются элементы, неподвижные при всех ее автоморфизмах. Стабильные элементы свободных нильпотентных групп тесно связаны с инвариантами Ли свободных колец Ли. Вопросами существования инвариантов Ли занимались Ф. Вефер (1949 г.) и М. Барроу (1958 г.), были найдены условия существования инвариантов Ли [см. 4, 5, 9]. В работе [9] представлен явный вид одного из таких элементов. В дальнейшем это послужило основанием для предположения, что неединичные стабильные элементы также могут существовать и в свободных нильпотентных группах при определенных условиях на ранг и степень нильпотентности группы.

Вопрос о существовании стабильных элементов в группах был поставлен А. Мясниковым в проекте MAGNUS (<http://www.sci.cny.cuny.edu/~shpil/gworld/problems/probnil.html>):

*Пусть  $G$  – свободная нильпотентная группа конечного ранга  $r$ . Пусть элемент  $g \in G$  неподвижен относительно всех автоморфизмов группы  $G$ . Верно ли, что  $g = 1$ ?* Отрицательный ответ на этот вопрос был получен в 1998 году В. В. Блудовым [1], который привел примеры нетривиальных стабильных элементов свободных нильпотентных групп ранга 2, в частности, элемент  $[a, b, a, [a, b, b], [a, b]]$  стабилен относительно любого автоморфизма свободной нильпотентной группы ранга два и степени восемь.

В 2001 году независимо друг от друга А. Папистас [8] и Е. Форманек [6] классифицировали все пары  $(r, n)$ , при которых существуют нетривиальные стабильные элементы в свободных нильпотентных группах ранга  $r$  и степени  $n$ . Так, для  $r = 2$  наименьшая степень

нильпотентности, при которой существуют нетривиальные стабильные элементы, равна 8. При этом конкретный вид стабильных элементов в этих работах не был указан, его нахождение представляет определенную техническую сложность.

Автором был получен метод нахождения стабильных элементов свободной нильпотентной группы [2]. Этот метод был применен для отыскания всех стабильных элементов с однородным вхождением образующих свободных нильпотентных групп ранга 2 степени 12. В работе [3] было представлено полное описание таких элементов. Вопрос о существовании стабильных элементов свободной нильпотентной группы ранга 2 и степени 8, отличных от элемента, указанного В. В. Блудовым, оставался открытым.

В представленной работе рассматривается свободная нильпотентная группа ранга 2 и степени 8, которую будем обозначать через  $F_{2,8}$ .

### 1. Вспомогательные сведения

При доказательстве основной теоремы нам понадобятся следующие результаты.

**Утверждение 1.** Стабильные элементы лежат в центре группы.

**Утверждение 2.** Элементы из центра свободной нильпотентной группы и только они неподвижны относительно всех ее IA-автоморфизмов, т. е. автоморфизмов группы, индуцирующих тождественные отображения в фактор-группе по коммутанту.

Любой автоморфизм  $\varphi \in \text{Aut}(F_2)$  представим в виде  $\psi\chi$ , где  $\psi \in \text{IA}(F_2)$ ,  $\chi$  – представитель смежного класса  $\text{Aut}(F_2)/\text{IA}(F_2)$ . Поэтому, чтобы проверить, является ли элемент  $g$  группы  $F_{2,8}$  стабильным относительно всех автоморфизмов группы, необходимо и достаточно проверить, что  $g$  стабилен относительно автоморфизмов  $\chi$ . Ввиду справедливости цепочки изоморфизмов групп

$$\text{Aut}(F_2)/\text{IA}(F_2) \cong \text{Aut}(F_2/[F_2, F_2]) \cong \text{GL}_2(\mathbb{Z})$$

можно вместо действия автоморфизмов на фактор-группе  $F_{2,8}/[F_{2,8}, F_{2,8}]$

проверять действие  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$  на свободной абелевой группе с порождающими  $a, b$ .

Обозначим порождающие  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ :

$$\varphi_{12} : a \rightarrow a + b, \quad b \rightarrow b;$$

$$\varphi_{21} : a \rightarrow a, \quad b \rightarrow a + b;$$

$$\alpha_1 : a \leftrightarrow -a, \quad b \rightarrow b;$$

$$\alpha_2 : b \leftrightarrow -b, \quad a \rightarrow a.$$

Ввиду утверждения 1, необходимо рассмотреть действие указанных автоморфизмов в центре группы  $F_{2,8}$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $g = \sum_s m_s u_s$ ,  $m_s \in \mathbb{Z}$  – центральный элемент свободной нильпотентной группы ранга 2, степени 8. Для того чтобы элемент  $g$  был стабильным относительно автоморфизмов  $\alpha_1, \alpha_2$ , необходимо и достаточно, чтобы число вхождений каждого из образующих в коммутаторы  $u_s$  было четным.

В работе мы используем разложение элемента группы на базисные коммутаторы, выбран базис М. Холла [например, см. 7]. Итак, мы будем брать в качестве коммутаторов  $u_s$  базисные коммутаторы с четным числом вхождения образующих. Чтобы проверить, является ли элемент группы  $g = \sum_s m_s u_s$ ,  $m_s \in \mathbb{Z}$  стабильным, нам необходимо и достаточно проверить, что  $g$  неподвижен относительно автоморфизмов  $\varphi_{12}$  и  $\varphi_{21}$ .

### 2. Основной результат

**Теорема.** В свободной нильпотентной группе ранга 2, степени 8 существует единственный нетривиальный стабильный элемент (с точностью до его кратных).

**Доказательство:** Пусть  $g = \sum_s m_s u_s$ ,  $m_s \in \mathbb{Z}$ ,  $u_s$  – базисные коммутаторы с четным числом вхождений образующих.

Запишем все базисные коммутаторы веса 8, в которые образующие входят четное число раз:

$$\begin{aligned} u_1 &= [[a, b, b, b, a, a], [a, b]], u_2 = [[a, b, b, b, b, b], [a, b]], \\ u_3 &= [[a, b, a, a, a, a], [a, b]], u_4 = [[a, b, b, b, a, a], [a, b, a]], \\ u_5 &= [[a, b, b, a, a, a], [a, b, b]], u_6 = [[a, b, b, b, b, b], [a, b, b]], \\ u_7 &= [[a, b, a, a, a, a], [a, b, a, a]], u_8 = [[a, b, a, a], [a, b, b, b]], \\ u_9 &= [[[a, b, a], [a, b]], [a, b, b]], u_{10} = [[[a, b, b], [a, b]], [a, b, a]], \\ u_{11} &= [[[a, b, b, a], [a, b]], [a, b]], u_{12} = [a, b, b, b, b, a, a, a], \\ u_{13} &= [a, b, b, a, a, a, a, a], u_{14} = [a, b, b, b, b, b, b, a]. \end{aligned}$$

Элемент  $g = \sum_{s=1}^{14} m_s u_s$  под действием автоморфизма  $\varphi_{12}$  (или  $\varphi_{21}$ ) переходит в сумму  $g + \sum_{k=1}^r w_k$ , где  $w_k$  – линейная комбинация коммутаторов, полученных из  $u_s$  заменой  $k$  вхождений образующего  $a$  на  $b$  (соответственно,  $b$  на  $a$ ),  $r$  – наибольшее из чисел, определяющих количество вхождений образующего  $a$  ( $b$ ) в коммутаторы  $u_s$ . Для нашего случая  $r = 6$ . Если линейная комбинация  $w_1$  не равна нулю, то элемент  $g$  является нестабильным. Если  $w_1 = 0$ , то  $g$  становится кандидатом на стабильный элемент. Далее, следует проверить выполняются ли равенства  $w_k = 0$  для  $k = 2, \dots, r$ . В случае положительного ответа, следует, что  $\varphi_{12}(g) = g$  (или  $\varphi_{21}(g) = g$ ).

Для каждого из автоморфизмов  $\varphi_{12}$  и  $\varphi_{21}$  найдем линейные комбинации  $w_1$  и определим условия, которым должны удовлетворять коэффициенты  $m_s$ ,  $s = 2, \dots, 14$ , чтобы выполнялось равенство  $w_1 = 0$ . Опуская промежуточные выкладки, связанные с разложением автоморфных образов элементов  $u_s$ ,  $s = 2, \dots, 14$  по базисным, запишем систему уравнений для вычисления  $m_s$ :

$$\begin{aligned} 2m_1 &= 0, 4m_2 = 0, m_1 + m_{11} = 0, 4m_3 = 0, m_4 = 0, 3m_7 = 0, \\ m_4 + 2m_5 &= 0, m_5 + m_9 + m_{10} = 0, 2m_6 + m_9 = 0, 2m_8 = 0. \end{aligned}$$

Общее решение данной системы имеет вид  $m_9 = t$ ,  $m_{10} = -t$ .

Таким образом, кандидатом на стабильный элемент становится элемент  $g = tu_9 - tu_{10}$ , при любом целом, отличном от нуля  $t$ . Далее проверяем, что линейные комбинации коммутаторов, полученных заменой более одного вхождения  $a$  на  $b$  и линейные комбинации коммутаторов, полученных заменой более одного вхождения  $b$  на  $a$  равны нулю. Таким образом,  $g$  – стабильный элемент. *Теорема доказана.*

**Замечание.** Элемент  $[a, b, a, [a, b, b], [a, b]]$ , представленный В. В. Блудовым, не является базисным, его разложение по базисным имеет вид  $u_9 - u_{10}$ .

### Заключение

Показано применение метода нахождения стабильных элементов для доказательства единственности нетривиального стабильного элемента в свободных нильпотентных группах ранга 2 степени 8.

Автор благодарен профессору В. В. Блудову за постановку вопросов и внимание к работе.

### Литература

1. Блудов В. В. Неподвижные точки относительно всех автоморфизмов в свободных нильпотентных группах // Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике: тез. докл. – Новосибирск, 1998. – Ч. 5.
2. Ковыршина А. И. Стабильные элементы в свободных нильпотентных группах ранга

три // Вестник Омского университета. – 2010. – № 4(58). – С. 20–23.

3. Ковыршина А. И. Стабильные элементы в свободных нильпотентных группах ранга два // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 48–57.

4. Burrow M. D. Invariants of free Lie rings // Communications on pure and applied mathematics. – 1958. – No. 11. – Pp. 419–431.

5. Burrow M. D. The enumeration of Lie invariants // Communications on pure and applied mathematics. – 1967. – No. 20. – Pp. 401–411.

6. Formanek E. Fixed points and centers of automorphism groups of free nilpotent groups // Communications in algebra. 2002. No. 30. Pp. 1033–1038.

7. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. – М.: Наука, 1974. – 455 с.

8. Papistas A. A note on fixed points of certain relatively free nilpotent groups // Communications in algebra. 2001. No. 29. Pp. 4693–4699.

9. Wever F. Ueber Invarianten in Lieschen Ringen // Mathematische Annalen. – 1949. – No. 120. – Pp. 563–580.

### References

1. Bludov V. V. Nepodvizhnye tochki otnositel'no vsekh avtomorfizmov v svobodnykh nil'potentnykh gruppakh [Fixed points with respect to all automorphisms in free nilpotent groups]. *Tretii Sibirskii kongress po prikladnoi i industrial'noi matematike – Third Siberian Congress on Industrial and Applied Mathematics*. Part 5. Novosibirsk, 1998.

2. Kovyrshina A. I. Stabil'nye elementy v svobodnykh nil'potentnykh gruppakh ranga tri [Fixed points in free nilpotent groups of rank three]. *Vestnik Omskogo universiteta – Bulletin of Omsk University*. 2010. No. 4 (58). Pp. 20–23.

3. Kovyrshina A. I. Stabil'nye elementy v svobodnykh nil'potentnykh gruppakh ranga dva [Stable elements of free nilpotent of rank two]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Proceedings of Irkutsk State University*. Series: Mathematics, 2010. No. 4. Pp. 48–57.

4. Burrow M. D. Invariants of free Lie rings. *Communications on pure and applied mathematics*. 1958. No. 11. Pp. 419–431.

5. Burrow M. D. The enumeration of Lie invariants. *Communications on pure and applied mathematics*. 1967. No. 20. Pp. 401–411.

6. Formanek E. Fixed points and centers of automorphism groups of free nilpotent groups. *Communications in algebra*. 2002. No. 30. Pp. 1033–1038.

7. Magnus W., Karrass A., Solitar D. *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*. New York-London-Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1966. 444 p.

8. Papistas A. A note on fixed points of certain relatively free nilpotent groups. *Communications in algebra*. 2001. No. 29. Pp. 4693–4699.

9. Wever F. Ueber Invarianten in Lieschen Ringen. *Mathematische Annalen*. 1949. No. 120. Pp. 563–580. (Ger.)

УДК: 512.647.2: 512.643.77

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-7-15

## СВЯЗЬ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ С ПРИВЕДЕНИЕМ К ПОЛНЫМ КВАДРАТАМ ПУЧКА ДВУХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ<sup>1</sup>

© Новиков Михаил Алексеевич

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института динамики систем и теории управления СО РАН

Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, e-mail: nma@icc.ru

В статье обсуждается взаимная связь знакоопределенности связки двух квадратичных форм с одновременным приведением этих форм к полным квадратам одним линейным вещественным конгруэнтным преобразованием. Установлена теорема о необходимых условиях знакоопределенности связки двух квадратичных форм. Полученные требования полностью совпадают с условиями одновременной диагонализации матриц этих форм. Достаточные условия знакоопределенности связки двух квадратичных форм составляются для одновременно приведенных к диагональным матриц форм. Наряду с известным способом исследования знакоопределенности связки двух форм предложен альтернативный подход, позволяющий проводить параметрический анализ рассматриваемой задачи.

В прикладных задачах качественного анализа и теории устойчивости движения необходимые условия знакоопределенности связки квадратичных форм применяются на начальном этапе определения области устойчивости. В дальнейшем после диагонализации матриц достаточные условия устойчивости формируются из достаточных условий знакоопределенности связки двух квадратичных форм. Демонстрация полученных результатов проведена на известном решении устойчивости перманентного вращения вокруг вертикальной оси волчка Лагранжа. Для проведения многих вычислительных выкладок, связанных с раскрытием, подстановкой, факторизацией выражений и вычислением определителей матриц, применялась система аналитических вычислений на современных вычислительных средствах.

**Ключевые слова:** квадратичная форма; знакоопределенность связки двух форм; характеристическое уравнение из двух матриц; одновременная диагонализация двух матриц; конгруэнтное преобразование.

## CORRELATION OF SIGN DEFINITENESS WITH REDUCTION TO PERFECT SQUARE OF TWO QUADRATIC FORMS BUNDLE

**Mikhail A. Novickov**

DSc, Senior researcher, Institute of System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences

134 Lermontova st., Irkutsk 664033, Russia

The article discussed the interconnection between the sign definiteness bundle of two quadratic forms with simultaneous reduction of these forms to perfect squares by one linear real congruent transformation. The theorem about the necessary conditions for the sign definiteness of a bundle of two quadratic forms was ascertained. The obtained requirements fully coincide with the conditions for simultaneous diagonalization of matrices of these forms. The sufficient conditions for the sign definiteness of two quadratic forms are made up for the matrix forms simultaneously reduced to diagonal ones.

Along with the known method of research the sign definiteness of two forms bundle an alternative approach was suggested. The approach makes it possible to make a parameter analysis of the considered problem.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект N НШ -- 5007.2014.9).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект N 15-08-06680-А).

In the applied problems of qualitative analysis and the theory of stability of motion, the necessary conditions for the sign definiteness of a bundle of quadratic forms are applied at the initial stage of determining the stability area. Further, after the diagonalization of matrices, the sufficient conditions for stability are formed from the sufficient conditions for the sign definiteness of two quadratic forms bundle. The obtained results are demonstrated on the known solution of the stability problem of permanent rotation around the vertical axis of the Lagrange gyroscope. The system of analytical calculations on the advanced computers had been applied to carry out various computations related with expansion, substitution, factorization of expressions and calculation of matrix determinants.

**Keywords:** quadratic forms, sign definiteness of two forms bundle, characteristic equation from two matrices, simultaneous diagonalization of two matrices, congruent transformation.

### Введение

Устойчивость стационарных движений автономных механических систем более успешно проводится вторым методом Ляпунова [1]. Часто при получении достаточных условий устойчивости применяются знакоопределенные связки Четаева [2], составленные из первых интегралов возмущенного движения. Для линейных и линеаризованных систем первые интегралы представляются квадратичными формами от отклонений. В частности, для двух квадратичных форм в работе [3] установлено, что при возможности получения знакоопределенной связки двух квадратичных форм

$$K_1(\sigma, x) = x'M(\sigma)x,$$

где  $M(\sigma) = B - \sigma A$ , при некоторых вещественных значениях  $\sigma$  и знакопеременных формах  $x'Ax, x'Bx$  всегда можно матрицы  $A$  и  $B$  привести к диагональным одним линейным невырожденным вещественным конгруэнтным преобразованием. Кроме того, в настоящее время не очевиден вопрос о знакоопределенности связки форм  $K_1(\sigma, x)$  при невозможности одновременной диагонализации соответствующих матриц, не всегда приведенные к полным квадратам квадратичные формы могут составить знакоопределенную связку  $K_1(\sigma, x)$ .

На основании изложенных рассуждений можно предполагать об отсутствии прямой аналогии между знакоопределенностью пучка нескольких квадратичных форм и приведением к диагональным линейным вещественным конгруэнтным преобразованием соответствующих этим формам матриц. Изучению такой зависимости в самом простом случае двух квадратичных форм посвящена настоящая статья.

### 1. О необходимых условиях знакоопределенности связки двух квадратичных форм

В случае знакоопределенной связки двух квадратичных форм  $K_1(\sigma, x)$  при знакопеременных  $x'Ax$  и  $x'Bx$  [3] линейное диагоналирующее преобразование обеих матриц будет конгруэнтным, как и для регулярного пучка матриц [4]. При этом матрицы  $A$  и  $B$  допускают вырождение, как по частям, так и одновременно. Ортогональное преобразование в случае диагонализации Беллмана [5], можно полагать частным случаем конгруэнтного [4, 6]. Другие виды диагоналирующего преобразования [7] так же будут конгруэнтными, особенно в случае, когда нельзя составить знакоопределенную связку форм.

При исследовании знакоопределенности связки форм  $K_1(\sigma, x)$  важное значение имеют корни характеристического уравнения, составленного из матриц  $A$  и  $B$ :

$$f(\lambda) = \det(B - \lambda A) = 0. \quad (1.1)$$

Для двух квадратичных форм при большем двух числе переменных, как показывают примеры, не всегда можно составить знакоопределенную связку форм  $K_1(\sigma, x)$ . Этот вопрос решает следующая

**Теорема 1.** Достаточными условиями знакопеременности связки двух знакопеременных квадратичных форм  $K_1(\sigma, x)$  при любых вещественных значениях  $\sigma$  является одновременная неприводимость матриц  $A$  и  $B$  к диагональным.

**Доказательство.** Утверждение основано на предварительном приведении обеих матриц квадратичных форм к более простому виду, и полагаем их одновременно не диагоналируемыми. Как показано в [8], необходимыми и достаточными условиями



одновременной диагонализации матриц  $A$  и  $B$  являются:

- 1) корни характеристического уравнения (1.1) должны быть вещественными;
- 2) кратным корням уравнения (1.1) соответствуют простые элементарные делители.

Рассмотрим в отдельности невыполнение каждого из представленных условий. При не выполнении первого условия пусть, в частности, уравнение (1.1) содержит комплексные корни:  $\lambda_1 = c + id, \lambda_2 = c - id$ , где  $c, d$  – вещественные;  $i$  – мнимая единица, остальные корни допускаются вещественными в произвольном количестве. Линейным вещественным неособым конгруэнтным преобразованием [9]  $x = T_1 y (y \in R^n, \det T_1 \neq 0)$  можно привести матрицы  $A$  и  $B$  к блочному виду:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

При этом первые блоки обеих матриц соответствуют выделенным комплексным корням, и имеют вид

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_{11} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}.$$

Для анализа знакоопределенности составим укороченную квадратичную форму

$$K_{11}(\sigma, y_1, y_2) = (y_1, y_2)' M_1(\sigma) (y_1, y_2); \quad \text{где } M_1(\sigma) = \begin{pmatrix} (c - \sigma) & d \\ d & (\sigma - c) \end{pmatrix}.$$

При знакопеременной связке форм  $K_{11}(\sigma, y_1, y_2)$  знакопеременной будет и связка форм  $K_1(\sigma, x)$  вследствие неособенности преобразования не зависимо от структуры матриц  $A_{22}, B_{22}$ . Легко видеть, что главным минором второго порядка матрицы  $M_1(\sigma)$  здесь является  $\det M_1 = -[(c - \sigma)^2 + d^2]$ . Наличие отрицательного главного минора четного порядка матрицы квадратичной формы соответствует знакопеременности формы по теореме Якоби [4]. Так как здесь минор второго порядка отрицателен при всех вещественных  $\sigma$ , то исходная связка  $K_1(\sigma, x)$  знакопеременна.

Пусть далее кратному вещественному корню  $\lambda_j = a$  кратности  $2k$  (при нечетной кратности один из корней  $\lambda_j = a$  можно отнести к остальным вещественным некрратным корням) уравнения (1.1) соответствуют непростые элементарные делители (притом все, в противном случае часть простых корней  $\lambda_j = a$  можно так же отнести к другой группе вещественных корней). Неособым линейным вещественным конгруэнтным преобразованием [9]  $x = T_2 y (y \in R^n, \det T_2 \neq 0)$  приведем матрицы  $A$  и  $B$  к блочным:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{33} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B_{33} & 0 \\ 0 & B_{44} \end{pmatrix},$$

где начальные блоки порядка  $2k$  имеют вид

$$A_{33} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix}, \quad B_{33} = \begin{pmatrix} (aE_k + I_0) & I_0 \\ I_0 & (-aE_k + I_0) \end{pmatrix},$$

и участвует квадратная матрица порядка  $k$ :

$$I_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При таком представлении знакопеременность связки  $K_1(\sigma, x)$  может быть выявлена при знакопеременности одной из связок форм:

$$K_{12}(\sigma, u) = u' M_2(\sigma) u; \quad u \in R^{2k}; \quad u_1 = y_1, u_2 = y_2, \dots, u_{2k} = y_{2k};$$

$$K_{13}(\sigma, v) = v' M_3(\sigma) v; \quad v \in R^{(n-2k)}; \quad v_1 = y_{2k+1}, v_2 = y_{2k+2}, \dots, v_{n-2k} = y_n,$$

где  $M_2(\sigma) = B_{33} - \sigma A_{33}; M_3(\sigma) = B_{44} - \sigma A_{44}$ . Особый интерес здесь представляет первая связка форм. Связка матриц  $M_2(\sigma)$  при обозначении  $r_0 = a - \sigma$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} r_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & r_0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & r_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 1 & -r_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & -r_0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь главный минор второго порядка  $J_2 = -r_0^2 - 1$ , составленный из строк и столбцов с номерами  $k$  и  $(k+1)$ , будет отрицательным при любых вещественных значениях  $\sigma$ . По теореме Якоби [4] тогда связка квадратичных форм  $K_{12}(\sigma, u)$  знакопеременна. Следовательно, знакопеременна и связка  $K_1(\sigma, x)$ , что и доказывает теорему. *Теорема доказана.*

**2. О достаточных условиях знакоопределенности связки двух квадратичных форм**

Как ранее отмечалось, не все приведенные к диагональному виду матрицы могут составить знакоопределенную связку двух квадратичных форм. Найдем дальше условия, при выполнении которых связка  $K_1(\sigma, x)$  знакопеременных квадратичных форм  $x'Ax$  и  $x'Bx$  будет знакоопределена. Пусть заданы диагональные матрицы

$$A = \text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}], \quad B = \text{diag}[b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}],$$

где  $b_{ii} = a_{ii} \lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  $\lambda_i$  – корни уравнения (1.1), в том числе и кратные.

Исходную задачу можно переформулировать в виде эквивалентной: существуют ли вещественные конечные значения  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых форма

$$K_2(\alpha, \beta, x) = x'(\alpha A + \beta B)x$$

может оказаться положительно определенной (при наборе  $\alpha, \beta$  с противоположными знаками связка форм отрицательно определена). Последнее можно выразить системой линейных алгебраических уравнений от двух переменных  $\alpha, \beta$ :

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + b_{11}\beta = \varepsilon_1^2, \\ a_{22}\alpha + b_{22}\beta = \varepsilon_2^2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{nn}\alpha + b_{nn}\beta = \varepsilon_n^2 \end{cases} \tag{2.1}$$

при некоторых вещественных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ . Для  $n > 2$  система переопределена, но при соответствующих условиях она может быть и совместна [4]. Для упрощения анализа знакоопределенности  $K_2(\alpha, \beta, x)$  выделим две подсистемы. К первой отнесем уравнения системы (2.1) в количестве  $k$  ( $1 < k < n$ ), для которых  $a_{ss} < 0$  ( $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) и обозначим  $\bar{a}_i^{(-)} = a_{ss} < 0$  ( $s \in \{1, 2, \dots, n\}; i = 1, 2, \dots, k$ ). Остальные  $(n - k)$  уравнений из (2.1) составят вторую

подсистему, и для нее  $\bar{a}_j^{(+)} = a_{mm} > 0$  ( $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ ;  $j = k+1, k+2, \dots, n$ ). К первой подсистеме относятся корни уравнения (1.1)  $\lambda_i^{(-)} = \lambda_i$  (при  $1 \leq i \leq k$ ), образующие группу корней  $\Lambda^{(-)}$ . Во второй подсистеме находятся корни  $\lambda_j^{(+)} = \lambda_j$  (при  $k < j \leq n$ ), образующие группу  $\Lambda^{(+)}$ . В предположении неособой матрицы  $A$  вопрос знакоопределенности связки форм может быть решен следующей теоремой П.А. Кузьмина [3], хотя и не сформулированной в явном виде.

**Теорема 2.** Для знакоопределенности связки квадратичных форм  $K_1(\sigma, x)$  двух знакопеременных форм  $x'Ax$  и  $x'Bx$ , приведенных к полным квадратам, необходимо и достаточно выполнения одного из условий:

$$1. \lambda_{\max}^{(-)} = \max_{i \in [1; k]} \lambda_i^{(-)} < \sigma < \min_{j \in (k; n]} \lambda_j^{(+)} = \lambda_{\min}^{(+)}, \quad (2.2)$$

$$2. \lambda_{\max}^{(+)} = \max_{j \in (k; n]} \lambda_j^{(+)} < \sigma < \min_{i \in [1; k]} \lambda_i^{(-)} = \lambda_{\min}^{(-)}. \quad (2.3)$$

**Доказательство.** В предположении неособой матрицы  $A$  обозначим  $\sigma = -\alpha/\beta$  и система (2.1) в описании двух подсистем запишется:

$$\begin{cases} \bar{a}_i^{(-)} (\lambda_i^{(-)} - \sigma) = \varepsilon_i^2 / \beta \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ \bar{a}_j^{(+)} (\lambda_j^{(+)} - \sigma) = \varepsilon_j^2 / \beta \quad (j = k+1, \dots, n). \end{cases} \quad (2.1')$$

Ввиду  $a_i^{(-)} \times a_j^{(+)} < 0$  для всех возможных индексов система (2.1') совместна при  $(\lambda_i^{(-)} - \sigma) \times (\lambda_j^{(+)} - \sigma) < 0$ . Последнее выполняется в двух случаях:

$$1. (\lambda_i^{(-)} - \sigma) < 0, (\lambda_j^{(+)} - \sigma) > 0; \quad 2. (\lambda_i^{(-)} - \sigma) > 0, (\lambda_j^{(+)} - \sigma) < 0..$$

Перебор всех возможных неравенств по всем индексам  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $j \in \{k+1, \dots, n\}$  приводит к неравенствам (2.2) и (2.3), что и доказывает теорему. *Теорема доказана.*

При этом положительной определенности  $K_1(\sigma, x)$  соответствует неравенство (2.2), а отрицательной определенности - неравенство (2.3).

Для знакоопределенной формы  $V_1(x)$  все  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) относятся к одной группе корней. В практических исследованиях нужное значение  $\sigma$  тогда определяет

**Замечание 1.** При знакоопределенной форме  $V_1(x)$  значение  $\sigma$  для знакоопределенности связки квадратичных форм  $K_1(\sigma, x)$ , приведенных к полным квадратам, определяется:

1.  $\sigma > \lambda_{\max}^{(-)}$  в случае отрицательно определенной  $V_1(x)$ ;
2.  $\sigma > \lambda_{\max}^{(+)}$  в случае положительно определенной  $V_1(x)$ .

Конечно, существуют и другие способы исследования знакоопределенности связки форм. В частности, можно предложить подход, основанный на последовательном анализе трех строк в системе (2.1):

$$\begin{cases} a_{pp}\alpha + b_{pp}\beta = \varepsilon_p^2, \\ a_{qq}\alpha + b_{qq}\beta = \varepsilon_q^2, \\ a_{rr}\alpha + b_{rr}\beta = \varepsilon_r^2, \end{cases} \quad (2.4)$$

где  $p, q, r \in \{1, 2, \dots, n\}$ ;  $p \neq q$ ;  $p \neq r$ ;  $q \neq r$ . Условием совместности системы (2.4) будет

$$\det \begin{pmatrix} a_{pp} & b_{pp} & \varepsilon_p^2 \\ a_{qq} & b_{qq} & \varepsilon_q^2 \\ a_{rr} & b_{rr} & \varepsilon_r^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Раскрывая последний определитель, запишем

$$\Delta(\varepsilon_p, \varepsilon_q, \varepsilon_r) = S_p \varepsilon_p^2 + S_q \varepsilon_q^2 + S_r \varepsilon_r^2 = 0,$$

где  $S_p = a_{qq}b_{rr} - a_{rr}b_{qq}$ ,  $S_q = a_{rr}b_{pp} - a_{pp}b_{rr}$ ,  $S_r = a_{pp}b_{qq} - a_{qq}b_{pp}$ . В зависимости от вида  $\Delta(\varepsilon_p, \varepsilon_q, \varepsilon_r)$  можно получить следующие заключения:

1. если форма  $\Delta(\varepsilon_p, \varepsilon_q, \varepsilon_r)$  знакоопределена при хотя бы одном допустимом наборе индексов  $p, q, r \in \{1, 2, \dots, n\}$ , то связка форм  $K_2(\alpha, \beta, x)$  знакопеременна;

2. если форма  $\Delta(\varepsilon_p, \varepsilon_q, \varepsilon_r)$  знакопеременна при всех без исключения индексах  $p, q, r \in \{1, 2, \dots, n\}$ , то связка форм  $K_2(\alpha, \beta, x)$  знакоопределена;

3. если не существует ни одного набора индексов  $p_1, q_1, r_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , при котором форма  $\Delta(\varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{q_1}, \varepsilon_{r_1})$  знакоопределена, и допускаются наборы индексов  $p_2, q_2, r_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , для которых форма  $\Delta(\varepsilon_{p_2}, \varepsilon_{q_2}, \varepsilon_{r_2})$  знакопостоянна, то связка форм  $K_2(\alpha, \beta, x)$  знакопостоянна (этот случай имеет место при кратных вещественных простых корнях характеристического уравнения (1.1), относящихся к обоим группам корней  $\Lambda^{(-)}$  и  $\Lambda^{(+)}$ );

4. если не существует ни одного набора индексов  $p_1, q_1, r_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , при котором форма  $\Delta(\varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{q_1}, \varepsilon_{r_1})$  знакоопределена, и допускаются наборы индексов  $p_2, q_2, r_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , для которых форма  $\Delta(\varepsilon_{p_2}, \varepsilon_{q_2}, \varepsilon_{r_2})$  тождественно обращается в нуль, так что система

$$a_{p_2 p_2} - L_1 a_{q_2 q_2} = 0; a_{p_2 p_2} - L_2 a_{r_2 r_2} = 0 \tag{2.5}$$

имеет только положительные решения относительно  $L_1, L_2$ , то связка форм  $K_2(\alpha, \beta, x)$  знакоопределена;

5. если не существует ни одного набора индексов  $p_1, q_1, r_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , при котором форма  $\Delta(\varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{q_1}, \varepsilon_{r_1})$  знакоопределена, существуют наборы индексов  $p_2, q_2, r_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , для которых форма  $\Delta(\varepsilon_{p_2}, \varepsilon_{q_2}, \varepsilon_{r_2})$  тождественно обращается в нуль, и имеется хотя бы одно отрицательное решение относительно  $L_1$  или  $L_2$  систем (2.5), то связка форм  $K_2(\alpha, \beta, x)$  знакопостоянна.

Случай двух переменных, когда анализу подлежит система

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + b_{11}\beta = \varepsilon_1^2, \\ a_{22}\alpha + b_{22}\beta = \varepsilon_2^2, \end{cases}$$

единственно допускает знакоопределенную связку только при  $D = a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11} \neq 0$ . Следовательно, справедлива

**Теорема 3.** Связка двух квадратичных форм  $K_2(\alpha, \beta, x)$  для двух диагональных матриц  $A$  и  $B$  от двух переменных положительно определена только в единственном случае  $a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11} \neq 0$ .

Такой альтернативный подход рассматривается теоретическим, и он может оказаться пригодным к исследованию связок из трех и более квадратичных форм.

Предложенным подходом можно исследовать знакоопределенность связок двух квадратичных форм не только при числовых матрицах  $A$  и  $B$ , но и проводить параметрический анализ при произвольных вещественных матрицах  $A$  и  $B$ .

### 3. Примеры

В прикладных задачах устойчивости стационарных движений автономных механических систем исключением части переменных [3] иногда получаются два независимых первых интеграла возмущенного движения  $x'Ax = const$  и  $x'Bx = const$ . По теореме 1 достаточные условия устойчивости определяются, прежде всего, необходимыми условиями знакоопределенности связки интегралов, имеющей выражение  $K_1(\sigma, x)$ . При этом исключаются условия существования комплексных корней уравнения (1.1), и проводится анализ элементарных делителей кратных вещественных корней. При всех вещественных простых корнях уравнения (1.1) осуществляется линейное вещественное конгруэнтное преобразование  $x = Tu$ , приводящее матрицы  $A$  и  $B$  к диагональным. Окончательная проверка знакоопределенности  $\bar{K}_1(\sigma, y)$  будет установлена теоремой 2.

Пусть квадратичные формы заданы матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}; \quad B_1 = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 15 \\ -4 & 10 & -13 \\ 15 & -13 & -2 \end{pmatrix}.$$

Формы знакопеременны, что следует из главных миноров второго порядка обеих матриц. Исключение переменной  $x_3$  получает форму

$$F_1(x_1, x_2) = (7x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2)(19x_1^2 - 30x_1x_2 + 17x_2^2).$$

Здесь первый множитель принимает значения разных знаков, откуда следует знакопеременность формы  $F_1(x_1, x_2)$ , следовательно, и связи исходных форм. Характеристическим уравнением получается

$$f_1(\lambda) = \det(B_1 - \lambda A_1) = 2(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 21\lambda - 26) = 0.$$

Решениями последнего являются  $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 2 - 3i; \lambda_3 = 2 + 3i$  ( $i^2 = -1$ ). Так как имеются комплексные корни, то по теореме 1 нельзя составить знакоопределенную связку квадратичных форм.

Во втором примере квадратичные формы заданы матрицами

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 1 & -5 \\ 17 & -23 & 5 & 11 \\ 1 & 5 & -8 & -2 \\ -5 & 11 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 19 & 3 & 13 & 3 \\ 3 & 67 & -27 & -13 \\ 13 & -27 & -2 & 6 \\ 3 & -13 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$f_2(\lambda) = \det(B_2 - \lambda A_2) = 3456(2\lambda^4 - 11\lambda^3 + 7\lambda^2 + 11\lambda - 60) = 0.$$

Вещественными решениями являются  $\lambda_1 = -2; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 2.5; \lambda_4 = 3$ .

Матрица диагонализующего преобразования строится по собственным векторам

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -11 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 18 & 6 \end{pmatrix}.$$

В результате приведенные к диагональному виду матрицы имеют вид

$$\bar{A}_2 = T_2^{-1} A_2 T_2 = 16 \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 72 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}; \quad \bar{B}_2 = T_2^{-1} B_2 T_2 = 16 \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 180 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

По теореме 2 интервал  $(2; 2.5)$  обеспечивает положительную определенность связки форм.

Хорошим примером анализа связки двух квадратичных форм можно считать исследование устойчивости перманентного вращения вокруг вертикальной оси [2, 3] симметричного тяжелого твердого тела (волчка Лагранжа). Достаточные условия устойчивости этой известной задачи подробно изучены, они получены ранее в [2] прямым анализом знакоопределенности связки квадратичных форм. Затем в [3] те же условия получены с применением теоремы Финслера [3] для квадратичных форм, и здесь они приводятся в качестве примера для демонстрации теорем 1 и 2.

Четыре первых интеграла записываются в виде

$$\begin{cases} A(p^2 + q^2) + 2z_0\gamma_3 = const, \\ A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3 = const, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \\ r = r_0 = const, \end{cases}$$

где  $z_0$  – вещественная. Рассматривается устойчивость перманентного вращения волчка Лагранжа

$$p = q = 0; r = r_0 = \omega; \gamma_1 = \gamma_2 = 0; \gamma_3 = 1. \tag{3.1}$$

Необходимые условия устойчивости (3.1) получены ранее Н.В. Маиевским [2, 3]

$$Cr_0 > 2\sqrt{Az_0}.$$

Составим отклонения от стационарного решения:  $x_1 = p; x_2 = q; x_3 = \gamma_1; x_4 = \gamma_2; x_5 = \gamma_3 - 1$ .

Уравнения возмущенного движения имеют первые интегралы:

$$\begin{cases} \tilde{V}_0 = Ax_1^2 + Ax_2^2 + 2z_0x_5 = const, \\ \tilde{V}_1 = Ax_1x_3 + Ax_2x_4 + Cz_0x_5 = const, \\ \tilde{V}_2 = x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

При малых значениях  $k = x_3^2 + x_4^2$  из последнего уравнения можно выразить  $x_5$  в виде ряда

$$x_5 = -1 + \sqrt{1-k} = -12k - 18k^2 - 116k^3 - \dots$$

Подставляя  $x_5$  в остальные интегралы, получатся выражения  $F_1(x) = \tilde{V}_0 - z_0\tilde{V}_2$  и  $F_2(x) = \tilde{V}_1 - z_0\tilde{V}_2$ , начальные квадратичные части которых  $F_1^{(2)}(x), F_2^{(2)}(x)$  представляются матрицами

$$A_3 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z_0 \end{pmatrix}_0; \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ A & 0 & -Cr_0 & 0 \\ 0 & A & 0 & -Cr_0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение из матриц  $A_3, B_3$  здесь будет таким:

$$f_3(\lambda) = \det(B_3 - \lambda A_3) = \left[ \det \begin{pmatrix} -A\lambda & A \\ A & (z_0\lambda - Cr_0) \end{pmatrix} \right]^2 = \psi^2(\lambda) = 0.$$

Дискриминант квадратного уравнения  $\psi(\lambda) = z_0\lambda^2 - Cr_0z_0\lambda + A = 0$  равен  $D_3 = (Cr_0)^2 - 4Az_0$ . Здесь при  $D_3 < 0$  нельзя составить по теореме 1 знакоопределенную связь форм  $(x_1, x_2, x_3, x_4)(B_3 - \sigma A_3)(x_1, x_2, x_3, x_4)'$  при любых вещественных  $\sigma$ . Вещественные корни уравнения  $\psi(\lambda) = 0$  могут быть только при  $D_3 \geq 0$ . Требование  $D_3 > 0$  приводит к условию Маиевского [2, 3]  $Cr_0 > 2\sqrt{Az_0}$ .

Четырехкратный корень  $\lambda = Cr_0/(2z_0)$  уравнения  $\psi(\lambda) = 0$  приводит к знакопостоянной связи квадратичных форм

$$\bar{K} \left( \frac{Cr_0}{2z_0}, y \right) = -\frac{CAr_0}{2z_0} \left[ \left( y_1 - \frac{2z_0}{Cr_0} y_3 \right)^2 + \left( y_2 - \frac{2z_0}{Cr_0} y_4 \right)^2 \right].$$

Легко показать, этот корень оказывается простым. В этом случае при  $r_0 = 2\sqrt{Az_0}/C$  квадратичная часть связи  $K_1(\sigma, y) = (F_2^{(2)}(x(y)) - \sigma F_1^{(2)}(x(y)))$  знакопостоянна, и дальнейшее исследование устойчивости перманентного вращения можно проводить только привлекая члены выше второго порядка в выражениях функций  $F_1(x(y)), F_2(x(y))$ . Не обсуждая

проведения анализа в этом случае, как показано в [10], достаточные условия устойчивости перманентного вращения совпали с необходимыми.

Следовательно, условие Маиевского [3] допускает для устойчивости (3.1) обращение в равенство.

### Заключение

В статье установлено, что необходимым условием знакоопределенности пучка двух квадратичных форм являются необходимые и достаточные условия одновременной диагонализации соответствующих матриц.

Нахождение достаточных условия знакоопределенности связки двух квадратичных форм опирается на более простой анализ после приведения соответствующих матриц к диагональному виду. Показано сочетание использования необходимых и достаточных условий знакоопределенности связки форм. Исследование знакоопределенности связки двух квадратичных форм большого числа переменных, хотя и представляет сложный параметрический анализ, но дает возможность получить конечный результат. Демонстрация этого наглядно иллюстрируется приведенным примером.

### Литература

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собрание сочинений. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 263 с.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 535 с.
3. Кузьмин П. А. Малые колебания и устойчивость движения. – М.: Наука, 1973. – 206 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
5. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 351 с.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
7. Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. – М.: Наука, 1966. – 555 с.
8. Новиков М.А. О диагонализации матриц трех квадратичных форм // Оптимизация, управление, интеллект. – 2000. – № 5, ч. 1. – С. 150–156.
9. Новиков М.А. О приведении матриц квадратичных форм к взаимно упрощенным // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2010. – № 2 (26). – С. 181–187.
10. Румянцев В.В. Сравнение трех методов построения функций Ляпунова // Прикладная математика и механика. – 1995. – Т. 59, вып. 6. – С. 916–921.

### References

1. Lyapunov A. M. *Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya* [A General Problem of Motion Stability]. Moscow–Leningrad: USSR Academy of Science publ., 1956. V. 2. 263 p.
2. Chetaev N. G. *Ustoychivost' dvizheniya. Raboty po analiticheskoi mekhanike* [Stability of Motion. Works on Analytical Mechanics]. Moscow: USSR Academy of Science publ., 1962. 535 p.
3. Kuz'min P. A. *Malye kolebaniya i ustoychivost' dvizheniya* [Small Vibrations and Stability of Motion]. Moscow: Nauka, 1973. 206 p.
4. Gantmacher F. R. *Teoriya matrits* [The Theory of Matrices]. Moscow: Nauka, 1967. 576 p.
5. Bellman R. *Introduction to Matrix Analysis*. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, 1960. 348 p.
6. Horn R., Johnson C. *Matrix Analysis*. New York: Cambridge University Press, 1985.
7. Burbaki N. *Algebra. Moduli, kol'tsa, formy* [Algebra. Modules, rings, forms]. Moscow: Nauka, 1966. 555 p. (transl. from Fr.)
8. Novikov M. A. O diagonalizatsii matrits trekh kvadraticnykh form [On Diagonalization of Matrices of three Quadratic Forms]. *Optimizatsiya, upravlenie, intellect – Optimization, Control, Intellect*. 2000. No. 5. Part 1. Pp. 150–156.
9. Novikov M. A. O privedenii matrits kvadraticnykh form k vzaimno uproshchennym [On Reduction of Matrices of Quadratic Forms to Mutually Simplified]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie – Modern Technologies. System Analysis. Modelling*. 2010. No. 2 (26). Pp. 181–187.
10. Rumyantsev V.V. Sravnenie trekh metodov postroeniya funktsii Lyapunova [Comparison of three Methods for Lyapunov's Function Construction]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1995. Bk. 59, V. 6. Pp. 916–921.

## 2. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения

УДК 519.716.5

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-16-22

### О КЛАССАХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ МАКСИМАЛЬНЫМИ МУЛЬТИКЛОНАМИ<sup>1</sup>

© **Казимиров Алексей Сергеевич**

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической информатики Иркутского государственного университета

Россия, 664003, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1, e-mail: a.kazimirov@gmail.com

© **Пантелеев Владимир Иннокентьевич**

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической информатики Иркутского государственного университета

Россия, 664003, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1, e-mail: vl.panteleyev@gmail.com

Если рассматривать дискретные функции на множестве  $A$ , то мультифункции можно определить как функции на множестве  $2^A$ , при этом значения мультифункций для значений аргументов из  $A$  задаются, а для значений, не являющихся одноэлементными множествами, определяются как объединение всех значений мультифункции на одноэлементных множествах. Таким же образом определяется суперпозиция для мультифункций. Клоны мультифункций называются мультиклонами. Число всех максимальных клонов мультифункций на двухэлементном множестве равно 15. В статье рассматриваются классы булевых функций по принадлежности максимальным мультиклонам. Множество булевых функций разбивается на 18 классов эквивалентности.

**Ключевые слова:** булевы функции, функции алгебры логики, клоны, мультифункции.

### ON THE CLASSES OF BOOLEAN FUNCTIONS GENERATED BY MAXIMAL MULTICLONES

**Aleksey S. Kazimirov**

PhD, A/Professor, Department of Mathematical Informatics, Irkutsk State University

1 Karla Marksa st., Irkutsk 664003, Russia

**Vladimir I. Panteleev**

DSc, Professor, Department of Mathematical Informatics, Irkutsk State University

1 Karla Marksa st., Irkutsk 664003, Russia

If we consider the discrete functions on a set  $A$ , the multifunction can be defined as a function on a set  $2A$ , herewith the values of multifunctions for argument values of  $A$  are given, and for the values that are not singletons are defined as a union of all multifunction values on one-element sets. In the same way it is determined by the superposition of multifunctions. Clones of multifunctions are defined as multiclones. There are 15 maximal multiclones on 2-element set. In the article Boolean functions are considered by their inclusion in maximal multiclones. The set of Boolean functions is divided into 18 classes of equivalence.

**Keywords:** Boolean functions, logic functions, clones, multifunctions.

#### Введение

В теории дискретных функций, наряду со всюду определенными функциями  $k$ -значной логики, изучаются и функции, определенные не на всех наборах. При этом незаданность или неопределенность может пониматься по-разному, в зависимости от рассматриваемого класса задач. Не всюду заданными функциями на конечном множестве являются и так называемые

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 13-01-00621



мультифункции, у которых неопределенность понимается как некоторое неодноэлементное (в том числе и пустое) подмножество конечного множества, на котором эти функции заданы.

Для того чтобы операция суперпозиции некоторых функций определяла новую мультифункцию, требуется определить значения этих функций на наборах, составленном из подмножеств. Делается это следующим образом: находятся все значения, которые возвращает внешняя функция на наборах, составленных из элементов соответствующих подмножеств, и затем берется объединение полученных результатов. Относительно введенной суперпозиции естественным образом ставятся задачи нахождения эффективных критериев полноты и сопутствующая задача описания максимальных клонов. Если критерий полноты описан в терминах максимальных клонов, то на множестве рассматриваемых функций можно определить отношение эквивалентности, при котором две функции входят в один класс, если у них совпадают отношения принадлежности максимальным клонам. Введенное отношение эквивалентности разбивает множество всех функций на классы.

Для множества булевых функций, как известно, число максимальных клонов равно 5, а число классов, на которые множество всех функций разбивается относительно принадлежности максимальным клонам, равно 15 [1].

В [2] описаны все 15 максимальных клонов мультифункций на двухэлементном множестве. В работе рассматривается распределение булевых функций по классам, определяемых максимальными клонами и доказывается, что булевы функции порождают 18 классов.

### 1. Постановка задачи

Пусть  $|A|$  – мощность множества  $A$ ,  $2^A$  – множество всех подмножеств  $A$  и  $E_2 = \{0, 1\}$ . Определим следующие множества функций:

$$\begin{aligned} P_{2,n}^{*-} &= \{f : E_2^n \rightarrow 2^{E_2}\}, P_2^{*-} = \bigcup_n P_{2,n}^{*-}; \\ P_{2,n}^- &= \{f : E_2^n \rightarrow 2^{E_2} \setminus \{\emptyset\}\}, P_2^- = \bigcup_n P_{2,n}^-; \\ P_{2,n} &= \{f : E_2^n \rightarrow E_2\}, P_2 = \bigcup_n P_{2,n}. \end{aligned}$$

Функции из  $P_2^{*-}$  называются мультифункциями, из  $P_2^-$  – гиперфункциями,  $P_2$  – булевыми функциями. Очевидно, что множество булевых функций вкладывается в множество гиперфункций, которое в свою очередь вкладывается в множество мультифункций.

Суперпозиция  $f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$  определяет мультифункцию  $g(x_1, \dots, x_m)$  следующим образом: для любого набора  $(a_1, \dots, a_m)$  выполняется

$$g(a_1, \dots, a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \dots, a_m)} f(b_1, \dots, b_n). \quad (1)$$

Формула (1) фактически позволяет находить значение мультифункции на подмножествах множества  $E_2$  и задает вложение мультифункций в множество функций  $\{f : 2^{E_2} \rightarrow 2^{E_2}\}$ . При этом все такие функции однозначно определяются своими значениями на наборах, составленных из одноэлементных множеств. Если в наборе есть хотя бы одно неодноэлементное подмножество, то значение на таких наборах определяется в соответствии с (1) как объединение всех значений функции на соответствующих наборах, составленных из одноэлементных подмножеств.

Не будем в дальнейшем различать одноэлементное подмножество и элемент этого подмножества, кроме этого для множества  $\{0, 1\}$  будем использовать обозначение – (прочерк), а для пустого множества – \*.

Понятия максимального клона, функции, сохраняющей предикат являются стандартными (см., например [2]). Предикаты ниже будем записывать в виде матрицы, в которой столбцами являются все наборы из предиката.

В [2] описаны все 15 максимальных клонов мультифункций. Такими являются:

$K_1$  – клон функций, тождественно равных \* или на наборе из всех нулей возвращающих 0 или –;

$K_2$  – клон функций, тождественно равных \* или на наборе из всех единиц возвращающих 1 или –;

$K_3$  – клон функций, на наборе из всех нулей возвращающих 0 или \*;

$K_4$  – клон функций, на наборе из всех единиц возвращающих 1 или \*;

$K_5$  – клон всех гиперфункций в объединении с множеством мультифункций, тождественно равных \*;

$K_6$  – клон всех мультифункций, на любом наборе возвращающих значения 0, 1 или \*;

$K_7$  – клон мультифункций, сохраняющих предикат

$$R_7 = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & 0 & 1 & - & * \\ 1 & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix};$$

$K_8$  – клон мультифункций, сохраняющих предикат

$$R_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & - \\ 0 & 1 & * & - \end{pmatrix};$$

$K_9$  – клон мультифункций, сохраняющих предикат

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & 1 & - & * & * & * & * \\ 1 & 0 & 1 & - & 1 & - & - & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix}$$

$K_{10}$  – клон мультифункций, сохраняющих предикат

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - & - & 0 & - & 1 & * \\ 1 & 0 & 1 & - & 1 & 0 & - & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$K_{11}$  – клон мультифункций, сохраняющих предикат

$$R_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & - & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & - & 0 & * & * & * & * \end{pmatrix};$$

$K_{12}$  – клон мультифункций, сохраняющих предикат  $R_{12}$ , который содержит все наборы, кроме

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 0 & 1 & 1 & - & 1 & 0 & - & - & 0 & - & - & 0 \\ 0 & 1 & - & 0 & 1 & - & 0 & 1 & - & 0 & 1 & 0 & - & - & - & 1 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$K_{13}$  – клон мультифункций, сохраняющих предикат  $R_{13}$ , который содержит все наборы, кроме

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & - & 1 & - & - & - & 0 & 0 & 1 & 0 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & - & 0 & - & 1 & - & 0 & - & 1 & 0 & 0 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & - \end{pmatrix};$$

$K_{14}$  – клон мультифункций, сохраняющих предикат  $R_{14}$ , который содержит все наборы, кроме

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \gamma & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

( $\alpha, \beta, \gamma \neq *$ ) и не содержит наборы без \*, в которых есть – и элемент из  $E_2$ .

Если в некотором наборе заменим 1 на 0, а 0 на 1 и все остальные элементы оставим без изменения, то полученный набор назовем двойственным к исходному.

$K_{15}$  – клон мультифункций, сохраняющих предикат  $R_{15}$ , который содержит все наборы, кроме

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & - & - & 1 & 0 & 0 & - & 1 \\ \gamma & \mu & \mu & \mu & \mu & \nu & \nu & \nu & \nu \end{pmatrix}$$

и двойственных к ним ( $\alpha, \beta, \gamma, \neq *, \nu \in \{1, -\}, \mu \in \{0, 1, -\}$ ).

Для каждой мультифункции однозначным образом определим вектор принадлежности максимальным клонам, в котором на  $i$ -й позиции ( $i=1, \dots, 15$ ) стоит 0, если мультифункция принадлежит  $i$ -му максимальному клону, и 1 иначе.

Будем говорить о значении функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  на наборах  $(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, (a_{k1}, \dots, a_{km})$ , как о наборе  $(b_1, \dots, b_n)$ , где  $b_i = f(a_{k(1)i}, \dots, a_{k(n)i})$ .

На множестве всех мультифункций определим отношение эквивалентности следующим образом: эквивалентными будут мультифункции, у которых совпадают векторы принадлежности максимальным клонам мультифункций. Очевидно, что число классов получившегося разбиения не превышает число  $2^{15}$ . Поставим вопрос: сколько классов порождают булевы функции?

## 2. Основной результат

Вначале оценим сверху число классов.

**Лемма 1.** Если функция не принадлежит классу  $K_8$ , не сохраняет 0 и не сохраняет 1, то она не принадлежит классу  $K_{14}$ .

**Доказательство.** Пусть  $f$  не принадлежит  $K_8$ . Тогда на наборах (10), (01) и (– –) функция возвращает набор, не принадлежащий предикату  $R_8$  — (00) или (11). Так как  $f$  не сохраняет 0 и 1, то на наборах (0101), (0011), (0– –1) возвращает набор (1000) или (1110). Если все наборы (0– –1) заменить на (0101), то значение функции не изменится. Тогда функция на наборах из  $R_{14}$  возвратит набор, который не принадлежит  $R_{14}$ .

**Лемма 2.** Если функция не принадлежит классу  $K_{14}$  и не сохраняет 1, то она не принадлежит классу  $K_{15}$ .

**Доказательство.** Так как функция не принадлежит  $K_{14}$  и не сохраняет 1, то на наборах (0000), (0011), (0101), (0110), (1001), (1100), (1010), (1111) функция возвращает (0001), (1110), или (000 –). Рассмотрим только первый случай. В этом случае на наборах (001), (101), (111), (011) функция возвращает (100). Наборы (011) заменим на (010). Если значение функции не изменится, то она не принадлежит  $K_{15}$ . В противном случае функция на наборах (100), (110), (101), (111), (001), (010) возвращает (100). Наборы (100) заменим на (101). Если значение функции не меняется, то она не принадлежит  $K_{15}$ . Иначе на наборах (110), (010), (111) функция возвращает (100) и не принадлежит  $K_{15}$ .

**Лемма 3.** Функция принадлежит классу  $K_9$  тогда и только тогда, когда она принадлежит классу  $K_{10}$ .

**Доказательство.** Следует из определения классов.

**Лемма 4.** Если функция  $f$  не принадлежит классу  $K_9$ , то она не принадлежит классам  $K_{12}$ ,  $K_{13}$ .

**Доказательство.** На наборах из  $R_9$  функция  $f$  возвращает набор (10) или (– 0). В обоих случаях на наборах (01), (00), (11) функция будет возвращать (10). Тогда на наборах (011), (000), (111) из  $R_{12}$  функция возвратит (100), который не принадлежит  $R_{12}$ . И на наборах (010), (000), (111) из  $R_{13}$  функция возвратит (101), который не принадлежит  $R_{13}$ .

**Лемма 5.** Если функция не является самодвойственной, сохраняет 0 и сохраняет 1, то она не принадлежит классу  $K_{12}$  или  $K_{13}$ .

**Доказательство.** Из условия леммы следует, что функция на наборах (0011), (0101) возвращает набор (0001) или (0111). В первом случае она не принадлежит  $K_{12}$ , во втором —  $K_{13}$ .

**Лемма 6.** Если функция не принадлежит классу  $K_8$ , сохраняет 0 и сохраняет 1, то она не принадлежит классам  $K_{14}$ ,  $K_{15}$ .

**Доказательство.** Пусть  $f$  не принадлежит  $K_8$ . Тогда на наборах (10), (01) и (– –) функция возвращает набор, не принадлежащий предикату  $R_8$  — (00) или (11). Так как  $f$  сохраняет 0 и 1, то на наборах (0101), (0011), (0– –1) возвращает набор (0001) или (0111). Если все наборы (0– –1) заменить на (0101), то значение функции не изменится. Тогда функция на наборах из  $R_{14}$  возвратит набор, который не принадлежит  $R_{14}$ .

В случае (0001) функция на наборах (1101), (1011) возвращает набор (1001), следовательно, не принадлежит  $K_{15}$ . Случай (0111) двойственный.

**Теорема 1.** Множество булевых функций порождает не более 18 классов эквивалентности.

**Доказательство.** Рассмотрим четыре случая, соответствующие значениям функции на наборах из всех нулей и всех единиц.

Случай 1. Функция на наборе из всех нулей возвращает 1, а на наборе из всех единиц она возвращает 0. В этом случае из определения классов несложно получить, что функция не принадлежит классам  $K_1$ – $K_4$ ,  $K_7$ ,  $K_9$ ,  $K_{10}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{13}$  и принадлежит классам  $K_5$ ,  $K_6$ . Кроме того, в этом случае функция принадлежит классу  $K_8$  тогда и только тогда, когда она принадлежит классу  $K_{11}$ . По лемме 1, если функция не принадлежит классу  $K_8$ , то она не принадлежит классам  $K_{14}$ ,  $K_{15}$ . А по лемме 2, если функция не принадлежит классу  $K_{14}$ , то она не принадлежит классу  $K_{15}$ . Поэтому в данном случае число классов не больше 4.

Случай 2. Функция на наборе из всех нулей и на наборе из всех единиц возвращает 1. Очевидно, что такие функции принадлежат классам  $K_2$ ,  $K_4$ ,  $K_5$ ,  $K_6$  и не принадлежат классам  $K_1$ ,  $K_3$ ,  $K_7$ ,  $K_8$ ,  $K_{11}$ . Если функция ни на одном наборе не возвращает 0, то она образует один класс. Пусть есть набор, на котором функция возвращает 0, тогда она является немонотонной. Немонотонные функции не принадлежат классам  $K_9$ ,  $K_{10}$ . Выполнив для функции отождествление

переменных, и, возможно, переименование, можно получить функцию  $g$ , зависящую от трех аргументов, такую, что  $g(00-)=1, g(011)=0, g(001)=1$ . И для функции  $g$  выполняется:

$$g \begin{pmatrix} 0 & 0 & - \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad g \begin{pmatrix} 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad g \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из данных равенств следует, что функция не принадлежит классам  $K_{12}, K_{13}, K_{15}$ . Таким образом, для данного случая число классов не более 3.

Случай 3. Функция на наборе из всех нулей и на наборе из всех единиц возвращает 0. Очевидно, что этот случай является двойственным к случаю 2 и число классов здесь тоже не более 3.

Случай 4. Функция на наборе из всех нулей возвращает 0, а на наборе из всех единиц возвращает 1. Все такие функции принадлежат классам  $K_1-K_7$ . Далее рассмотрим два варианта: функция является самодвойственной и не является таковой.

Если функция не самодвойственная, то она не принадлежит классам  $K_8, K_{11}, K_{14}, K_{15}$ . По лемме 3 для классов  $K_9, K_{10}$  в векторе принадлежности возможны только варианты (00) и (11). По лемме 4, если функция не принадлежит классу  $K_9$ , то она не принадлежит классам  $K_{12}, K_{13}$ , т. е. набор (11) для классов  $K_9, K_{10}$  влечет набор (11) для классов  $K_{12}, K_{13}$ . По лемме 5 набор (00) для классов  $K_{12}, K_{13}$  невозможен. Т.е. в этом случае число классов не более 4.

Пусть функция является самодвойственной. Если она не монотонная, то на наборах (11), (01), (00) она возвращает (10). Из этого несложно показать, что она не принадлежит классам  $K_9, K_{10}, K_{12}, K_{13}$ . Так как функция — самодвойственная, то на наборах (10), (00), (01) она возвращает (11). Следовательно, на наборах (0100), (0000), (0010) функция возвращает (0110), то есть не принадлежит  $K_{15}$ . В этом случае получается не более двух классов.

Пусть функция является самодвойственной и монотонной. Если она линейная, то единственной такой функцией будет тождественная [3].

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — монотонная, самодвойственная, нелинейная функция. Такая функция зависит как минимум от трех существенных переменных [3]. Будем считать, что  $x_1, x_2$  — существенные переменные.

Подставим вместо всех переменных, кроме первых двух, константы. Получим множество подфункций  $S = \{f(x_1, x_2, c_3, \dots, c_n)\}$ . Так как  $f$  — монотонная, то среди подфункций могут получиться только (0000), (0001), (0101), (0011), (0111), (1111).

Если в  $S$  есть хотя бы одна функция (0111), то из самодвойственности в  $S$  есть также функция (0001). Если в  $S$  есть (0001), то функция  $f$  не принадлежит  $K_{12}$ . Подставим наборы (011), (101) вместо  $x_1, x_2$  и наборы (000), (111) вместо остальных переменных в соответствии со значениями констант и получим набор (001), который не принадлежит предикату  $R_{12}$ . Далее считаем, что в  $S$  не содержатся (0001) и (0111).

Так как  $x_1, x_2$  — две существенные переменные, то в  $S$  должны встречаться  $f_1 = (0101)$  и  $f_2 = (0011)$ :  $f(x_1, x_2, a_3, \dots, a_n) = f_1, f(x_1, x_2, b_3, \dots, b_n) = f_2$ .

Выделим среди  $a_i$  такие, что  $a_i \neq b_i$  и будем последовательно менять эти значения  $a_i$  на  $b_i$ . Если в какой-то момент значение функции будет равно  $f_3 \neq f_1$ , то мы получим два набора, отличающиеся в одной компоненте, дающие две различные подфункции. Этот процесс закончится на наборе, дающем  $f_2$  или на промежуточном шаге мы получим  $f_3 \neq f_1$ . В любом случае получим два набора, отличающиеся в одной компоненте, дающие две различные подфункции. Далее возможны следующие случаи с точностью до перестановки функций:

- 1)  $f_1 = (0000), f_3 = (0101)$ ; 2)  $f_1 = (0000), f_3 = (0011)$ ;
- 3)  $f_1 = (0101), f_3 = (0101)$ ; 4)  $f_1 = (0101), f_3 = (1111)$ ;
- 5)  $f_1 = (0011), f_3 = (1111)$ .

В случаях 4, 5 в силу самодвойственности функции найдутся наборы, дающие случаи 1, 2. Случай 3 невозможен в силу монотонности функции. Случаи 1 и 2 аналогичны, поэтому рассмотрим только случай 1.

$$f(x_1, x_2, c_3, \dots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \dots, c_n) = (0000), f(x_1, x_2, c_3, \dots, c_{i-1}, 1, c_{i+1}, \dots, c_n) = (0101)$$

В этом случае  $f$  на наборах (011), (101),  $(c_3, c_3, c_3), \dots, (011), \dots, (c_n, c_n, c_n)$  дает набор (001). Следовательно функция не принадлежит  $K_{15}$ . Такие функции образуют не более одного класса.

Таким образом, число классов не больше 18.

*Теорема доказана.*

**Теорема 2.** Множество булевых функций порождает 18 классов эквивалентности.

**Доказательство.** Справедливость утверждения следует из теоремы 1 и табл. 1, в которой приведены 18 классов, образованных булевыми функциями.

Таблица 1

Восемнадцать классов, образованных булевыми функциями

№	Функция	Максимальные мультиклоны														
		K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	K <sub>7</sub>	K <sub>8</sub>	K <sub>9</sub>	K <sub>10</sub>	K <sub>11</sub>	K <sub>12</sub>	K <sub>13</sub>	K <sub>14</sub>	K <sub>15</sub>
1	0101010101010101	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0001011100010111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
3	0110100101101001	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1
4	0111111100000001	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
5	0111111111111111	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
6	0001000100010001	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
7	0111011101111111	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
8	0111111111111101	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
9	0000000000000000	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
10	0110100110010110	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
11	0111111111111110	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1111111111111111	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
13	1111000000001111	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
14	1111111111111101	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1111111100000000	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
16	1100001100111100	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
17	1111111010000000	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
18	1111111111111110	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

*Теорема доказана.*

### Заключение

Полученный в работе результат показывает, что при исследовании разбиения мультфункций на классы эквивалентности, соответствующие максимальным клонам, булевы функции занимают достаточно скромное место. Как было выше сказано, число классов такого разбиения не больше  $2^{15}$ , точное значение пока не известно. В [4] найдены все классы разбиения множества гиперфункций. Их число равно 118. С учетом того, что число максимальных клонов гиперфункций равно 9, а число максимальных клонов мультифункций равно 15, можно предположить, что число классов разбиения множества мультифункций больше сотни.

### Литература

1. Яблонский С. В. О суперпозициях функций алгебры логики // Матем. сборник. – 1952. – Т. 30, № 2 (72). – С. 329–348.
2. Пантелеев В. И. Критерий полноты для недоопределенных частичных булевых функций // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2009. – Т. 9, вып. 3. – С. 95–114.
3. Перязев Н. А., Казимиров А. С. Замкнутые множества булевых функций. – Иркутск: Изд-во Вост-Сиб. гос. акад. образ., 2010. – 52 с.
4. Казимиров А. С., Пантелеев В. И., Токарева Л. В. Классификация и перечисление базисов клона всех гиперфункций ранга 2 // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. – 2014. – Т. 7. – С. 61–78.

### References

1. Yablonskii S. V. On superpozitsiyakh funktsii algebrы logiki [On superpositions of logic functions]. *Matematicheskii sbornik – Mathematics collection*. 1952. V. 30. No 2 (72). Pp. 329–348.
2. Panteleev V. I. Panteleev V.I. Kriterii polnoty dlya nedoopredelennykh chastichnykh bulevykh funktsii [Completeness criteria for underdetermined partial Boolean functions]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika – Bulletin of Novosibirsk State University. Series: Mathematics, mechanics, informatics*. 2009. V. 9. No. 3. Pp. 95–114.

---

3. Peryazev N. A., Kazimirov A. S. *Zamknutyje mnozhestva bulevykh funktsii* [Complete sets of Boolean functions]. Irkutsk: East-Siberian State Academy of Education, 2010. 52 p.

4. Kazimirov A.S., Panteleev V.I., Tokareva L.V. Klassifikatsiya i perechislenie bazisov klona vsekh giperfunktsii ranga 2 [Classification and enumeration of bases for clone of all rank 2 hyperfunctions]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika – Proceedings of Irkutsk State University. Series: Mathematics*. 2014. V. 7. Pp. 61–78.

УДК 517.948

doi: 10.18097/1994–0866–2015–0–9–23–26

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ АРГУМЕНТОМ  
ОПЕРЕЖАЮЩЕГО ТИПА**

© **Шишкин Геннадий Александрович**

кандидат физико-математических наук, профессор Бурятского государственного университета

Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, e-mail: gnshishkin@mail.ru

Используя новую модификацию функции гибкой структуры, в статье исследуется возможность решения краевых задач уравнений опережающего типа.

**Ключевые слова:** краевая задача, интегродифференциальные уравнения Вольтерра, функция гибкой структуры, опережающий тип уравнений, функциональные запаздывания.

**BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF VOLTERRA  
INTEGER-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FUNCTIONAL  
ARGUMENT OF ADVANCING TYPE**

**Gennadii A. Shishkin**

PhD, Professor, Buryat State University

24a Smolina st., Ulan-Ude 670000, Russia

In the article the possibility of solving boundary-value problems of advanced type equations with help of a new modification of flexible structure function was researched.

**Keywords:** boundary-value problem, integrodifferential equations of Volterra, the function of flexible structure, advanced type of equations, functional delay.

В работе [2] задача Коши для всех интегродифференциальных уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа с помощью функции гибкой структуры [1] преобразуется к разрешающему интегральному уравнению типа Вольтерра с обыкновенным аргументом и указаны типы уравнений нейтрального и опережающего типов для которых такие преобразования возможны.

Так как функция гибкой структуры содержит начальные условия, то ее применение к решению краевых задач напрямую невозможно. Поэтому в работе [3] получена другая модификация функции гибкой структуры для решения краевых задач и в работе [4] эта новая форма применена для решения краевых задач уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа.

В данной работе исследуем вопрос о возможности аналогичных преобразований линейной краевой задачи для одного вида интегродифференциальных уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом опережающего типа.

**Постановка задачи и ее решение**

Выпишем общий вид одного класса уравнений опережающего типа с запаздываниями

$$y^{(n)}(u_l(x)) + \sum_{j=0}^l \sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x) y^{(i)}(u_j(x)) + \lambda \int_a^x \sum_{j=0}^l \sum_{i=0}^{n-1} K_{ij}(x, \eta) y^{(i)}(u_j(\eta)) d\eta = f(x), \quad (1)$$

где  $u_0(x) \equiv x$ ,  $u_j(x) \leq x \quad \forall j = \overline{1, l}$  и  $u_j(x) \neq x$ , функции  $f_{ij}(x)$ ,  $u_j(x)$  и  $f(x)$  непрерывны, ядра  $K_{ij}(x, \eta)$  – регулярны в квадрате  $a \leq x, \eta \leq b$ . С начальными функциями

$$y^{(i)}(u_j(x)) = y^{(i)}(x_0) \varphi^{(i)}(u_j(x)), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad x \in E_{x_0}, \quad (2)$$

где  $E_{x_0} = \bigcup_{j=0}^l E_{x_0}^j$ ,  $E_{x_0}^j$  – множество точек, для которых соответствующие  $u_j(x) \leq x$  при  $x \geq x_0$   
 $\forall j = \overline{1, l}$ , а  $E_{x_0}^0 = [a, x_0]$  и с линейными билокальными краевыми условиями

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{i\tau} y^{(i)}(x_0) + \beta_{i\tau} y^{(i)}(x_1)] = \gamma_\tau, \tau = \overline{0, n-1} \quad a \leq x_0 < x_1 \leq b. \quad (3)$$

Предполагая, что решение задачи (1), (2), (3) существует и единственно, будем искать ее решение на отрезке  $x \in [x_0, b]$  применив для преобразований новую модификацию функции гибкой структуры [3]

$$y^{(i)}(u_j(x)) = D^{-1} \left\{ \sum_{s=1}^n \frac{\partial^i \Delta_s(u_j(x) - x_0)}{\partial x^i} \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{s\tau}}{\omega} [\gamma_\tau - D^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k\tau} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^k \Delta_n(x_1 - t)}{\partial x_1^k} \mu(t) dt] + \right. \\ \left. + \int_{x_0}^{u_j(x)} \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(x) - t)}{\partial x^i} \mu(t) dt \right\} + \gamma_i u_j'^n(x) \mu(u_j(x)), \quad (4)$$

где  $i = \overline{0, n}$   $j = \overline{0, l}$   $\gamma_n = 1$ ,  $\gamma_i = 0 \quad \forall i = \overline{0, n-1}$ ,  $D = D(r_1, r_2, \dots, r_n)$  – определитель Вандермонда, составленный из неопределенных параметров  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , которые определяются в ходе решения задачи исходя из оптимальности ее решения, определители  $\Delta_s(x-t)$ ,  $s = \overline{1, n}$  получаются из определителя D заменой s-й строки строкой  $\exp r_1(x-t), \exp r_2(x-t), \dots, \exp r_n(x-t)$ ,  $\mu(x)$  – новая неизвестная функция и  $\omega$  главный определитель системы полученной при отыскании начальных значений с использованием краевых условий

$$\omega = \det [\alpha_{i\tau} + \beta_{i\tau} D^{-1} \Delta_{i+1}^{(i)}(x_1 - x_0)], \quad i, \tau = \overline{0, n-1}, \quad (5)$$

а  $\omega_{i\tau}$  - алгебраические дополнения к элементам главного определителя.

Обозначим через  $c_j$  наименьшие из корней уравнений  $u_j(x) = x_0$  на отрезке  $x \in [x_0, b]$ , если же таковых нет, то полагаем соответствующие  $c_j = b$ . Далее разобьем интегралы в уравнении (1) на суммы от известных и неизвестных частей в выражениях от запаздываний, в соответствии с (2), считая при этом  $y^{(n)}(u_j(x)) = y^{(n-1)}(x_0) \varphi^{(n)}(u_j(x))$ .

При построении разрешающего уравнения поставленной краевой задачи с помощью новой модификации функции гибкой структуры и ее производных (4) как и для уравнений запаздывающего типа могут возникнуть три возможных ситуации:

1.  $x_0 < x_1 \leq c_j \quad \forall j = \overline{0, l}$ ;
2.  $x_0 < c_j \leq x_1 \quad \forall j = \overline{0, l}$ ;
3.  $x_1$  таково, что  $\exists j = \overline{0, l}$ , что для некоторых выполняется  $x_0 < x_1 \leq c_j$  и для других  $x_0 < c_j \leq x_1$ .

Первый случай наиболее простой он напрямую сводится к решению задачи Коши. Во втором и третьем случаях разбиваем интегралы в уравнении (1) на сумму в соответствии с определенными начальными множествами  $E_{x_0}^j$  и подставим функцию гибкой структуры и ее производные (4), полученные для краевой задачи, в уравнение (1), выделяя при этом известные и неизвестные выражения под знаком интеграла. Затем, проведя преобразования выражений под знаками интегралов содержащих неизвестную функцию  $\mu(x)$ , заменив переменную  $\eta$  на  $t$  и сменив порядок интегрирования в двойных интегралах, получим разрешающее интегральное уравнение смешанного типа Вольтерра – Фредгольма с запаздывающим аргументом

$$u_l^m(x) \mu(u_l(x)) + \sum_{j=0}^l \left[ \int_{x_0}^{x_1} G_j(x, t) \mu(t) dt + \lambda \int_{x_0}^{u_j(x)} H_j(x, t) \mu(t) dt \right] = F(x), \quad (6)$$

где для ядер  $G_j(x, t)$ ,  $H_j(x, t)$  и свободной функции  $F(x)$  получены определенные формулы. Уравнение (6) легко преобразуется к уравнению с обыкновенным аргументом, если ввести но-



вую переменную  $z = u_l(x)$ . Тогда  $x = u_l^{-1}(z)$ , где  $u_l^{-1}(z)$  – обратная функция для функции  $u_l(x)$ .

Далее, поделив разрешающее уравнение (6) на  $u_l^m(x) \neq 0$ , введем новые обозначения для известных функций и ядер

$$T_j(z, t) = u_l^{l(-n)}(u_l^{-1}(z))G_j(u_l^{-1}(z), t), \quad Q_j(z, t) = u_l^{l(-n)}(z)H_j(u_l^{-1}(z), t),$$

$$R(z) = u_l^{l(-n)}(z)F(u_l^{-1}(z))$$

и положив  $v_j(z) = u_j(u_l^{-1}(z))$ , получим интегральное уравнение с обыкновенным аргументом

$$\mu(z) + \sum_{j=0}^l \left[ \int_{x_0}^{x_1} T_j(z, t)\mu(t)dt + \lambda \int_{x_0}^{v_j(z)} Q_j(z, t)\mu(t)dt \right] = R(z).$$

**Пример.** Найти решение краевой задачи для уравнения второго порядка опережающего типа

$$\begin{cases} 4y''\left(\frac{x}{2}\right) + y(x) + \int_0^x y'(\eta)d\eta = x - 1, \\ y(0) - y(1) = -\frac{1}{2}, \quad y(0) - 2y(1) = 0. \end{cases}$$

**Решение:** Начальное множество состоит из одной точки  $E_{x_0} = [0]$ .

Для уменьшения объема выкладок воспользуемся возможным вариантом для значений параметров  $r_1 = r_2 = r = 0$ . Выпишем новую модификацию функции гибкой структуры (4) для этих значений параметров при  $i = 0, j = 0$  и, предварительно вычислив выражения для  $\omega$  и  $\omega_{it}$ , по формулам (5) найдем

$$y(x) = \frac{x}{2} - 1 - x \int_0^1 (1-t)\mu(t)dt + \int_0^x (x-t)\mu(t)dt,$$

тогда

$$y'(x) = \frac{1}{2} - \int_0^1 (1-t)\mu(t)dt + \int_0^x \mu(t)dt,$$

$$y\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{4} - 1 - \frac{x}{2} \int_0^1 (1-t)\mu(t)dt + \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2} - t\right)\mu(t)dt,$$

$$y'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)\mu(t)dt + \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{2}\mu(t)dt, \quad y''\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}\mu\left(\frac{x}{2}\right).$$

Полученную функцию  $y(x)$  и ее производные  $y'(x)$  и  $y''\left(\frac{x}{2}\right)$  подставим в исходное уравнение

$$\begin{aligned} & \mu\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - 1 - x \int_0^1 (1-t)\mu(t)dt + \\ & + \int_0^x \left[ \frac{1}{2} - \int_0^1 (1-t)\mu(t)dt + \int_0^{\eta} (\eta-t)\mu(t)dt \right] d\eta = x - 1, \\ & \mu\left(\frac{x}{2}\right) - x \int_0^1 (1-t)\mu(t)dt + x \int_0^1 (1-t)\mu(t)dt + \int_0^x (1-t)\mu(t)dt = 0. \end{aligned}$$

Откуда, в силу единственности решения,  $\mu(x) \equiv 0$ .

Подставив это значение  $\mu(x) \equiv 0$  в выражение функции гибкой структуры данной краевой задачи, найдем решение первоначально поставленной задачи.

Ответ:  $y(x) = \frac{x}{2} - 1$ . Нетрудно проверить, что условия краевой задачи выполняются.

### Заключение

В журнальной литературе имеются работы, которые затрагивают многие вопросы решения интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом, но мало работ, которые бы поднимали и решали проблему преобразования начальных и краевых задач для таких уравнений к разрешающим уравнениям с обыкновенным аргументом.

В данной статье исследованы возможности построения модели с обыкновенным аргументом для краевой задачи одного вида интегродифференциальных уравнений Вольтерра опережающего типа. Для всех уравнений запаздывающего типа с помощью функции гибкой структуры этот вопрос решен положительно [4]. Для уравнений нейтрального и опережающего типов такое преобразование возможно только для некоторых классов уравнений. Полученные аналитические выражения модели начальной задачи дают возможность оптимизировать нахождение ее точного или приближенного решений за счет оптимального выбора параметров функции гибкой структуры и разработать программу решения поставленных задач на ЭВМ. Этому и будут посвящены дальнейшие исследования и разработки программ.

### Литература

1. Куликов Н. К. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой // Тематический сб. МТИПП. – М., 1974. – С. 47–57.
2. Шишкин Г. А. Линейные интегродифференциальные уравнения Вольтерра с функциональным запаздыванием. – Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2009. – 64 с.
3. Шишкин Г. А. Функция гибкой структуры и ее модификация при решении краевых задач для уравнений с функциональным запаздыванием // Вестник Бурятского государственного университета. – 2013. – Вып. 9. – С. 144–147.
4. Шишкин Г. А. Краевые задачи интегродифференциальных уравнений Вольтерра запаздывающего типа // Вестник Бурятского государственного университета. – 2014. – Вып. 9(2). – С. 85–88.

### References

1. Kulikov N. K. Reshenie i issledovanie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii na osnove funktsii s gibkoi strukturoi [The solution and research of ordinary differential equations on the basis of functions with flexible structure]. *Tematicheskii sbornik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta pishchevykh proizvodstv – Thematic collection of Moscow State University of Food Production*. Moscow, 1974. Pp. 47–57.
2. Shishkin G. A. *Lineinye integro-differentsial'nye uravneniya Vol'terra s funktsional'nym zapazdyvaniem* [Linear Integer-differential Volterra Equations with Functional Delay]. Ulan-Ude: Buryat State University publ., 2009. 64 p.
3. Shishkin G. A. Funktsiya gibkoi struktury i ee modifikatsiya pri reshenii kraevykh zadach dlya uravnenii s funktsional'nym zapazdyvaniem [Function of flexible structure and its modification in solving of boundary-value problems for equations with functional delay]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2013. V. 9. Pp. 144–147.
4. Shishkin G. A. *Kraevye zadachi integro-differentsial'nykh uravnenii Vol'terra zapazdyvayushchego tipa* [The boundary-value problems of Volterra integer-differential equations of retarded type]. 2014. V. 9(2). Pp. 85–88.

### 3. Математическое моделирование

УДК 681.3

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-27-30

#### НЕЙРОСЕТЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПАСНЫХ ИНФЕКЦИОННЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ ЖИВОТНЫХ

© **Балбарова Долгорма Гомбожаповна**

старший преподаватель Бурятской государственной сельскохозяйственной академии им. В. Р. Филиппова

Россия, 670034, г. Улан-Удэ, ул. Пушкина, 8, e-mail: dolgorma@mail.ru

© **Олзоева Сэсэг Ивановна**

доктор технических наук, профессор Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления

Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в, e-mail: sseseg@yandex.ru

© **Садуев Нима Батодоржиевич**

кандидат физико-математических наук, доцент Бурятской государственной сельскохозяйственной академии им. В. Р. Филиппова

Россия, 670034, г. Улан-Удэ, ул. Пушкина, 8, e-mail: saduev@bgsha.ru

Рассмотрен опыт по использованию программы - нейроимитатора для решения задач прогнозирования распространения опасных инфекционных заболеваний животных. Подтверждены наиболее значимые признаки, влияющие на результат проявления заболевания животных, с использованием нейросетевых технологий.

**Ключевые слова:** нейросетевая технология, нейроимитатор, нейронная сеть, пастереллез.

#### NEURAL NETWORK MODELING IN THE PROBLEMS OF PREDICTING THE SPREAD OF DANGEROUS INFECTIOUS ANIMAL DISEASES

**Dolgorma G. Balbarova**

Senior Lecturer, V. R. Filippov Buryat State Agricultural Academy  
8 Pushkina st., Ulan-Ude 670034, Russia

**Seseg I. Olzoeva**

DSc, Professor, East-Siberian State University of Technology and Management  
40v Kluchevskaya st., Ulan-Ude 670013, Russia

**Nima B. Saduev**

PhD, A/Professor, V. R. Filippov Buryat State Agricultural Academy  
8 Pushkina st., Ulan-Ude 670034, Russia

The experience on use of the neural simulator program to solve the problems of predicting the spread of dangerous infectious animal diseases was considered. The most significant features affecting the result of animal disease manifestations were confirmed with help of neural network technology.

**Keywords:** neural network technology, neural simulator, neural network, pasteurellosis.

#### Введение

В настоящее время очевидно возрастающая роль нейросетевых технологий в решении практических задач управления во многих предметных областях. Области применения нейросетевых технологий пересекаются со сферами применения математической статистики, теории нечетких множеств и экспертных систем. Связи и параллели нейросетевых технологий многообразны и свидетельствуют о его универсальности [5].

Животноводство является одним из сложных объектов научного исследования, требующих особого внимания аналитиков, использующих нейросетевые технологии [2; 3]. Одним из основных особенностей отрасли животноводства является то, что в качестве специфических средств производства в сельском хозяйстве выступают живые организмы – животные, развивающиеся в соответствии со своими биологическими законами.

Разнообразие климатических и географических особенностей Республики Бурятия способствуют возникновению, распространению различных инфекционных заболеваний животных. Вследствие непрерывности эпизоотического процесса инфекции могут быстро распространяться среди животных и наносят значительный экономический ущерб животноводству, а некоторые возбудители становятся причиной заболевания людей [1].

Несмотря на снижение заболеваемости животных и широты распространения, некоторые инфекционные болезни систематически регистрируются на территории России, в том числе и в Республике Бурятия. Они становятся источником угрозы безопасности здоровью животных и населения в целом, что требует усовершенствования возможности качественного прогнозирования динамики распространения заболевания с учетом всех существующих факторов.

Для решения таких задач в сельском хозяйстве сложились традиционные подходы к анализу данных на основе следующих методов статистической обработки: корреляционный, регрессионный и кластерный анализ. Такие методы делают результаты прогнозирования недостаточно точными, что является одной из причин неэффективности мер борьбы с инфекционными патологиями животных.

Основной целью данного исследования являлась оценка возможности использования нейросетевых технологий при анализе эпидемиологического уровня пастереллеза свиней на территории Республики Бурятия.

Для решения поставленной задачи была сформирована исходная таблица из 18 параметров, отражающая значение каждого параметра для всех районов Республики Бурятия. Основными параметрами для нейросетевого анализа стали площадь территории районов (кв. км), поголовье свиней (гол), плотность поголовья свиней (гол/ км<sup>2</sup>), сумму среднемесячных температур (°С), среднегодовое количество осадков (мм), количество дней в году с ветром более 15 м/с (дни), площади сельскохозяйственных угодий и пастбищ (тыс. га), средние данные представлены в таблице 1.

При выборе топологии нейронной сети был использован нейроимитатор NeuroPro, позволяющий проводить анализ и моделирование данных, исследовать и визуализировать исходные данные и результаты моделирования.

Прежде чем сформировать нейронную сеть, была проведена предобработка входной информации, так, чтобы все исходные значения были представлены в интервале [0,1]. При шкалировании данных учитывались значения больше максимального и меньше минимального среди имеющихся наблюдений (на случай, если в прогнозируемый период будет наблюдаться выход за пределы области значений поступлений предыдущего периода).

Была создана нейронная сеть с топологией 10/18/10 (число входных сигналов, число нейронов в скрытом слое, число выходных нейронов) (Рис 1).

Экспериментальный анализ выявленных наиболее значимых признаков показал, что для большинства случаев они совпали с результатами традиционно используемыми экспертными оценками [4].

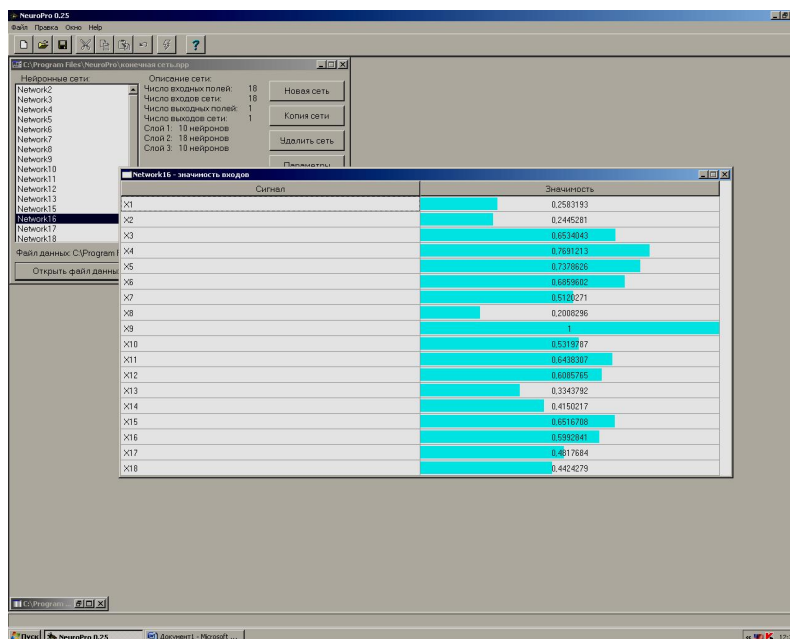


Рис. 1. Значимость входных сигналов нейросети

Полученная нейросетевая модель показала, что пастереллез в Республике Бурятия проявляется в районах с большим числом дней в году с ветром более 15 м/с, с малыми территориями, на которых регистрируются значительное поголовье и плотность поголовья домашних и диких свиней, низкие показатели вакцинации (рис. 1).

### Заключение

Исследования показывают, что метод нейросетевого моделирования может считаться эффективной альтернативой классическому методу корреляционного анализа в практике прогнозирования распространения инфекционных заболеваний животных. Внедрение нейросетевого анализа для прогнозирования и оценки риска распространения опасных инфекционных заболеваний животных требует дальнейшего исследования.

### Литература

1. Дудников С. А. Количественная эпизоотология: основы прикладной эпидемиологии и биостатистики. – Владимир: Демиург, 2004. – 460 с.
2. Кириченко А. А. Нейропакеты – современный интеллектуальный инструмент исследования. Сетевое электронное издание учебного пособия. – 2013. – 297 с.
3. Круг П. Г. Нейронные сети и нейрокомпьютеры. – М.: Изд-во МЭСИ, 2002. – 176 с.
4. Нехуров Л. Б., Антухаев И. К., Очиров Н. И. Адаптационные механизмы устойчивости организма животных: учеб. пособие. – Улан-Удэ: Изд-во БГСХА, 2000. – 89 с.
5. Петровичев Е.И. Нейросетевая технология в системах искусственного интеллекта // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2008. – №2–2.

### References

1. Dudnikov S. A. *Kolichestvennaya epizootologiya: osnovy prikladnoi epidemiologii i biostatistiki* [Quantitative Epizootiology: Fundamentals of Applied Epidemiology and Biostatistics]. Vladimir: Demiurg, 2004. 460 p.
2. Kirichenko A. A. *Neiropakety – Sovremennyi intellektual'nyi instrument issledovaniya* [Neuropackages – Modern Intelligent Instrument of Research]. Network electronic edition of textbook 2013. 297 p.
3. Krug P. G. *Neironnye seti i neirokomp'yutery* [Neural Networks and Neurocomputers]. Moscow: Moscow Economics and Statistics Institute publ., 2002. 176 p.

---

4. Nekhurov L. B., Antukhaev I. K., Ochirov N. I. Adaptatsionnye mekhanizmy ustoichivosti organizma zhivotnykh [Adaptable Mechanisms of Stability of Animals' Organism]. Ulan-Ude: Buryat State Agricultural Academy publ., 2000. 89 p.

5. Petrovichev E. I. Neurosetevaya tekhnologiya v sistemakh iskusstvennogo intellekta [Neural Network Technology in the Systems of Artificial Intelligence]. *Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten'* – *Mining Analytical and Information Bulletin*. 2008. No. 2–2.

УДК 517.98

doi: 10.18097/1994–0866–2015–0–9–31–39

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, УСТАНОВЛЕННЫХ НА КОНСОЛЬНОЙ БАЛКЕ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ

© Баргуев Сергей Ганжурович (Гаврилович)

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и общепрофессиональных дисциплин Бурятского филиала Сибирского университета телекоммуникаций и информатики

Россия, 670031, г. Улан-Удэ, ул. Трубочеева, 152, e-mail: barguev@yandex.ru

Исследуются вынужденные колебания системы из трех твердых тел, установленных вдоль консольной балки Эйлера – Бернулли с помощью упругодемпфирующих связей. Приводится гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая движение системы и получаемая из вариационного принципа Гамильтона. Внешняя сила, вызывающая вынужденные колебания системы, является гармонической и приложена на свободном конце балки. Полученная гибридная система дифференциальных уравнений содержит дельта-функцию Дирака и предполагает для исследования использование аппарата обобщенных функций. Описываются методика решения системы дифференциальных уравнений, основанная на введении подстановки типа функции Грина, решение вспомогательная краевой задачи, способ получения амплитуд твердых тел и амплитудной функции балки. Для проверки предлагаемого подхода был произведен сравнительный анализ с зарубежной статьей, где рассматривалась аналогичная механическая система с имеющимся расчетом амплитуды конца балки в зависимости от частоты приложенной внешней гармонической силы. Произведенный сравнительный анализ показал удовлетворительное согласование результатов расчета.

**Ключевые слова:** вынужденные колебания, система твердых тел, консольная балка, демпфирование, гибридная система, вспомогательная краевая задача, сравнительный анализ.

## FORCED OSCILLATIONS OF SOLIDS INSTALLED ON CANTILEVER BEAM WITH DAMPING

Sergei G. Barguev

PhD, A/Professor, Department of Mathematics and General professional disciplines, Buryat branch of Siberian University of Telecommunications and Informatics

152 Trubacheeva st., Ulan-Ude 670031, Russia

We studied the forced oscillations of the three solids installed along the cantilever beam of Euler-Bernoulli using elastic-damping connections. The hybrid system of differential equations describing motion of the system and obtained from the variational principle of Hamilton was given. The external force that causes forced oscillations was harmonic and attached to the free end of a beam. The obtained hybrid system of differential equations contained the Dirac delta function and involved the apparatus of generalized functions for studying. We described the method for solving the system of differential equations based on introduction of substitution of Green's function type, the solution of auxiliary boundary-value problem, the method of producing solid amplitude and amplitude function of a beam. To test the proposed approach we made a comparative analysis of foreign article which had been considered the similar mechanical system with calculation of amplitude of beam end in dependence on the frequency of applied external harmonic force. The comparative analysis showed a satisfactory agreement of the calculation results.

**Keywords:** forced oscillations, the system of solids, cantilever beam, damping, hybrid system, the auxiliary boundary-value problem, comparative analysis.

### Введение

В имеющейся зарубежной и отечественной литературе в последнее время при изучении колебаний механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами недостаточно внимания уделяется анализу получаемых при этом системам дифференциальных уравне-

ний с участием дельта-функции Дирака. Ранее автором такой анализ проводился для систем без учета демпфирования в упругих связях и для системы с балкой Эйлера – Бернулли на опоре с демпфированием.

В предлагаемой работе автором описывается методика исследования вынужденных колебаний балки Эйлера – Бернулли с системой твердых тел, связанных с балкой и между собой упругодемпфирующими связями.

**1. Описание математической модели**

Рассмотрим механическую систему (рис.1), состоящую из трех твердых тел с массами  $m_1, m_2, m_3$  присоединенных к консольной балке Эйлера – Бернулли с помощью упругодемпфирующих связей с жесткостями  $c_1, c_2, c_3$  и коэффициентами демпфирования  $b_1, b_2, b_3$  соответственно. Левый конец балки жестко закреплен, а правый свободен. Тела с массами  $m_1, m_2, m_3$  могут перемещаться только поступательно в направлении осей  $O_1z_1$  и  $O_2z_2, O_3z_3$ . Здесь точки  $O_1, O_2, O_3$  совпадают с положениями равновесия тел. Координаты тел есть функции  $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$  времени  $t$ . Поперечные смещения точек балки с абсциссой  $x$  в момент времени  $t$  описываются функцией  $u(x, t)$ . Упругодемпфирующие связи присоединены к балке расстояниях  $a_1, a_2, a_3$  от левого конца балки соответственно. На балку в точке  $x = a$  действует внешняя гармоническая сила  $f \cos \omega t$  с заданной частотой  $\omega$  и амплитудой  $f$ .

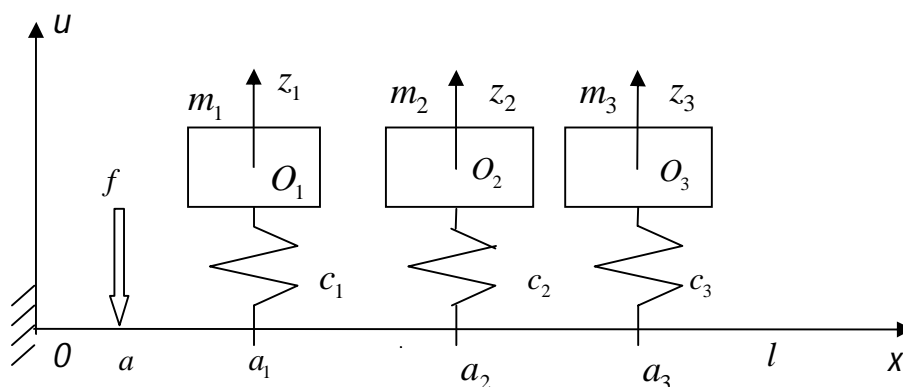


Рис. 1. Механическая система «Консольная балка с тремя твердыми телами с демпфированием»

Можно показать, что гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая движение рассматриваемой системы имеет вид:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{z}_1 + c_1 (z_1 - u(a_1, t)) + b_1 (\dot{z}_1 - \frac{\partial u}{\partial t}(a_1, t)) &= 0, \\
 m_2 \ddot{z}_2 + c_2 (z_2 - u(a_2, t)) + b_2 (\dot{z}_2 - \frac{\partial u}{\partial t}(a_2, t)) &= 0, \\
 m_3 \ddot{z}_3 + c_3 (z_3 - u(a_3, t)) + b_3 (\dot{z}_3 - \frac{\partial u}{\partial t}(a_3, t)) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \left( c_1 (z_1 - u(x, t)) + b_1 (\dot{z}_1 - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)) \right) \delta(x - a_1) +$$



$$\begin{aligned}
 & + \left( c_2(z_2 - u(x,t)) + b_2(\dot{z}_2 - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)) \right) \delta(x - a_2) + \\
 & + \left( c_3(z_3 - u(x,t)) + b_3(\dot{z}_3 - b_3 \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)) \right) \delta(x - a_3) + f \cos \omega t \delta(x - a).
 \end{aligned}$$

На  $u(x,t)$  наложены краевые условия:

$$\begin{aligned}
 u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(l,t) = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

## 2. Амплитудные уравнения и их разрешение

Решение системы (1) будем искать в виде  $z_i(t) = A_i \cos \omega t + B_i \sin \omega t$ ,

$$u(x,t) = V_1(x) \cos \omega t + V_2(x) \sin \omega t, \quad i = \overline{1,3} \tag{3}$$

После подстановки в (1), и приравнивания коэффициентов при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  получим уравнения для амплитуд  $A_i, B_i$  твердых тел

$$\begin{aligned}
 p_1^2(A_1 - V_1(a_1)) + \gamma_1(B_1 - V_2(a_1)) &= \omega^2 A_1, \\
 -\gamma_1(A_1 - V_1(a_1)) + p_1^2(B_1 - V_2(a_1)) &= \omega^2 B_1, \\
 p_2^2(A_2 - V_1(a_2)) + \gamma_2(B_2 - V_2(a_2)) &= \omega^2 A_2, \\
 -\gamma_2(A_2 - V_1(a_2)) + p_2^2(B_2 - V_2(a_2)) &= \omega^2 B_2, \\
 p_3^2(A_3 - V_1(a_3)) + \gamma_3(B_3 - V_2(a_3)) &= \omega^2 A_3, \\
 -\gamma_3(A_3 - V_1(a_3)) + p_3^2(B_3 - V_2(a_3)) &= \omega^2 B_3
 \end{aligned} \tag{4}$$

и амплитудных функций  $V_1(x), V_2(x)$

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 V_1(x) + b \frac{d^4 V_1(x)}{dx^4} &= (\alpha_1(A_1 - V_1(x)) + \beta_1(B_1 - V_2(x))) \delta(x - a_1) + \\
 & + (\alpha_2(A_2 - V_1(x)) + \beta_2(B_2 - V_2(x))) \delta(x - a_2) + \\
 & + (\alpha_3(A_3 - V_1(x)) + \beta_3(B_3 - V_2(x))) \delta(x - a_3) + H \delta(x - a)
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 V_2(x) + b \frac{d^4 V_2(x)}{dx^4} &= (\alpha_1(B_1 - V_2(x)) - \beta_1(A_1 - V_1(x))) \delta(x - a_1) + \\
 & + (\alpha_2(B_2 - V_2(x)) - \beta_2(A_2 - V_1(x))) \delta(x - a_2) + \\
 & + (\alpha_3(B_3 - V_2(x)) - \beta_3(A_3 - V_1(x))) \delta(x - a_3)
 \end{aligned}$$

$$b = \frac{EJ}{\rho F}, \quad H = \frac{f}{\rho F}$$

$$\alpha_i = \frac{c_i}{\rho F}, \gamma_i = \frac{b_i \omega}{m_i}, \beta_i = \frac{b_i \omega}{\rho F}, i = 1, 2, 3$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}, p_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}, p_3 = \sqrt{\frac{c_3}{m_3}},$$

Систему (4) разбиваем на три системы уравнений относительно пар величин  $A_1 - V_1(a_1), B_1 - V_2(a_1); A_2 - V_1(a_2), B_2 - V_2(a_2); A_3 - V_1(a_3), B_3 - V_2(a_3)$ .  
В результате получим

$$A_1 - V_1(a_1) = \frac{\omega^2 p_1^2}{\Delta_1} A_1 - \frac{\omega^2 \gamma_1}{\Delta_1} B_1, B_1 - V_2(a_1) = \frac{\omega^2 p_1^2}{\Delta_1} B_1 + \frac{\omega^2 \gamma_1}{\Delta_1} A_1$$

$$A_2 - V_1(a_2) = \frac{\omega^2 p_2^2}{\Delta_2} A_2 - \frac{\omega^2 \gamma_2}{\Delta_2} B_2, B_2 - V_2(a_2) = \frac{\omega^2 p_2^2}{\Delta_2} B_2 + \frac{\omega^2 \gamma_2}{\Delta_2} A_2$$

$$A_3 - V_1(a_3) = \frac{\omega^2 p_3^2}{\Delta_3} A_3 - \frac{\omega^2 \gamma_3}{\Delta_3} B_3, B_3 - V_2(a_3) = \frac{\omega^2 p_3^2}{\Delta_3} B_3 + \frac{\omega^2 \gamma_3}{\Delta_3} A_3 \tag{6}$$

где  $\Delta_1 = p_1^4 + \gamma_1^2, \Delta_2 = p_2^4 + \gamma_2^2, \Delta_3 = p_3^4 + \gamma_3^2$

В силу краевых условий (2) справедливо

$$V(0) = 0, V'(l) = 0,$$

$$V''(l) = 0, V'''(l) = 0. \tag{7}$$

Можно доказать, что обобщенное решение дифференциальных уравнений (5) имеет вид

$$V_1(x) = G_1(x - a_1)(\alpha_1(A_1 - V_1(a_1)) + \beta_1(B_1 - V_2(a_1))) +$$

$$+ G_2(x - a_2)(\alpha_2(A_2 - V_1(a_2)) + \beta_2(B_2 - V_2(a_2))) +$$

$$+ G_3(x - a_3)(\alpha_3(A_3 - V_1(a_3)) + \beta_3(B_3 - V_2(a_3))) + G(x - a)H \tag{8}$$

$$V_2(x) = G_1(x - a_1)(\alpha_1(B_1 - V_2(a_1)) - \beta_1(A_1 - V_1(a_1))) +$$

$$+ G_2(x - a_2)(\alpha_2(B_2 - V_2(a_2)) - \beta_2(A_2 - V_1(a_2))) +$$

$$+ G_3(x - a_3)(\alpha_3(B_3 - V_2(a_3)) - \beta_3(A_3 - V_1(a_3)))$$

где функции  $G_1(x), G_2(x)$  и  $G(x)$  являются решениями краевых задач

$$-\omega^2 G_1(x) + b \frac{d^4 G_1(x)}{dx^4} = \delta(x),$$

$$G_1(-a_1) = 0, G_1'(-a_1) = 0,$$

$$G_1''(l - a_1) = 0, G_1'''(l - a_1) = 0 \tag{9}$$

$$-\omega^2 G_2(x) + b \frac{d^4 G_2(x)}{dx^4} = \delta(x),$$

$$G_2(-a_2) = 0, G_2'(-a_2) = 0,$$

$$G_2''(l - a_2) = 0, G_2'''(l - a_2) = 0 \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 G_3(x) + b \frac{d^4 G_3(x)}{dx^4} &= \delta(x), \\
 G_3(-a_3) &= 0, G_3'(-a_3) = 0, \\
 G_3''(l - a_3) &= 0, G_3'''(l - a_3) = 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 G(x) + b \frac{d^4 G(x)}{dx^4} &= \delta(x), \\
 G(-a) &= 0, G'(-a) = 0, \\
 G''(l - a) &= 0, G'''(l - a) = 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

Решениями краевых задач (9)-(12) являются решения в обобщенном смысле дифференциального уравнения

$$-\omega^2 \tilde{G}(x) + b \frac{d^4 \tilde{G}(x)}{dx^4} = \delta(x), \tag{13}$$

которое представляется в виде суммы обобщенного решения  $\tilde{G}_0(x)$  однородного уравнения

$$-\omega^2 \tilde{G}(x) + b \frac{d^4 \tilde{G}(x)}{dx^4} = 0$$

и фундаментального решения  $\tilde{G}_*(x)$  неоднородного уравнения (13), то есть

$$\tilde{G}(x) = \tilde{G}_0(x) + \tilde{G}_*(x),$$

где

$$\tilde{G}_0(x) = c_1 S_1(\beta x) + c_2 S_2(\beta x) + c_3 S_3(\beta x) + c_4 S_4(\beta x).$$

$$S_1(\beta x) = \frac{\cosh(\beta x) + \cos(\beta x)}{2}, \quad S_2(\beta x) = \frac{\sinh(\beta x) + \sin(\beta x)}{2},$$

$$S_3(\beta x) = \frac{\cosh(\beta x) - \cos(\beta x)}{2}, \quad S_4(\beta x) = \frac{\sinh(\beta x) - \sin(\beta x)}{2}$$

функции Крылова,  $c_1, c_2, c_3, c_4$  – неизвестные постоянные. Фундаментальное решение  $\tilde{G}_*(x)$  можно представить в следующем виде

$$\tilde{G}_*(x) = \theta(x) \frac{S_4(\beta x)}{b\beta^3},$$

где  $\theta(x)$  – функция Хэвисайда,  $\beta = \frac{\sqrt{\omega}}{b^4}$ .

Применяя к найденному решению  $\tilde{G}(x) = \varphi(x, c_1, c_2, c_3, c_4)$  краевые условия в задачах (9)–(12) и определив неизвестные постоянные  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , тем самым находим  $G_1(x), G_2(x), G_3(x)$  и  $G(x)$ .

Подставляя в (8) вместо  $x$  последовательно значения  $a_1, a_2, a_3$  и, имея ввиду (6), получим

$$\begin{aligned}
 V_1(a_1) &= \alpha_{11}A_1 + \alpha_{12}B_1 + \alpha_{13}A_2 + \alpha_{14}B_2 + \alpha_{15}A_3 + \alpha_{16}B_3 + \\
 &= G(a_1 - a)H, \\
 V_1(a_2) &= \alpha_{21}A_1 + \alpha_{22}B_1 + \alpha_{23}A_2 + \alpha_{24}B_2 + \alpha_{25}A_3 + \alpha_{26}B_3 + \\
 &+ G(a_2 - a)H, \\
 V_1(a_3) &= \alpha_{31}A_1 + \alpha_{32}B_1 + \alpha_{33}A_2 + \alpha_{34}B_2 + \alpha_{35}A_3 + \alpha_{36}B_3 + \\
 &+ G(a_3 - a)H, \\
 V_2(a_1) &= \alpha_{41}A_1 + \alpha_{42}B_1 + \alpha_{43}A_2 + \alpha_{44}B_2 + \alpha_{45}A_3 + \alpha_{46}B_3, \\
 V_2(a_2) &= \alpha_{51}A_1 + \alpha_{52}B_1 + \alpha_{53}A_2 + \alpha_{54}B_2 + \alpha_{55}A_3 + \alpha_{56}B_3, \\
 V_2(a_3) &= \alpha_{61}A_1 + \alpha_{62}B_1 + \alpha_{63}A_2 + \alpha_{64}B_2 + \alpha_{65}A_3 + \alpha_{66}B_3
 \end{aligned} \tag{14}$$

где  $\alpha_{11} = \frac{G_1(0)\omega^2}{\Delta_1}(\alpha_1 p_1^2 + \beta_1 \gamma_1)$ ,  $\alpha_{12} = \frac{G_1(0)\omega^2}{\Delta_1}(-\alpha_1 \gamma_1 + \beta_1 p_1^2)$ ,

$$\alpha_{13} = \frac{G_2(a_1 - a_2)\omega^2}{\Delta_2}(\alpha_2 p_2^2 + \beta_2 \gamma_2), \alpha_{14} = \frac{G_2(a_1 - a_2)\omega^2}{\Delta_2}(-\alpha_2 \gamma_2 + \beta_2 p_2^2),$$

$$\alpha_{15} = \frac{G_3(a_1 - a_3)\omega^2}{\Delta_1}(\alpha_3 p_3^2 + \beta_3 \gamma_3), \alpha_{16} = \frac{G_3(a_1 - a_3)\omega^2}{\Delta_1}(-\alpha_3 \gamma_3 + \beta_3 p_3^2),$$

$$\alpha_{21} = \frac{G_1(a_2 - a_1)\omega^2}{\Delta_1}(\alpha_1 p_1^2 + \beta_1 \gamma_1), \alpha_{22} = \frac{G_1(a_2 - a_1)\omega^2}{\Delta_1}(-\alpha_1 \gamma_1 + \beta_1 p_1^2),$$

$$\alpha_{23} = \frac{G_2(0)\omega^2}{\Delta_2}(\alpha_2 p_2^2 + \beta_2 \gamma_2), \alpha_{24} = \frac{G_2(0)\omega^2}{\Delta_2}(-\alpha_2 \gamma_2 + \beta_2 p_2^2),$$

$$\alpha_{25} = \frac{G_3(a_2 - a_3)\omega^2}{\Delta_3}(\alpha_3 p_3^2 + \beta_3 \gamma_3), \alpha_{26} = \frac{G_3(a_2 - a_3)\omega^2}{\Delta_3}(-\alpha_3 \gamma_3 + \beta_3 p_3^2),$$

$$\alpha_{31} = \frac{G_1(a_3 - a_1)\omega^2}{\Delta_1}(\alpha_1 p_1^2 + \beta_1 \gamma_1), \alpha_{32} = \frac{G_1(a_3 - a_1)\omega^2}{\Delta_1}(-\alpha_1 \gamma_1 + \beta_1 p_1^2),$$

$$\alpha_{33} = \frac{G_2(a_3 - a_2)\omega^2}{\Delta_2}(\alpha_1 p_2^2 + \beta_2 \gamma_2), \alpha_{34} = \frac{G_2(a_3 - a_2)\omega^2}{\Delta_2}(-\alpha_2 \gamma_2 + \beta_2 p_2^2),$$

$$\alpha_{35} = \frac{G_3(0)\omega^2}{\Delta_3}(\alpha_3 p_3^2 + \beta_2 \gamma_3), \alpha_{36} = \frac{G_3(0)\omega^2}{\Delta_3}(-\alpha_3 \gamma_3 + \beta_3 p_3^2),$$

$$\alpha_{41} = \frac{G_1(0)\omega^2}{\Delta_1}(\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1 p_1^2), \alpha_{42} = \frac{G_1(0)\omega^2}{\Delta_1}(\alpha_1 p_1^2 + \beta_1 \gamma_1),$$

$$\alpha_{43} = \frac{G_2(a_1 - a_2)\omega^2}{\Delta_2}(\alpha_2 \gamma_2 - \beta_2 p_2^2), \alpha_{44} = \frac{G_2(a_1 - a_2)\omega^2}{\Delta_2}(\alpha_2 p_2^2 + \beta_2 \gamma_2),$$

$$\begin{aligned}\alpha_{45} &= \frac{G_3(a_1 - a_3)\omega^2}{\Delta_3}(\alpha_3\gamma_3 - \beta_3p_3^2), \alpha_{46} = \frac{G_3(a_1 - a_3)\omega^2}{\Delta_3}(\alpha_3p_3^2 + \beta_3\gamma_3), \\ \alpha_{51} &= \frac{G_1(a_2 - a_1)\omega^2}{\Delta_1}(\alpha_1\gamma_1 - \beta_1p_1^2), \alpha_{52} = \frac{G_1(a_2 - a_1)\omega^2}{\Delta_1}(\alpha_1p_1^2 + \beta_1\gamma_1), \\ \alpha_{53} &= \frac{G_2(0)\omega^2}{\Delta_2}(\alpha_2\gamma_2 - \beta_2p_2^2), \alpha_{54} = \frac{G_2(0)\omega^2}{\Delta_2}(\alpha_2p_2^2 + \beta_2\gamma_2), \\ \alpha_{55} &= \frac{G_3(a_2 - a_3)\omega^2}{\Delta_1}(\alpha_3\gamma_3 - \beta_3p_3^2), \alpha_{56} = \frac{G_3(a_2 - a_3)\omega^2}{\Delta_3}(\alpha_3p_3^2 + \beta_3\gamma_3), \\ \alpha_{61} &= \frac{G_1(a_3 - a_1)\omega^2}{\Delta_1}(\alpha_1\gamma_1 - \beta_1p_1^2), \alpha_{62} = \frac{G_1(a_3 - a_1)\omega^2}{\Delta_1}(\alpha_1p_1^2 + \beta_1\gamma_1), \\ \alpha_{63} &= \frac{G_2(a_3 - a_2)\omega^2}{\Delta_2}(\alpha_2\gamma_2 - \beta_2p_2^2), \alpha_{64} = \frac{G_2(a_3 - a_2)\omega^2}{\Delta_2}(\alpha_2p_2^2 + \beta_2\gamma_2), \\ \alpha_{65} &= \frac{G_3(0)\omega^2}{\Delta_3}(\alpha_3\gamma_3 - \beta_3p_3^2), \alpha_{66} = \frac{G_3(0)\omega^2}{\Delta_3}(\alpha_3p_3^2 + \beta_3\gamma_3)\end{aligned}$$

Подставив (14) в (4) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$

$$\begin{aligned}(-\omega^2 - \gamma_1\alpha_{41} + p_1^2 - p_1^2\alpha_{11})A_1 + (\gamma_1 - \gamma_1\alpha_{42} - p_1^2\alpha_{12})B_1 + (-\gamma_1\alpha_{43} - p_1^2\alpha_{13})A_2 \\ + (-\gamma_1\alpha_{44} - p_1^2\alpha_{14})B_2 + (-\gamma_1\alpha_{45} - p_1^2\alpha_{15})A_3 + (-\gamma_1\alpha_{46} - p_1^2\alpha_{16})B_3 = \\ = p_1^2G(a_1 - a)H, \\ (-p_1^2\alpha_{41} - \gamma_1 + \gamma_1\alpha_{11})A_1 + (-\omega^2 + p_1^2 - p_1^2\alpha_{42} + \gamma_1\alpha_{12})B_1 + (-p_1^2\alpha_{43} + \gamma_1\alpha_{13})A_2 + \\ + (-p_1^2\alpha_{44} + \gamma_1\alpha_{14})B_2 + (-p_1^2\alpha_{45} + \gamma_1\alpha_{15})A_3 + (-p_1^2\alpha_{46} + \gamma_1\alpha_{16})B_3 = \\ = -\gamma_1G(a_1 - a)H, \\ (-p_2^2\alpha_{21} - \gamma_2\alpha_{51})A_1 + (-p_2^2\alpha_{22} - \gamma_2\alpha_{52})B_1 + (-\omega^2 + p_2^2 - p_2^2\alpha_{23} - \gamma_2\alpha_{53})A_2 + \\ + (-p_2^2\alpha_{24} + \gamma_2 - \gamma_2\alpha_{54})B_2 + (-p_2^2\alpha_{25} - \gamma_2\alpha_{55})A_3 + (-p_2^2\alpha_{26} - \gamma_2\alpha_{56})B_3 = \\ = p_2^2G(a_2 - a)H, \\ (\gamma_1\alpha_{21} - p_2^2\alpha_{51})A_1 + (\gamma_1\alpha_{22} - p_2^2\alpha_{52})B_1 + (-\gamma_2 + \gamma_2\alpha_{23} - p_2^2\alpha_{53})A_2 + \\ + (-\omega^2 + \gamma_2\alpha_{24} + p_2^2 - p_2^2\alpha_{54})B_2 + (\gamma_2\alpha_{25} - p_2^2\alpha_{55})A_3 + (\gamma_2\alpha_{26} - p_2^2\alpha_{56})B_3 = \\ = -\gamma_2G(a_2 - a)H, \\ (-p_3^2\alpha_{31} - \gamma_3\alpha_{61})A_1 + (-p_3^2\alpha_{32} - \gamma_3\alpha_{62})B_1 + (-p_3^2\alpha_{33} - \gamma_3\alpha_{63})A_2 + \\ + (-p_3^2\alpha_{34} - \gamma_3\alpha_{64})B_2 + (-\omega^2 + p_3^2 - p_3^2\alpha_{35} - \gamma_3\alpha_{65})A_3 + \\ + (-p_3^2\alpha_{36} + \gamma_3 - \gamma_3\alpha_{66})B_3 = p_3^2G(a_3 - a)H, \\ (\gamma_3\alpha_{31} - p_3^2\alpha_{61})A_1 + (\gamma_3\alpha_{32} - p_3^2\alpha_{62})B_1 + (\gamma_3\alpha_{33} - p_3^2\alpha_{63})A_2 + \\ + (\gamma_3\alpha_{34} - p_3^2\alpha_{64})B_2 + (-\gamma_3 + \gamma_3\alpha_{35} - p_3^2\alpha_{65})A_3 + \\ + (-\omega^2 + \gamma_3\alpha_{36} + p_3^2 - p_3^2\alpha_{66})B_3 = -\gamma_3G(a_3 - a)H\end{aligned}$$

Разрешив данную систему относительно амплитуд  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  и подставив в (8) и (3), получим смещения тел  $z_i(t)$  и смещения точек балки  $u(x, t)$ .

### 3. Сравнительный анализ

Для проведения сравнительного анализа предложенного подхода были использованы данные модели и расчеты, приведенные в работе [1].

$l = 1 \text{ м}$  – длина консольной балки,

$\rho F = 0.675 \text{ кг}$  – масса единицы длины балки,

$J = 5.20833 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4$  – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси, проходящей через центр тяжести сечения и перпендикулярной плоскости колебаний балки,

$a_1 = 0.1 \text{ м}, a_2 = 0.1 \text{ м}, a_3 = 0.1 \text{ м}$  – точки, в которых через упругодемпфирующие связи крепятся твердые тела,

$b_1=0.1 \text{ нс/м}, b_2=0.1 \text{ нс/м}, b_3=0.1 \text{ нс/м}$  – коэффициенты демпфирования,

$c_1=0.1 \text{ н/м}, c_2=0.1 \text{ н/м}, c_3=0.1 \text{ н/м}$  – коэффициенты жесткости пружин в упругодемпфирующих связях,

$E = 7 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2$  – модуль Юнга,

$f = 10 \text{ н}$  – амплитуда внешней гармонической силы.

Для сравнения был произведен расчет амплитуды  $V(\omega)$  вынужденных колебаний конца консольной балки в зависимости от частоты приложенной в этом же конце гармонической вынуждающей силы и построен соответствующий график. При этом  $V(\omega) = \sqrt{V_1^2(\omega) + V_2^2(\omega)}$ , где величины  $V_1(\omega), V_2(\omega)$  рассчитывались согласно (8) при  $x = l$ .

График зависимости  $V(\omega)$  от частоты, построенный в результате расчета в рамках предложенного нами подхода имеет вид (рис. 2):

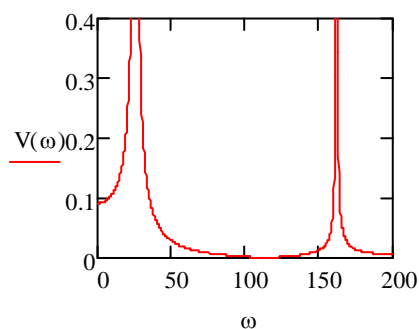


Рис. 2

### Заключение

В работе предложена методика исследования вынужденных колебаний балки Эйлера-Бернулли с системой твердых тел, связанных с балкой и между собой упругодемпфирующими связями. При этом данная методика является развитием подходов, заявленных ранее в работах [2; 3; 4] и др. Проведенный сравнительный с расчетом, выполненным в зарубежной статье [1] другим способом, показал удовлетворительное согласование полученных результатов.

### Литература

1. Wu J. S., Chen D. W. Dynamic analysis of uniform cantilever Beam carrying a number of elastically mounted point masses with dampers // Journal of Sound and Vibration. – 2000. – Vol. 229(3). – P.549–578.
2. Баргуев С. Г., Мижидон А. Д. Способы расчета собственных колебаний одной механической системы и их сравнительный анализ // Вестник Бурятского государственного университета. Сер. 13: Математика и информатика. – Вып. 2. – С.192–200.
3. Баргуев С. Г., Мижидон А. Д. К исследованию вынужденных колебаний упругой механической системой каскадного типа // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – Вып. 9. – С.151–155.
4. Баргуев С. Г., Мижидон А. Д. Определение собственных частот простейшей механической системы на упругом основании // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – Вып. 9. – 2009. – С. 58–66.

### References

1. Wu J. S., Chen D. W. Dynamic analysis of uniform cantilever Beam carrying a number of elastically mounted point masses with dampers. *Journal of Sound and Vibration*. 2000. V. 229 (3). Pp. 549–578.
2. Barguev S.G. Sposoby rascheta sobstvennykh kolebaniy odnoi mekhanicheskoi sistemy i ikh sravnitel'nyi analiz [Methods for calculating natural oscillations of one mechanical system and their comparative analysis]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i informatika – Bulletin of Buryat State University. Mathematics and Computer Science*. 2005. V. 2 Pp.192–200.
3. Barguev S. G., Mizhidon A. D. K issledovaniyu vynuzhdennykh kolebaniy uprugoi mekhanicheskoi sistemy kaskadnogo tipa [To the study of forced oscillations of cascade type elastic mechanical system]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i informatika – Bulletin of Buryat State University. Mathematics and Computer Science*. 2008. V. 9. Pp. 151–155.
4. Barguev S. G., Mizhidon A. D. Opredelenie sobstvennykh chastot prosteishei mekhanicheskoi sistemy na uprugom osnovanii [Determination of natural frequencies of a simple mechanical system on elastic foundation]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i informatika – Bulletin of Buryat State University. Mathematics and Computer Science*. 2009. V. 9. Pp. 58–66.

УДК 004.942:517.956.225

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-40-53

## ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ТОЛПЫ В СРЕДЕ РАЗРАБОТКИ ANYLOGIC<sup>1</sup>

© Бекларян Армен Леонович

аспирант, преподаватель кафедры бизнес-аналитики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» Центрального экономико-математического института РАН

Россия, 105187, г. Москва, ул. Кирпичная, 33/5, e-mail: abeklaryan@hse.ru

В статье развивается феноменологический подход к моделированию поведения толпы. Рассматривается непрерывная стохастическая агентная модель движения людей в ограниченном пространстве с заданной геометрией. По аналогии с моделью Антонини введена система принятия решения агентом на основе анализа окружающего пространства. В системе имитационного моделирования AnyLogic создана агентная модель, позволяющая исследовать динамику перемещения агентов с учетом «эффекта толпы» при различных сценариях, в частности, в условиях экстремальных ситуаций при наличии эффектов «давки» и «турбулентности».

**Ключевые слова:** имитационное моделирование, динамика толпы, агентное моделирование, AnyLogic.

## SIMULATION MODEL OF CROWD BEHAVIOR IN THE IDE ANYLOGIC

**Armen L. Beklaryan**

Research Assistant, Lecturer, Department of Business Analytics, National Research University “Higher School of Economics” of RAS Central Economics and Mathematics Institute

33/5 Kirpichnaya st., Moscow 105187, Russia

Development of a phenomenological approach to simulation of human crowd behavior is presented in the article. We considered continuous stochastic agent-based model of human behavior in confined space with the given geometry. By analogy with the Antonini’s model, a decision making system of an agent based on the analysis of surrounding space was introduced. The agent based model, which has been created in the simulation system AnyLogic allows to investigate the dynamics of agents taking into account “effect of crowd” at various scenarios, in particular, the conditions of extreme situations in presence of “crowd crush”, “turbulence” and others effects.

**Keywords:** simulation modeling, dynamics of crowd, agent based modeling, AnyLogic.

### Введение

Неотъемлемой составляющей жизнедеятельности человека, особенно в крупных городах, является пребывание в местах большого скопления других людей: пользование общественным транспортом, проведение культурно-массовых мероприятий, митингов и другие эпизоды повседневной жизни человека. Отдельно стоит отметить проблему эвакуации людей из зданий при чрезвычайных ситуациях (ЧС).

Очевидно, что проведение реальных экспериментов в рамках данной задачи требует огромного финансирования и сопряжено с большими организационными сложностями. Отсюда возникает необходимость математического моделирования описанных процессов с целью определения, как наилучшей геометрии помещений, так и возникновения устойчивых групп скоплений, что позволит максимально эффективно, с точки зрения количества спасенных людей, выстроить процесс ликвидации ЧС.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 15-37-20265



## 1. Анализ существующих моделей

Несмотря на высокий интерес к проблематике, долгое время основные работы по данной теме были посвящены психологическим и социальным аспектам вопроса. Например, в работе [11] детально описаны условия и причины возникновения паники, которые сводятся к доминированию коллективного бессознательного как основного фактора. То есть солидная часть исследователей рассматривает толпу с фрейдистской точки зрения, основанной на гипотезе, что люди как часть толпы действуют иначе, чем люди как индивиды. Совокупность разумов членов группы синергируются в некий коллективный разум. Соответственно, и предлагаемые решения проблемы возникновения паники также основаны на таком подходе, который мы назовем *наивным*.

На фоне описанных исследований изучение толпы с привлечением сложных математических моделей началось сравнительно недавно. Здесь стоит отметить работы пионера этой области – Дирка Хелбинга. В его работе 2000 года в журнале Nature [9] впервые удалось воспроизвести ряд характерных для толпы явлений, таких, как образование пробок, вовлечение новых людей в панику и другие, с помощью математического моделирования. В основе этой работы лежала идея применения к толпе людей методов молекулярной динамики, где психологическим и социальным факторам ставятся в соответствие потенциалы взаимодействия между молекулами-людьми. Такой подход будем называть *молекулярным*. На основе модели Хелбинга были построены ряд других моделей, рассматривающие различные аспекты возможных усложнений системы взаимодействий. Правда, основная часть моделей основывается на двухчастичном взаимодействии и игнорирует тот факт, что в определенной точке пространства сталкиваются трое и более людей. Тем не менее в работе [12] была рассмотрена модель многочастичного взаимодействия, которая привела к появлению модельного эффекта турбулентности толпы, который не раз был зарегистрирован в реальных ситуациях. Здесь стоит упомянуть работы группы российских ученых, Д.А. Брацуна [2] и его коллег, ставящие своей целью создание агентной модели поведения толпы на основе моделей Хелбинга. Отличительной особенностью моделей Брацуна является сложность геометрии пространства и формирование агентом плана выхода из многоуровневого разветвленного помещения. К сожалению, дальнейшее усложнение моделей Хелбинга, как в части взаимодействия людей, так и в части анализа окружающей обстановки, ведет к громоздкой процедуре совместного интегрирования уравнений движений, что требует либо распараллеливания вычислительных процессов, либо сверхпроизводительных процессов.

Наряду с двумя описанными подходами, в работе [4] был предложен феноменологический подход, в рамках которого формализована агентная модель поведения толпы. В такой модели априори определяются состояния агентов с их характеристиками, правила взаимодействия агентов и правила принятия решений. Это позволяет смоделировать динамику состояния системы как результат взаимодействия автономных агентов, чья система принятия решений задается в явном виде, а не является результатом решения системы уравнений Ньютона. При этом удастся заложить такие эффекты, как турбулентность толпы, волны сжатия толпы и другие, которые в рамках моделей Хелбинга требуют задания соответствующих потенциалов, что, в свою очередь, ведет к поиску уникального динамического решения для весьма сложной системы уравнений и порождает самостоятельную неординарную задачу. Также стоит отметить, что при феноменологическом подходе удастся добавить ряд стохастических процессов в систему принятия решений агента с целью приближения моделируемой динамики к реально наблюдаемым случайным флуктуациям в поведении толпы.

## 2. Концепция предлагаемой агентной модели

Ключевыми особенностями толпы являются эффекты типа давка, паника, турбулентность. Нарастающая плотность агентов по достижению критического значения приводит к появлению *давки*, которая в состоянии спровоцировать возникновение *паники*. Сама паника характеризуется стремлением агента расширить свое *личное пространство*, что приводит к возникновению эффекта *турбулентности толпы*. При этом в толпе образуются *волны сжатия*, выталкивающие агентов на опасные участки помещения (в частности, на стены).

В результате учета имеющихся моделей и подходов, а также исследований по психологии толпы, были сформулированы основные априорные предположения, которые легли в основу предлагаемой агентной модели поведения при ЧС, среди которых стоит отметить:

- частичная или полная потеря ориентации в пространстве и во времени;
- высокая степень турбулентности толпы, т.е. наличие хаотичного движения во всех направлениях в условиях высокой плотности агентов;
- существенное замедление скорости передвижения при определенных условиях (ранение, уплотнение и т.д.);
- стремление к ближайшему выходу в случае нахождения выхода в пределах видимости;
- стремление к присоединению к ближайшей группе агентов (эффект *притяжения толпы*).

В предлагаемой модели реализуется концепция перехода от фиксированных значений ряда показателей, отражающих как геометрию помещения, так и физику процесса перемещения агентов, к представлению их в качестве управляющих параметров модели. В результате удается построить гибкую, универсальную модель, позволяющую варьировать управляющими параметрами и, как следствие, калибровать модель с целью максимизации правдоподобия с реальными процессами. Также предлагаемая модель допускает дальнейшее усложнение во всех аспектах (геометрия помещения, механика взаимодействия агентов, характеристики самих агентов и т.д.) и введение новых уравнений связи и условий.

### 3. Описание модели поведения толпы

В условии отсутствия ЧС основное стремление агента – покинуть помещение, с наименьшими потерями, в которые входят отклонение от прямолинейной траектории движения к выходу, пересечение с другими агентами, замедление скорости движения и ряд других параметров. Среди допущений модели стоит выделить тот факт, что рассматривается одноэтажное помещение прямоугольной формы с диаметрально противоположными выходами. Приведем формальное описание модели. Введем следующие обозначения [3]:

- $N$  – общее число агентов (рассматривается как *параметр* модели);
- $(a_0, b_0)$  – координата левого верхнего угла помещения (*параметр*),
- $(a_{11}, b_{11}), (a_{12}, b_{12})$  – координаты вершин первого выхода (*параметр*),
- $(a_{21}, b_{21}), (a_{22}, b_{22})$  – координаты вершин второго выхода (*параметр*),
- $len_1, len_2$  – длина и ширина помещения (*параметр*), соответственно.

Для характеристик активного пространства имеют место ряд естественных ограничений. Само помещение разбито на  $M$  прямоугольных областей за счет равномерно распределенных горизонтальных и вертикальных прямых. Количество клеток по вертикали ( $m_{vert}$ ) и горизонтали ( $m_{hor}$ ) также являются *параметрами* моделирования. Очевидно, что  $M = m_{vert} \times m_{hor}$ .

Количество агентов в клетке  $K_l$  в начальный момент обозначается  $n_{K_l}$ . Имеет место равенство  $\sum_{l=1}^M n_{K_l} = N$ . В каждой клетке  $K_l, l = 1, 2, \dots, M$  задается собственное начальное распределение положений агентов в начальный момент времени, обозначаемое области  $F_{K_l}$ . Распределение  $F_{K_l}$  вместе с  $n_{K_l}$  также являются *параметрами*.

$t = 1, 2, \dots, T$ , где  $T \in [1, +\infty]$  – модельное время, допускающее дробление вплоть до миллисекунд (квантование времени необходимо для аппроксимация непрерывной модели дискретной). Подобное квантование времени обусловлено тем, что оно намного меньше, чем величина минимального времени для принятия решения агентом;

$i = 1, 2, \dots, N$  – индекс агентов;

$o_i$  – возраст агента. Значения нормально распределены в отрезке [6,79];

$g_i$  – пол агента: случайная величина, равновероятно принимающая значения 1 (мужчина) или 0 (женщина);

$x_i(t)$  – абсцисса положения агента в момент времени  $t$ ;

$y_i(t)$  – ордината положения агента в момент времени  $t$ ;

$\vec{r}_i(t) = \{x_i(t), y_i(t)\}$  – радиус-вектор положения агента в момент времени  $t$  ;  
 $v_i(t)$  – абсолютное значение скорости (скалярная величина) перемещения агента в момент времени  $t$  ;

$v_{i,conf}$  – значение комфортной скорости (скалярная величина) ходьбы агента;

$v_{i,max}$  – значение максимальной скорости (скалярная величина) ходьбы агента;

$\vec{d}_i(t)$  – направляющий единичный вектор перемещения агента в момент времени  $t$  ;

$\vec{D}_i(t)$  – направляющий единичный вектор агента к точке выхода в момент времени  $t$  ;

$\delta_i(t)$  – радиус «личного пространства» агента;

$dist_{i,j}(t)$  – расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м агентами;

$$dist_{i,j}(t) = \sqrt{[x_i(t) - x_j(t)]^2 + [y_i(t) - y_j(t)]^2} ;$$

$st_i(t) \in \{0, 1, 2, 3\}$  – статус агента в момент времени  $t$  (0 – убит, 1 – ранен, 2 – дезориентация, 3 – жив). Статус 2 является временным и спустя некоторый период меняется на 3. В условиях отсутствия ЧС и давки,  $st_i(t) = 3$  для всех  $i$  ;

$sit_i(t) \in \{0, 1, 2, 3\}$  – статус восприятия агентом окружающей ситуации в момент времени  $t$  (0 – отсутствие ЧС, 3 – время сразу после ЧС, 2 – активная стадия ЧС, 1 – угасание ЧС). В условиях отсутствия ЧС,  $sit_i(t) = 0$  для всех  $i$  ;

$s_i(t)$  – площадь горизонтальной проекции агента,

$$s_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } st_i(t) = 0 \\ \sigma_1 \bar{s}_i, & \text{если } st_i(t) = 1 \\ \sigma_2 \bar{s}_i, & \text{если } st_i(t) = 2 \\ \bar{s}_i, & \text{если } st_i(t) = 3, \end{cases}$$

где  $\bar{s}_i$  – базовое значение,  $\sigma_1, \sigma_2$  – поправочные коэффициенты (*параметры*), причем  $\sigma_1 > \sigma_2 \geq 1$ . Значения коэффициентов обусловлены тем, что раненый человек имеет большую площадь проекции, ввиду появившейся, например, хромоты, контузии или просто ухудшения координации движения. Дезориентированный человек, хоть и в меньшей степени, но также склонен к ухудшению своего позиционирования, что влечет увеличение площади проекции. Базовое ( $\bar{s}_i$ ) значение площади горизонтальной проекции агента рассчитывается на основании данных из методики МЧС России.

$\rho_i(t)$  – плотность людей в толпе относительно агента в момент времени  $t$  ,

$$\rho_i(t) = \frac{\sum_{j=1}^N \chi_i^j(t) s_j(t)}{\eta^2 s_i(t)} ,$$

где  $\eta$  – коэффициент пропорции между окружающим пространством вокруг агента, где вычисляется плотность, и его площади горизонтальной проекции (*параметр*),  $\chi_i^j(t)$  – характеристическая функция присутствия  $j$ -го агента в окружении  $i$ -го агента, т. е.

$$\chi_i^j(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_j(t), y_j(t)) \in B\left(\eta \sqrt{\frac{s_i}{\pi}}, (x_i(t), y_i(t))\right) \text{ и } st_j(t) \neq 0 \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $B(r, (x, y))$  – круг радиуса  $r$  с центром в точке  $(x, y)$ .

Опишем функциональную связь между  $\delta_i(t)$  и  $\rho_i(t)$ .

$$\delta_i(t) = \begin{cases} \zeta_i(t)\bar{\delta}_{1,i}, & \rho_i(t) \leq \bar{\rho}_{1,i}(t), \\ \zeta_i(t)\bar{\delta}_{2,i}, & \bar{\rho}_{1,i}(t) < \rho_i(t) \leq \bar{\rho}_{2,i}(t), \\ \zeta_i(t)\bar{\delta}_{3,i}, & \bar{\rho}_{2,i}(t) < \rho_i(t) \leq \bar{\rho}_{3,i}(t), \\ \zeta_i(t)\bar{\delta}_{4,i}, & \bar{\rho}_{3,i}(t) < \rho_i(t) \leq \bar{\rho}_{4,i}(t), \end{cases}$$

$$\zeta_i = \begin{cases} \bar{\zeta}_0, & \text{если } sit_i(t) = 0, \\ \bar{\zeta}_1, & \text{если } sit_i(t) = 1, \\ \bar{\zeta}_2, & \text{если } sit_i(t) = 2, \\ \bar{\zeta}_3, & \text{если } sit_i(t) = 3, \end{cases}$$

$$\bar{\zeta}_3 > \bar{\zeta}_2 > \bar{\zeta}_1 > \bar{\zeta}_0,$$

$$\bar{\rho}_{i,1}(t) = \frac{\bar{\rho}_{i,3}(t)}{3}, \bar{\rho}_{i,2}(t) = \frac{2\bar{\rho}_{i,3}(t)}{3},$$

$$\bar{\rho}_{3,i}(t) = \psi_3(sit_i(t)) \frac{s_i \sum_{j=1}^N \chi_i^j(t)}{\sum_{j=1}^N \chi_i^j(t) s_j}, \bar{\rho}_{4,i}(t) = \psi_4(sit_i(t)) \frac{s_i \sum_{j=1}^N \chi_i^j(t)}{\sum_{j=1}^N \chi_i^j(t) s_j},$$

$$\psi_4(sit_i(t)) > \psi_3(sit_i(t)), \psi_3(0) > \psi_3(1) > \psi_3(2) > \psi_3(3), \psi_4(3) > \psi_4(2) > \psi_4(1) > \psi_4(0),$$

$$\bar{\delta}_{1,i} = \vartheta_1 \sqrt{\frac{s_i}{\pi}}, \bar{\delta}_{2,i} = \vartheta_2 \sqrt{\frac{s_i}{\pi}}, \bar{\delta}_{3,i} = \vartheta_3 \sqrt{\frac{s_i}{\pi}}, \bar{\delta}_{4,i} = \vartheta_4 \sqrt{\frac{s_i}{\pi}}$$

$$\vartheta_4 > \vartheta_1 > \vartheta_2 > \vartheta_3.$$

Радиус личного пространства является кусочно постоянной функцией и, в отличие от площади горизонтальной проекции, является не физической, а психологической характеристикой агента. Коэффициент  $\bar{\zeta}_i$ , выступающий также в качестве *параметра* модели, отражает поправки в радиусе личного пространства в зависимости от статуса ситуации: чем более чрезвычайна ситуация в восприятии агента, тем больше его стремление расширить свое личное пространство.

Взаимодействие агентов в рамках описываемой модели рассматривается как абсолютно упругий нецентральный удар. В качестве критерия наступления взаимодействия выступает пересечение площадей горизонтальных проекций агентов.

В качестве чрезвычайной ситуации рассматривается одиночный взрыв, центр которого является случайной величиной с вероятностным распределением  $P$ . С центром взрыва связаны три концентрические окружности различных радиусов, образующие зоны различного поражения агентов. Попадание в каждую из зон поражения в момент взрыва меняет статус агента  $st_i$  на соответствующее значение. В случае смерти агента он перестает влиять на дальнейшее развитие модели, в том числе, не является преградой для перемещения. Если в результате взрыва агент дезориентирован, то он на протяжении нескольких секунд он остается неподвижным, а по истечении меняет свой статус на  $st_i = 3$ .

При ЧС каждый из агентов, испытывая стресс и страх, перестает ориентироваться на комфортную скорость ходьбы и готов даже на бег. При этом, в случае попадания агента в зону ранения при взрыве, его максимальная скорость бега претерпевает изменение пропорциональное близости к взрыву.

Система принятия решения каждого агента базируется на анализе ситуации в рамках его сектора обзора [5]. Максимальный угол обзора принимается равным  $170^\circ$  для всех агентов, при этом весь сектор обзора разбивается на одиннадцать подсекторов, центральный из которых отражает текущее направление движения, а десять остальных, симметричных относительно центрального, отражают отклонение агента от текущего направления движения (см. рис. 1). Заметим, что меры углов подсекторов тем больше, чем дальше подсектор от центрального, что объясняется более детальным просчетом движения в случае незначительного отклонения, т.к. периферийное зрение уступает в части детализации. Изменение угла обзора в зависимости от ста-

туса ситуации происходит посредством симметричного увеличения или уменьшения числа подсекторов.

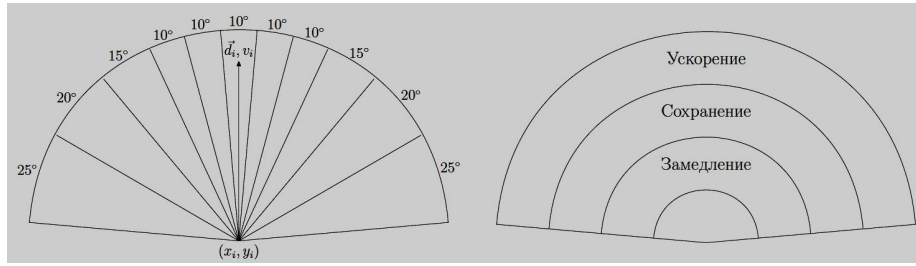


Рис. 1. Пространство выбора агента

В каждый момент времени агент определяет новый единичный вектор перемещения  $\vec{d}_{i,new}$  по центру выбранного подсектора, а сам подсектор далее отождествляется со своим единичным вектором.

При этом в каждый момент времени агент имеет три альтернативы по отношению к выбору абсолютного значения своей новой скорости  $v_{i,new}$ : сохранить текущую скорость  $v_i$ , увеличить скорость до значения  $v_{acc} = v_i + \gamma_{acc}(v_{i,max} - v_i)$  или уменьшить скорость до значения  $v_{dec} = (1 - \gamma_{dec})v_i$ , где  $\gamma_{acc}$ ,  $\gamma_{dec}$  являются параметрами модели и принимают значения в интервале (0,1).

Таким образом пара значений  $(v_{i,new}, \vec{d}_{i,new})$ , определяющих перемещение агента, выбираются агентом из 33 альтернативных возможностей (11 направлений по центрам подсекторов и 3 варианта выбора скорости). Итоговое положение агента вычисляется по формуле

$$\vec{r}_{i,new} = \vec{r}_i + v_{i,new} \vec{d}_{i,new}.$$

При этом те альтернативы, которые попадают вне или на стены помещения, агентом не рассматриваются.

Выбор из 33 возможных итоговых положений осуществляется на основе следующего функционала

$$\begin{aligned} M_i = & \beta_{occ}(sit_i(t))occupation_i + \beta_{dir}(sit_i(t))direction_i + \beta_{dest}(sit_i(t))destination_i + \\ & \beta_{angle}(sit_i(t))angle_i + \beta_{wall}(sit_i(t))wall_i + \beta_{vel}(sit_i(t))(|v_{i,new} - v_{i,comf}|)^{\lambda_{vel}} + \\ & \beta_{max}(sit_i(t))(|v_{i,new} - v_{i,max}|)^{\lambda_{max}} + \beta_{avg}(sit_i(t))(|v_{i,new} - v_{i,avg}|)^{\lambda_{avg}} + \\ & \beta_{expl}(sit_i(t))explosion_i \end{aligned}$$

$\beta_{occ}, \beta_{dir}, \beta_{dest}, \beta_{angle}, \beta_{wall}, \beta_{vel}, \beta_{max}, \beta_{avg}, \beta_{expl} > 0$  – весовые коэффициенты, выступающие в качестве параметров модели и меняющие свои значения в зависимости от статуса ситуации.

$occupation_i$  отражает значимость присутствия других агентов в выбранном секторе  $\vec{d}_{i,new}$ , другими словами,

$$occupation_i = \sum_{j=1}^N I_{ij} e^{-\gamma_1 \|\vec{r}_{i,new} - \vec{r}_j\|},$$

где  $I_{ij}$  равно единице, если  $j$ -ый агент находится в секторе  $\vec{d}_{i,new}$ , и нулю иначе;  $\|\vec{r}_{i,new} - \vec{r}_j\|$  – расстояние между  $j$ -ым агентом и новым положением  $i$ -ого;  $\gamma_1$  – нормирующий коэффициент. Чем меньше количество агентов в выбранном секторе, тем меньше значение  $occupation_i$ . Также значение монотонно убывает в зависимости от степени удаленности других агентов от  $i$ -ого агента в секторе.

$direction_i$  отражает угол между единичными векторами  $\vec{d}_{i,new}$  и  $\vec{d}_i$ , другими словами,

$$direction_i = \arccos(\vec{d}_{i,new}, \vec{d}_i),$$

где  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение векторов. Данный показатель отражает нежелание агента менять направление своего движения.

$destination_i$  отражает угол между единичными векторами  $\vec{d}_{i,new}$  и  $\vec{D}_i$ , другими словами,

$$destination_i = \arccos(\vec{d}_{i,new}, \vec{D}_i).$$

Данный показатель отражает желание агента двигаться напрямую к точке выхода.

$angle_i$  пропорционален сумме углов между единичными векторами  $\vec{d}_i$  и  $\vec{d}_j$ , другими словами,

$$angle_i = \sum_{j=1}^N I_{ij} \alpha_{ij} e^{-\gamma_2 \|\vec{r}_{i,new} - \vec{r}_j\|},$$

где  $\alpha_{ij} = \arccos(\vec{d}_i, \vec{d}_j)$  – угол между направлениями движения агентов;  $\gamma_2$  – нормирующий коэффициент. Чем более сонаправлено двигаются агенты, тем меньше значение  $angle_i$ . В то же время значение монотонно убывает в зависимости от степени удаленности других агентов от  $i$ -го агента в выбранном секторе.

$wall_i$  зависит от минимального расстояния от агента до стен, другими словами,

$$wall_i = e^{-\gamma_3 \Delta_{i,new}},$$

где  $\Delta_{i,new}$  – минимальное из расстояний от нового положения агента до стен;  $\gamma_3$  – нормирующий коэффициент. Очевидно, что чем дальше агент от стен, тем меньше  $wall_i$ .

$(|v_{i,new} - v_{i,comf}|)^{\lambda_{vel}}$  отражает отклонение скорости агента от его комфортабельной скорости,  $\lambda_{vel}$  – нормирующий коэффициент. Данный фактор дает свой вклад только при  $sit_i = 0$ .

$(|v_{i,new} - v_{i,max}|)^{\lambda_{max}}$  отражает разницу между новой скоростью и максимальной скоростью бега,  $\lambda_{max}$  – нормирующий коэффициент. Данный фактор дает свой вклад только при  $sit_i \neq 0$ .

$(|v_{i,new} - v_{i,avg}|)^{\lambda_{avg}}$  отражает разницу между новой скоростью и средней скоростью агентов в секторе,  $\lambda_{avg}$  – нормирующий коэффициент,

$$v_{i,avg} = \frac{\sum_{j=1}^N I_{ij} v_j e^{-\gamma_4 \|\vec{r}_{i,new} - \vec{r}_j\|}}{\sum_{j=1}^N I_{ij}},$$

где  $\gamma_4$  – нормирующий коэффициент.

$explosion_i$  зависит от расстояния от агента до взрыва, другими словами,

$$explosion_i = e^{-\gamma_5 dist_{i,expl}},$$

где  $dist_{i,expl}$  – расстояние от нового положения агента до взрыва;  $\gamma_5$  – нормирующий коэффициент. Чем дальше агент от взрыва, тем меньше  $explosion_i$ . Данный фактор дает свой вклад только при  $sit_i \neq 0$ .

Система принятия решений агента основана на выборе той альтернативы, при которой достигается минимальное значение описанного функционала, т.е.

$$(v_{i,new}, \vec{d}_{i,new}) = \operatorname{argmin} M_i.$$

#### 4. Программная реализация

Ввиду того, что описанная модель сопряжена со сложной как временной, так и пространственной динамикой, то реализация такой модели должна быть осуществлена в системе имитационного моделирования. Сравнение характеристик современных систем имитационного моделирования представлено на рис.2.

Необходимость использования дискретно-событийного моделирования для реализации процесса поочередного принятия решений, необходимость наличия анимации движения агентов, а

также использование методов агентного моделирования обуславливают выбор пакета AnyLogic в качестве среды разработки модели.

Также стоит отметить, что в среде AnyLogic имеется собственная встроенная библиотека пешеходов с неким законом движения агентов. Тем не менее, для реализации описанной ранее модели был разработан новый тип агента, чья система принятия решений основана на минимизации функционала  $M_i$ . При этом разработка модели в среде AnyLogic, как и само программное обеспечение, реализованы на языке Java. В частности, можно преобразовать разработанный программный комплекс в Java-апплет, расположенный на серверной стороне, который будет интерактивно выполняться в веб-обозревателе клиентского компьютера, что позволит обеспечить удаленный доступ к модели без необходимости разворачивания и настройки решения на конкретной машине.

Также важной особенностью среды AnyLogic является наличие широкого спектра инструментов для разработки пользовательского интерфейса, что позволяет значительно упростить и сделать более понятным для конечного пользователя как процесс задания начальных параметров, так и сам процесс моделирования. При этом, благодаря интеграции решения с базой данных, удастся преобразовать плоскую анимацию движения агентов в режим 3D. При этом внутренние процессы сериализации и синхронизации, встроенные в AnyLogic, позволяют добиться высокой скорости расчетов и моделирования движения агентов на стандартном персональном компьютере даже в условиях высокой сложности самой модели.

Система моделирования	Производитель ПО	Приложения	Моделирующая среда и поддержка			
			Графическая конструкция ИМ	Авторское моделирование, программирование моделей	Анимация (в реальном времени)	Поддержка анализа результатов
ARENA	System Modeling Corporation	Производство, анализ бизнес-процессов, дискретное моделирование	Блок-схемы	+	+	+
EXTEND	Imagine That, Inc.	Стратегическое планирование, бизнес-моделирование	Компоновочные блоки, непрерывные и дискретные модели	+ язык Modl	+	Анализ чувствительности
GPSS/H-PROOF	Wolverine Software Corporation	Общего назначения, производство, транспорт и др.	Блок-схемы	+	+	ANOVA
IThINK ANALYST	High Performance System, Inc.	Управление финансовыми потоками, реинжиниринг предприятий, банков, инвестиционных компаний и др.	CASE-средства, имитационное моделирование, потоковые диаграммы	+	+	Анализ чувствительности
PROCESS MODEL	PROMODEL Corporation	Общее производство, реинжиниринг	Блок-схемы, дискретное моделирование	-	-	+
SIMUL8	Visual Thinking International	Универсальное средство имитации дискретных процессов	-	Объектно-ориентированное программирование	+	+
TAYLOR SIMULATION SOFTWARE	F&H Simulation Inc.	Производство, стоимостный анализ	Блок-схемы, дискретное моделирование	-	+	+
WITNESS	Lanner Group Inc.	Бизнес-планирование, производство, финансы	+	+	+	+ Блок оптимизации
VENSIM	Ventana Systems	Модели системной динамики	Потоковые диаграммы	-	-	-
POWERSIM	Powersim Co.	Непрерывное моделирование	Потоковые диаграммы	-	+	-
DYNAMO	Expectation Software	Модели системной динамики вычислительного типа	Блок-схемы	-	-	-
AnyLogic	XJ Technologies	Системная динамика, Дискретно-событийное, агентное моделирование	Потоковые и UML диаграммы, дискретное моделирование	Java	2D	Оптимизация OptQuest

Рис. 2. Сравнение характеристик современных систем имитационного моделирования

С целью хранения входных параметров агентной модели, задаваемых пользователем, а также для хранения динамики характеристик агентов в процессе моделирования, была разработана база данных (далее, БД) под управлением СУБД (система управления базы данных) MS SQL Server. Выбор СУБД был обоснован, с одной стороны, необходимостью развертывания решения на компьютере под управлением ОС Windows, а с другой, такой критически важной характеристикой, как скорость обработки массовых транзакций, которые сопровождают процесс моделирования.

Сохранение в БД динамики состояния агента позволяет в последствии воссоздать движение агента по координатам и другим характеристикам и провести кластерный анализ. Также подобный подход упрощает дальнейший анализ результатов моделирования.

Помимо этого, немало важным фактором при выборе СУБД, являлась возможность осуществления бесшовного соединения системы AnyLogic с MS SQL Server посредством JDBC драйвера. В итоге, построенная архитектура решения позволяет сохранять пользовательские настройки, реплицировать и восстанавливать состояния агентов и проводить различный анализ итогов моделирования для каждого прогона в среде моделирования.

Структура БД представляет из себя набор из двенадцати таблиц, представленных на рис. 3.

Структурно разработанная агентная модель состоит из следующих классов:

- Активные классы модели
  - Пользовательский интерфейс (Simulation);
  - Основной класс (Main);
  - Агент (Person);
  - Взрыв (Explosion).
  
- Вспомогательные классы модели
  - Кластеризация (Cluster);
  - Столкновения (Collision);
  - Принятие решения (Decision);
  - Точки пространства (MyPoint);
  - Векторы пространства (MyVector);
  - Возвращаемый результат (Result).

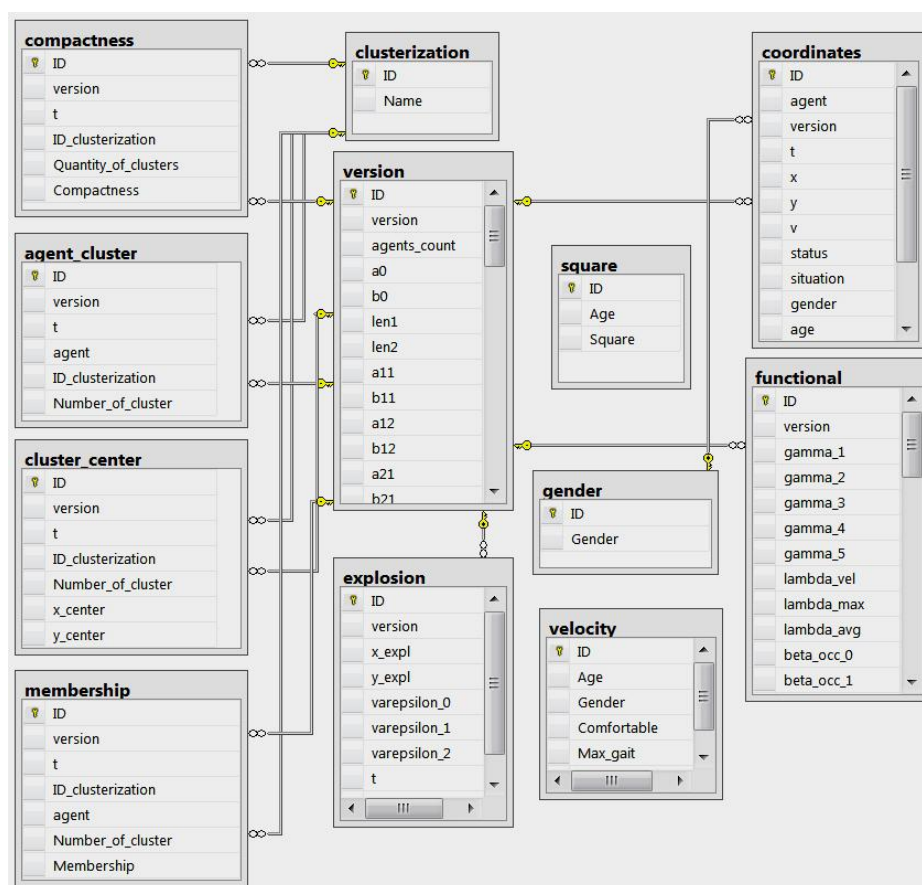


Рис. 3. Схема БД

*Пользовательский интерфейс (Simulation)*

Данный класс предназначен для задания входных параметров пользователем. Меняя значения параметров в текстовых полях, пользователь имеет возможность менять как характеристики помещения и количества агентов, так и параметры, отвечающие за систему принятия решений



агента. Таким образом, можно, с одной стороны, подобрать значения параметров для наиболее достоверной динамики агентов и тем самым провести калибровку модели, а с другой, появляется возможность варьировать психофизические аспекты поведения агентов для подбора тех значений параметров, которые обеспечат максимизацию количества спасенных агентов. Другими словами, появляется возможность разработки системы руководств к действию для агентов, попавших в ЧС, с целью повышения вероятности выживания.

В рамках каждого текстового поля, управляемого пользователем, встроена проверка как допустимости вводимых данных, так и каскадное обновление зависимых полей. При завершении работы класса *Simulation* происходит передача входных параметров моделирования, введенных пользователем, в класс *Main*, а также проверка непротиворечивости БД на предмет уникальности текущей версии прогноза модели.

#### *Основной класс (Main)*

Данный класс является средой исполнения всех остальных классов и содержит в себе как процесс отрисовки помещения, так и процесс движения и взаимодействия агентов. Также в классе *Main* осуществляется управление появлением взрыва и переходом к окну статистики.

#### *Класс агента (Person)*

Данный класс реализует популяцию агентов-пешеходов. В качестве логики работы данного класса была выбрана схема синхронизации движения агентов, в рамках которой процесс моделирования движения разбивается на шаги, а действия выполняются в следующем порядке:

1. Выполняется Действие перед выполнением шага класса *Main*.
2. У всех агентов выполняются Действия перед выполнением шага (в каком-то определенном порядке).
3. В том же самом порядке у всех агентов выполняются Действия на шаге.
4. Выполняется Действие после выполнения шага класса *Main*.

#### *Класс взрыва (Explosion)*

Класс *Explosion* задает визуализацию взрыва, а также его геометрические характеристики – радиусы концентрических окружностей поражения агентов, которые в момент запуска класса *Main* получают свои фактические значения.

#### *Класс кластеризации (Cluster)*

Данный класс предназначен для осуществления динамической кластеризации. Сами алгоритмы реализованы также на языке Java и представляют из себя отдельный программный пакет, импортированный в основную модель.

#### *Класс столкновений (Collision)*

Данный класс предназначен для обработки события столкновения агентов в процессе моделирования. Класс представлен несколькими методами: регистрация факта взаимодействия и расчет результата взаимодействия агентов, согласно законам сохранения импульса и кинетической энергии.

#### *Класс принятия решения (Decision)*

Данный класс реализует процесс принятия решения агентом. Результатом работы является единственный вектором нового направления движения агента, а также его новая скорость. Методы данного класса рассчитывают как возможность перехода в тот или иной сектор, так и компоненты функционала  $M_i$ . Завершающий метод класса высчитывает аргументы, минимизирующие функционал, и возвращает соответствующие значения.

#### *Класс точек пространства (MyPoint)*

Данный класс предназначен для описания точек пространства как пары значений координат точки. Также в рамках данного класса реализован метод, проверяющий отрезки на факт пересечения. Данный метод используется в процессе проверки выхода агента за пределы помещения.

*Класс векторов (MyVector)*

В этом классе реализовано векторное исчисление пространства. Помимо непосредственного задания векторов различными конструкторами, данный класс реализует такие методы, как скалярное произведение векторов, косое произведение, нормирование вектора, растяжение, поворот вектора, вычисление угла между векторами и т.д.

*Класс результатов (Result)*

Данный класс предназначен для описания результатов, возвращаемых вспомогательными классами. Поля данного класса представлены единичным вектором нового направления движения агента, а также его новой скоростью. Возвращать данный класс может как вектор целиком, так и его отдельные компоненты.

**5. Кластерный анализ**

С целью выявления устойчивых групп агентов в основную модель был импортирован программный пакет динамической кластеризации. В каждый момент модельного времени на множестве всех агентов проводится кластеризация одновременно по трем алгоритмам [1, 6, 8]:

1. Метод k-средних (k-means).
2. Иерархический метод.
3. Метод неточной кластеризации С-средних (Fuzzy Cmeans).

Ввиду того, что для указанных алгоритмов в качестве входного параметра выступает количество кластеров, чье значение, с учетом частоты проведения анализа и вариативности количества агентов и геометрии активного пространства, не поддается никакой оценке, то для вычисления оптимального количества кластеров использовался известный критерий компактности [7]:

$$S(U, c) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n \mu_{ik}^2 \|x_k - v_i\|^2}{\min_{i,j} \|v_i - v_j\|^2},$$

$$c = \operatorname{argmin}_c \{ \min_{\Omega_c} S(U, c) \},$$

где  $U$  – множество всех агентов,  $i, j$  – индекс кластеров,  $k$  – индекс агентов в кластере,  $\mu_{ik}$  – вероятность принадлежности  $k$ -ого агента  $i$ -ому кластеру,  $x_k$  – координата  $k$ -ого агента,  $v_i$  – координата центра  $i$ -ого кластера,  $\Omega_c$  – всевозможные разбиения  $U$  на  $c$  кластеров.

С учетом высокой степени перестроения кластеров (распад имеющихся кластеров и соединения агентов в новые), а также максимального “правдоподобия”, в качестве базового алгоритма был выбран алгоритм нечеткой кластеризации (см. рис. 4). Среди исследуемых характеристик кластерного анализа отдельно стоит отметить:

- a) Динамика количества кластеров.
- b) Динамика центров кластеров.
- c) Динамика диаметров кластеров.
- d) Количество агентов в кластерах.

Также важно отразить предпочтения агента относительно различных кластеров:

- a) Мера принадлежности агента к кластеру.
- b) Частота выбытия и примыкания к кластеру.

Также необходимо отметить, что оценки плотности и диаметров кластеров играют важную роль в процессе регистрации появления эффекта турбулентности и дальнейшего развития волн сжатий. Именно кластерный анализ рассматривается автором как основной инструмент дальнейшего анализа и выявления условий как возникновения, так и разрушения волн сжатия, которые постоянно наблюдаются в процессе экспериментов.

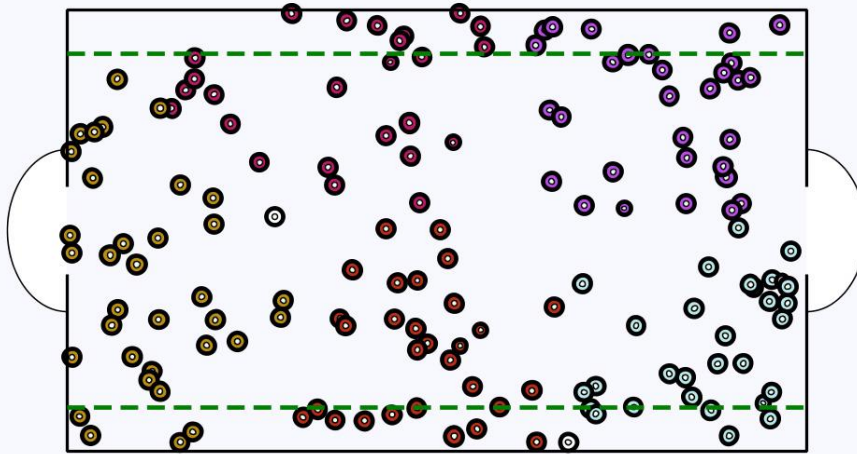


Рис. 4. Пример кластеризации

## 6. Основные результаты

Приведенные ниже результаты были получены при значениях  $m_{vert} = m_{hor} = 1$ . При этом необходимо отметить, что программная реализация допускает задание начального распределения  $F_{K_i}$  из четырех альтернатив: равномерное распределение, треугольное распределение (Симпсона), нормальное распределение (Гаусса) и распределение Лапласа (двойное экспоненциальное), каждое из которых ограничено размерами помещения. Все распределения, кроме равномерного, требуют задание параметров, первый из которых соответствует математическому ожиданию, а второй определяет дисперсию (для треугольного распределения дисперсия не требуется). Каждое распределение задается независимо относительно своих параметров вдоль обеих осей. Задание математического ожидания в центре помещения видится естественным, но сложность проведения экспериментов при непрерывном изменении дисперсии и неясность пределов варьирования влекут необходимость параметризации данных параметров. Математическое ожидание было параметризовано таким образом, чтобы значение варьировалось от минус до плюс единицы при изменении вдоль линейного размера помещения, а значение равно нулю соответствовало центру помещения. Параметризация дисперсии была проведена таким образом, чтобы среднее квадратическое отклонение равно единице соответствовало шестой части линейного размера помещения по соответствующей оси (правило трех сигм) для нормального распределения и четверти размера помещения для распределения Лапласа. Эксперименты проводились при математическом ожидании равно нулю и среднем квадратическом отклонении равно единице.

Благодаря проведенному тесту Грэйнджера на причинность и проверке гипотезы F-тестом при количестве экспериментов  $n = 68$  и уровне значимости  $\alpha = 0,05$ , было получено следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Начальное количество кластеров является функцией количества агентов и начального распределения агентов, но не зависит от конфигурации активного пространства.

Результатом проведенного анализа t-критерием Стьюдента проверки гипотез при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  стало следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Динамика количества кластеров есть марковский процесс по отношению к параметрам взаимодействия агентов. Существуют моменты времени  $t^*, t^{**}$ , зависящие от количества агентов, конфигурации активного пространства и начальных распределений такие, что для  $t^* < t < t^{**}$  количество кластеров стационарно. С момента  $t^{**}$  количество кластеров уменьшается до двух.

При этом стоит отметить справедливость оценки суммы диаметров кластеров.

**Утверждение 3.** С момента  $t^*$  сумма диаметров кластеров является убывающей функцией по времени.

### Заключение

С использованием феноменологического подхода была формализована агентная модель поведения толпы в среде имитационного моделирования AnyLogic. В указанную модель был интегрирован модуль динамической кластеризации, с целью выявления устойчивых групп агентов и проведения анализа ряда характеристик возникающих кластеров.

### Литература

1. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности / С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
2. Аптуков А. М., Брацун Д. А., Люшнин А. В. Моделирование поведения паникующей толпы в многоуровневом разветвленном помещении // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5, № 3. – С. 491–508.
3. Бекларян А. Л., Акопов А. С. Моделирование поведения толпы на основе интеллектуальной динамики взаимодействующих агентов // Бизнес-информатика. – 2015. – Т. 31, №. 1. – С. 69–77.
4. Akopov A. S., Beklaryan L. A. Simulation of human crowd behavior in extreme situations // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2012. Vol. 79, No. 1. P. 121–138.
5. Antonini G., Bierlaire M., Weber M. Discrete choice models of pedestrian walking behavior // Transportation Research Part B. 2006. Vol. 40, No. 8. P. 667–687.
6. Bezdek C. J. Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms. Kluwer Academic Publishers Norwell, 1981. 256 p.
7. Chi Z., Yan H., Pham T. Fuzzy Algorithms: With Applications to Image Processing and Pattern Recognition. World Scientific, 2006. 225 p.
8. Hartigan J. A., Wong M. A. A K-Means Clustering Algorithm // Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics). 1979. Vol. 28, № 1. P. 100–108.
9. Helbing D., Farkas I., Vicsek T. Simulating dynamical features of escape panic // Nature. 2000. No. 407. P. 487–490.
10. Helbing D., Farkas I., Molnar P., Vicsek T. Simulation of pedestrian crowds in normal and evacuation situations // Pedestrian and evacuation dynamics. 2002. No. 21. P. 21–58.
11. Mintz A. Non-adaptive group behavior // Journal of Abnormal Psychology. 1951. Vol. 46, No. 2. P. 150–159.
12. Moussaïda M., Helbing D., Theraulaza G. How simple rules determine pedestrian behavior and crowd disasters // PNAS. 2011. Vol. 108, No. 17. P. 6884–6892.

### References

1. Aivazyan S. A., Bukhshtaber V. M., Enyukov I. S., Meshalkin L. D. *Prikladnaya statistika: Klassifikatsiya i snizhenie razmernosti* [Applied Statistics: Classification and dimension reduction]. Moscow: Finance and statistics, 1989. 607 p.
2. Aptukov A. M., Bratsun D. A., Lyushnin A. V. Modelirovanie povedeniya panikuyushchei tolpy v mnogourvnevom razvetvlennom pomeshchenii [Modeling of behavior of panicked crowd in multi-floor branched space]. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie – Computer Research and Modeling*. 2013. No. 5 (3). Pp. 491–508.
3. Beklaryan A. L., Akopov A. S. Modelirovanie povedeniya tolpy na osnove intellektual'noi dinamiki vzaimodeistvuyushchikh agentov [Simulation of human crowd behavior based on intellectual dynamics of interacting agents]. *Biznes-informatika – Business Informatics*. 2015. No. 31 (1). Pp. 69–77.
4. Akopov A. S., Beklaryan L. A. Simulation of human crowd behavior in extreme situations. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2012. V. 79. No. 1. Pp. 121–138.
5. Antonini G., Bierlaire M., Weber M. Discrete choice models of pedestrian walking behavior. *Transportation Research. Part B*. 2006. V. 40. No. 8. Pp. 667–687.
6. Bezdek C. J. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Kluwer Academic Publishers Norwell, 1981. 256 p.
7. Chi Z., Yan H., Pham T. *Fuzzy Algorithms: With Applications to Image Processing and Pattern Recognition*. World Scientific, 2006. 225 p.
8. Hartigan J. A., Wong M. A. A K-Means Clustering Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*. 1979. V. 28. No. 1. P. 100–108.

9. Helbing D., Farkas I., Vicsek T. Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*. 2000. No. 407. Pp. 487–490.
10. Helbing D., Farkas I., Molnar P., Vicsek T. Simulation of pedestrian crowds in normal and evacuation situations. *Pedestrian and evacuation dynamics*. 2002. No. 21. Pp. 21–58.
11. Mintz A. Non-adaptive group behavior. *Journal of Abnormal Psychology*. 1951. Vol. 46. No. 2. Pp. 150–159.
12. Moussaïda M., Helbing D., Theraulaza G. How simple rules determine pedestrian behavior and crowd disasters. *PNAS*. 2011. V. 108. No. 17. Pp. 6884–6892.

УДК [574.4+631.43+631.6+626.8]:517.9  
doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-54-61

## МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АССИМИЛЯТОВ И ОПТИМАЛЬНОГО РОСТА РАСТИТЕЛЬНОГО ПОКРОВА

© **Воротынцев Александр Васильевич**

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Вычислительного центра им. А. А. Дородницына РАН  
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, 40, e-mail: avv\_alexv@mail.ru

Формулируется модель роста биомасс четырех органов растительного покрова, сопряженная с моделью переноса тепла и влаги в покрове и почве с учетом баланса энергии. С помощью ростовых функций исследуется задача рационального распределения ассимилятов фотосинтеза и оптимального роста биомасс для максимизации конечного значения биомассы репродуктивного органа растения.

**Ключевые слова:** моделирование, растительный покров, распределение ассимилятов.

## THE MODEL OF ASSIMILATES ALLOCATION AND OPTIMAL GROWTH OF PLANT COVER

**Aleksander V. Vorotyntsev**

PhD, Researcher, A. A. Dorodnitsyn RAS Computing center  
40 Valilova st., Moscow 119333, Russia

It was formulated the growth model of four plant organs biomass, conjugated with the model of heat and moisture transfer in plant cover and soil taking into account energy balance. Through the growth functions we studied the problem of photosynthesis assimilates rational distribution and optimal growth of biomass to maximize the final value of plant reproductive organ biomass.

**Keywords:** modeling, plant cover, assimilates allocation.

### Введение

Моделирование динамики роста биомассы органов растений совместно с переносом тепла и влаги в системе «почва – растительный покров» – одна из базовых задач описания функционирования агроценозов и их урожайности, [1; 5; 7]. Особый интерес представляют исследования механизмов адаптации растительных сообществ с помощью вариационных методов. В статье на основе модели роста биомасс растительного покрова в условиях дефицита влаги исследуется распределение ассимилятов фотосинтеза по органам растения, максимизирующее биомассу репродуктивных органов. Полученная стратегия распределения ассимилятов приводит к магистральному сбалансированному характеру роста биомасс, структурирующему и упрощающему модель.

### 1. Модель переноса влаги и тепла в растительном покрове

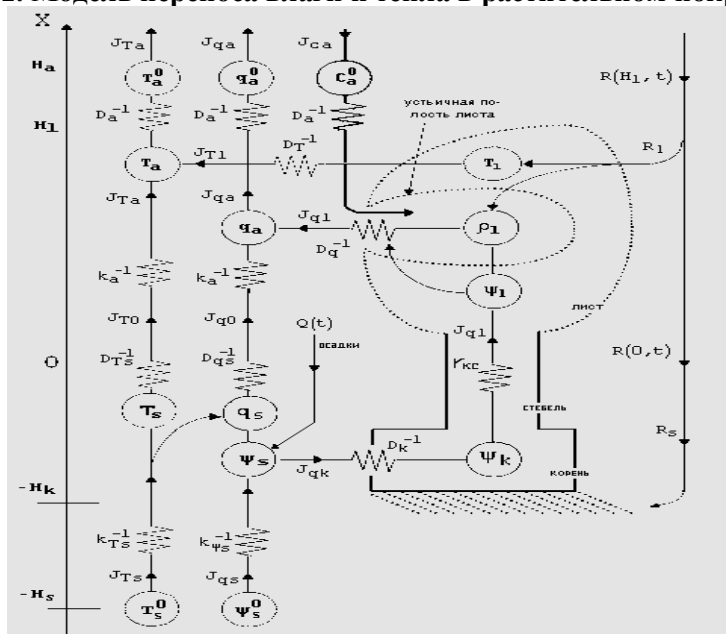


Рис. 1. Схема переноса тепла, влаги и  $CO_2$  в РП

Приведем систему уравнений модели переноса, описанной в [1–5]. В слое  $0 \leq x \leq H_l$  растительного покрова (РП) и в корнеобитаемом слое  $-H_s \leq x \leq 0$  почвы рассматриваются две подсистемы уравнений (1)–(4) для температуры воздуха  $T_a$ , листьев  $T_l$ , концентрации водяного пара в межлиственном воздухе  $q_a$ , в устьичных полостях листьев  $q_l$ :

$$J_{Ta} = -c_p k_a \partial T_a / \partial x, \quad J_{qa} = -k_a \partial q_a / \partial x, \quad 0 \leq x \leq H_l; \quad (1)$$

$$c_p \partial T_a / \partial t = -\partial J_{Ta} / \partial x + f_{Tl}, \quad \partial q_a / \partial t = -\partial J_{qa} / \partial x + f_{ql}, \quad (2)$$

$$f_{Tl} = c_p D_T S_l (T_l - T_a) p_l, \quad f_{ql} = D_q S_l (q_l - q_a) p_l, \quad (3)$$

$$f_{Tl} + \chi f_{ql} = \partial R_{ll} / \partial x; \quad (4)$$

и две подсистемы (5–7) для температуры  $T_s$  и водного потенциала  $\psi_s < 0$  почвы:

$$J_{Ts} = -c_p k_{Ts} \partial T_s / \partial x, \quad J_{\psi_s} = -k_{\psi_s} \partial \psi_s / \partial x, \quad -H_s \leq x \leq 0 \quad (5)$$

$$c_s \partial T_s / \partial t = -\partial J_{Ts} / \partial x, \quad c_{\psi} \partial \psi_s / \partial t = -\partial J_{\psi_s} / \partial x - f_{\psi_s}, \quad (6)$$

$$f_{\psi_s} = J_{ql} p_k + D_k S_k (\psi_s - \bar{\psi}_s) p_k; \quad (7)$$

а также подсистема для концентрации углекислого газа  $CO_2$

$$J_{ca} = -k_a \partial c_a / \partial x, \quad (8)$$

$$\partial c_a / \partial t = -\partial J_{ca} / \partial x + f_{cl}, \quad (9)$$

$$f_{cl} = D_c S_l (c_l - c_a) p_l, \quad (10)$$

с краевыми условиями:

$$J_{Ta} = c_p D_a (T_a - T_a^0), \quad J_{qa} = D_a (q_a - q_a^0), \quad x = H_l, \quad (11)$$

$$J_{ca} = D_a (c_l - c_a); \quad (12)$$

$$J_{Ta} = c_p D_{Ts} (T_s - T_a), \quad J_{qa} = D_{qs} (q_s - q_a), \quad x = 0, \quad (12)$$

$$J_{ca} = 0;$$

$$J_{Ta} + \chi J_{qa} - J_{Ts} = R(0, t), \quad -J_{\psi_s} + J_{qa} = Q(t), \quad x = 0, \quad (13)$$

$$T_s = T_s^0, \quad \psi_s = \psi_s^0, \quad x = -H_s. \quad (14)$$

Транспорт воды в растениях и испарение ими влаги  $J_{ql}$  (транспирация) регулируется водным потенциалом листьев  $\psi_l$ , их устьичным сопротивлением  $r_{st}$  и описывается нелинейными

выражениями:

$$J_{ql} = \int_0^{H_l} f_{ql} dx, \quad J_{ql} = D'_k (\bar{\psi}_s - \psi_l), \quad \text{при } \psi_m < \psi_l < \bar{\psi}_s < 0, \quad (15)$$

где  $\bar{\psi}_s = \int_{-H_k}^0 \psi_s p_k dx$ ,  $\mu_l \equiv \psi_l / \psi_m$ ,  $1/D_q = 1/D_T + r_{st}$ ,  $1/D'_k = r_{kc} + 1/(D_k S_k)$ ,

$$r_{st} = r_{s0} (1 - \delta_l \mu_l) (1 - \mu_l)^{-1}, \quad 0 < \mu_l < 1, \quad \delta_l > 0; \quad \bar{\mu}_s = \bar{\psi}_s / \psi_m; \quad (16)$$

$J_{ql} = 0$ , при  $\bar{\psi}_s \leq \psi_m < 0$ .

Подсистема уравнений, описывающая распределение углеводов, преобразование поглощенного  $CO_2$  в углеводы, затем в биомассу органов и рост биомассы листьев ( $i=l$ ), корней ( $i=r$ ), репродуктивных органов ( $i=R$ ) и стеблей ( $i=s$ ), имеет вид [6,7]:

$$\Delta m_i = \rho_i(t) \Phi' \Delta t - \tilde{R}'_i(T_i) m_i \Delta t - \tilde{R}_i \Delta m_i, \quad (17)$$

или

$$\dot{m}_i = \rho_i(t) \frac{\Phi'}{1 + \tilde{R}_i} - R'_i m_i, \quad \sum \rho_i(t) = 1, \quad \rho_i(t) \geq 0, \quad i \in \{l, r, R, s\}, \quad (18)$$

где

$$\Phi' = S_l \tau \Phi_0, \quad R'_i = \tilde{R}'_i(T_i) (1 + \tilde{R}_i), \quad A_1 = \varepsilon_\phi \sigma(T_l), \quad \Phi_0 = \frac{A_1}{(\alpha I_\phi)^{-1} + r_c c_l^{-1}}, \quad (19)$$

$$r_1 = S_l D_a^{-1} + D_c^{-1}, \quad r = A_1 r_1 + r_c. \quad (20)$$

Здесь  $J_{Ta}(x,t)$ ,  $J_{qa}(x,t)$ ,  $J_{ca}(x,t)$  – потоки тепла, водяного пара и углекислого газа  $CO_2$  в межлиственном воздухе,  $J_{Ts}(x,t)$ ,  $J_{\psi s}(x,t)$  – потоки тепла и воды в почве;  $\bar{\psi}_s(t)$  – усредненный водный потенциал корнеобитаемого слоя почвы,  $\psi_l(t)$  – водный потенциал листьев.

В системе (1)–(20) функции  $J_{Ta}(x,t)$ ,  $J_{qa}(x,t)$ ,  $J_{ca}(x,t)$ ,  $J_{Ts}(x,t)$ ,  $J_{\psi s}(x,t)$ ,  $J_{ql}(t)$ ,  $T_a(x,t)$ ,  $T_l(t)$ ,  $T_s(x,t)$ ,  $q_a(x,t)$ ,  $c_a(x,t)$ ,  $\psi_l(t)$ ,  $\psi_s(x,t)$ , являются искомыми. Остальные величины – заданные функции и константы.  $R_{ll}(x,t)$  – заданная поглощенная слоем  $(0,x)$  длинноволновая и коротковолновая радиация,  $R(0,t)$  – радиационный баланс у поверхности почвы;  $R_l(t) = R_{ll}(H_l,t)$  – радиация, поглощенная покровом,  $R_s = R(0,t) + J_{Ts}$  – энергия, поглощенная верхним слоем почвы;  $S_l(t)$ ,  $S_k(t)$  – площадь поверхности соответственно листьев и корней РП на единицу поверхности почвы;  $S_l p_l(x,t)$ ,  $S_k p_k(x,t)$  – плотность листовой и всасывающей корневой поверхности РП;  $D_q(\psi_l)$ ,  $D_c(\psi_l)$  – коэффициенты проводимости для водяного пара и  $CO_2$  на границе лист – воздух.  $T_a^0$ ,  $q_a^0$ ,  $c_a^0$  и  $T_s^0$ ,  $\psi_s^0$  – функции времени, измеряемые на высоте метеобудки  $H_a > H_l$  над покровом и глубине  $-H_s$  почвы;  $Q(t)$  – осадки;  $\rho(T)$  – насыщенная влажность воздуха при температуре  $T$ ;  $c_p$ ,  $c_s$  – теплоемкости воздуха и почвы;  $k_a(x)$ ,  $k_{Ts}(x)$  – коэффициенты турбулентной проводимости воздуха и теплопроводности почвы,  $k_{\psi s}(\psi_s)$  – влагопроводность почвы;  $c_\psi = c_\psi(\psi_s)$ ;  $\chi$  – теплота парообразования;  $c_l$  – концентрация  $CO_2$  в хлоропластах листьев,  $D_T$ ,  $D_k$ ,  $D_a$ ,  $D_{Ts}$ ,  $D_{qs}$ , – постоянные коэффициенты проводимости.

Продукты  $\Phi' \Delta t$  фотосинтеза распределяются по органам растения долями  $\rho_i(t)$  и используются для роста  $\Delta m_i$  органов; при этом часть углеводов расходуется на дыхание поддержания  $\tilde{R}'_i(T_i) m_i \Delta t$  и дыхание роста  $\tilde{R}_i \Delta m_i$ . Температурный фактор  $\sigma(T_i)$  и константы  $\varepsilon_\phi$ ,  $\alpha$ ,  $r_c$  определяют влияние потока фотосинтетически активной радиации (ФАР) и концентрации  $c_l$  на скорость  $\Phi_0$  преобразования  $CO_2$  в ассимиляты единицей поверхности листа.

Дифференциальные уравнения систем связаны алгебраическими выражениями (4), (10), описывающими балансы энергии в межлиственном воздухе и на поверхности почвы.

Введем обозначения:



$$\begin{aligned}
 d_a(x,t) &= \rho(T_a) - q_a, \quad d_s(t) = \rho(T_s(0,t)) - q_s(t), \quad (21) \\
 d_a^0 &= \rho(T_a^0) - q_a^0(t), \quad \rho(T) = \rho(T_1) + \delta(T - T_1), \\
 k(x) &= \frac{k_a(x)}{1 + \delta\chi/c_p}, \quad G = \frac{1}{1 + c_p/(\delta\chi)}, \quad G_l = G(1 - b_l), \quad G_s = G(1 - b_s); \\
 \frac{1}{D_{ak}} &= \int_0^{H_l} \frac{d\xi}{k_a(x)}, \quad \frac{1}{D'_{ak}} = \frac{\delta\chi}{c_p D_{ak}}, \quad \frac{1}{D'_{Hk}} = \frac{1}{D_{ak}} + \frac{1}{D'_{ak}} = \int_0^{H_l} \frac{d\xi}{k(\xi)}, \quad \frac{1}{D'_{Ta}} = \frac{\delta\chi}{c_p D_a}, \quad \frac{1}{D'_a} = \frac{1}{D_a} + \frac{1}{D'_{Ta}} \\
 \frac{1}{D'_{Ts}} &= \frac{\delta\chi}{c_p D_{Ts}}, \quad \frac{1}{D'_T} = \frac{\delta\chi}{c_p D_T S_l}, \quad \frac{1}{D'_q} = \frac{1}{D_q S_l}, \quad \frac{1}{D'_l} = \frac{1}{D'_q} + \frac{1}{D'_T}, \quad \frac{1}{D'_s} = \frac{1}{D_{qs}} + \frac{1}{D'_{Ts}}, \\
 b_l &= G^{-1} \frac{D'_l}{D'_T}, \quad b_s = G^{-1} \frac{D'_s}{D'_{Ts}}, \quad D'_\Sigma = D'_a + D'_l + D'_s, \quad \bar{D}'_\Sigma = D'_a + D'_T + D'_s.
 \end{aligned}$$

Отметим, что введенные величины положительны, кроме, возможно,  $G_l$  и  $G_s$ . Очевидно,  $D'_l/D'_T < 1$ ,  $D'_s/D'_{Ts} < 1$ .

## 2. Приближенная модель переноса влаги и тепла

Для модели (1)–(11) получим приближенную модель при условиях

$$D'_\Sigma/D'_T \ll 1, \quad D'_s/D'_{Ts} \ll 1, \quad A\bar{D}'_\Sigma/D'_{Hk} \ll 1. \quad (22)$$

Здесь запись  $a \ll 1$  математически эквивалентна  $a \rightarrow 0$ ; она используется из-за своей большей физической содержательности.

Введем обозначения

$$\beta = (D'_a + D'_s)/D'_l, \quad b = D'_s/(D'_a + D'_s); \quad (23)$$

$$d_t = (\chi^{-1}GR_a^0 + D'_a d_a^0 + D'_s d_s^0)/(D'_a + D'_s); \quad (24)$$

$$J_{qa}^- = bJ_{qa}^+, \quad J_{qa}^+ = \chi^{-1}GR_a^0 + D'_a d_a^0; \quad (25)$$

$$J_{Ta}^+ = bJ_{Ta}^- + (1-b)R_a^0, \quad J_{Ta}^- = (1-G)R_a^0 - \chi D'_a d_a^0; \quad (26)$$

$$d_a^+ = d_t, \quad d_a^- = 0; \quad (27)$$

$$q_a^- = q_a^0 + J_{qa}^-/D_a, \quad q_a^+ = q_a^0 + b^{-1}(q_a^- - q_a^0); \quad (28)$$

$$T_a^- = T_a^0 + J_{Ta}^-/(c_p D_a), \quad T_a^+ = T_a^0 + b(T_a^- - T_a^0) + (1-b)R_a^0/(c_p D_a). \quad (29)$$

В [5] доказано, что в условиях (22) справедлива система

$$\partial\theta_w/\partial t = -\partial J_{\psi s}/\partial x - J_{ql}P_k, \quad J_{ql} = J_{qa}^+/(1+\beta), \quad -H_s \leq x \leq 0, \quad (30)$$

$$-J_{\psi s}|_{x=0} + J_{q0} = Q(t), \quad J_{q0} = \beta b J_{qa}^+/(1+\beta); \quad x = 0; \quad (31)$$

$$\psi_s = \psi_s^0; \quad x = -H_s;$$

где

$$J_{\psi s} = -k_{\psi s} \partial\psi_s/\partial x, \quad c_\psi = \frac{\partial\theta_w}{\partial\psi_s} < 0, \quad (32)$$

$$\beta = \frac{(D'_a + D'_s)r_{s0}}{S_l} \frac{1 - \delta_l \bar{\mu}_s}{1 - \bar{\mu}_s} + A_{kc} \frac{J_{qa}^+}{S_k} \frac{1}{1 - \bar{\mu}_s}; \quad A_{kc} = \frac{1 + D_k(r_{kc} S_k)}{-\psi_m D_k}, \quad (33)$$

при  $0 < \bar{\mu}_s < 1$ ,  $\beta = \infty$  при  $1 < \bar{\mu}_s$ .

Проинтегрируем (30) на отрезке  $[-H_k, 0]$  с учетом  $J_{qa} = J_{ql} + J_{q0}$ :

$$\dot{w} + J_{qa} - Q(t) - J_{\psi s Hk} = 0, \quad w = \int_{-H_k}^0 \theta_w dx = H_k \bar{\theta}_w, \quad J_{\psi s Hk} = J_{\psi s}|_{x=-H_k} \quad (34)$$

Чтобы сделать нижеследующие оценки примем два допущения. Во-первых, примем, что из определения  $c_\psi = \partial\theta_w/\partial\psi_s$  для графика  $\theta_w = \theta_w(\psi_s)$  основной гидрофизической характеристики-

ки (ОГХ) с достаточной точностью следует  $c_\psi = \partial \bar{\theta}_w / \partial \bar{\psi}_s$  для зависимости средней влажности  $\bar{\theta}_w$  от среднего потенциала  $\bar{\psi}_s$  по слою  $[-H_k, 0]$ . Дополнительно примем зависимость  $\bar{\psi}_s = A e^{-a_w \bar{\theta}_w}$ . Тогда (34), (33) преобразуется к виду:

$$\frac{d}{dt} \bar{\mu}_s = \alpha_w \bar{\mu}_s [J_{qa}(\bar{\mu}_s) - Q(t) - J_{\psi s Hk}], \quad \bar{\psi}_s = \bar{\mu}_s \psi_m, \quad \alpha_w = a H_k^{-1}, \quad (35)$$

$$J_{qa}(\bar{\mu}_s) = J_{qa}^+ \frac{1 + b\beta}{1 + \beta}, \quad \text{при } 0 < \bar{\mu}_s < 1, \quad J_{qa}(\bar{\mu}_s) = b J_{qa}^+, \quad \text{при } 1 < \bar{\mu}_s. \quad (36)$$

### 3. Модель фотосинтеза растительного покрова

Получим приближенную модель фотосинтеза растительного покрова, предположив, что в системе уравнений (8)-(10): а) концентрации  $c_a, c_l$ , фотосинтетически активная радиация  $I_\phi$  незначительно изменяются внутри растительного покрова; б) покров находится в состоянии квазистационарного равновесия в отношении  $c_l$ , т.е.  $\partial c_l / \partial t \approx 0$ .

С учетом сделанных предположений проинтегрируем (9)-(10) по высоте покрова на отрезке  $0 \leq x \leq H_l$ :

$$-\left[ J_{ca} \Big|_{x=H_l} - J_{ca} \Big|_{x=0} \right] + \int_0^{H_l} D_c S_l (c_l - c_a) p_l dx = 0.$$

С учетом (10)-(12) получим  $-D_a (c_a - c_a^0) + D_c S_l (c_l - c_a) = 0$ . Выразив отсюда  $c_a - c_l$  и подставив в (10), получим выражение для потока  $CO_2$ , поглощаемого листьями в единице объема РП:

$$f_{cl} = -\frac{D_a D_c S_l}{D_a + D_c S_l} (c_a^0 - c_l) p_l.$$

Интегрируя это выражение на  $0 \leq x \leq H_l$ , т.е. по высоте РП, получим величину  $S_l \Phi_0 CO_2$ , поглощенного столбом РП с единичным основанием за единицу времени. Отсюда величина  $CO_2$ , поглощенного единицей поверхности листа, будет равна  $\Phi_0 = (c_a^0 - c_l) / r_l$ . Подставляя  $c_l = c_a^0 - r_l \Phi_0$  в (19), получим для  $\Phi_0$  уравнение

$$\begin{aligned} r_l \Phi_0^2 - (c_a^0 + r \alpha I_\phi) \Phi_0 + A_1 c_a^0 \alpha I_\phi &= 0, \\ \Phi_0 &= \frac{A_1}{2(r - r_c)} \left[ c_a^0 + r \alpha I_\phi - \sqrt{(c_a^0 - r \alpha I_\phi)^2 + 4 r_c \alpha I_\phi c_a^0} \right] = \\ &= \frac{A_1 c_a^0}{r} \frac{2\nu}{1 + \nu + \sqrt{(1 - \nu)^2 + 4\nu r_c / r}}, \quad \nu = \frac{r \alpha I_\phi}{c_a^0}. \end{aligned} \quad (37)$$

Легко видеть,  $\Phi_0 \approx A_1 c_a^0 / r$  при  $\nu \rightarrow \infty$ , например, при  $I_\phi \rightarrow \infty$  или  $r \rightarrow \infty$ . Однако в дальнейшем для получения явных оценок в условиях дефицита почвенной влаги будем использовать следующие более сильные условия.

$$D_q^{-1} = \frac{r_{s0}}{1 - \bar{\mu}_s} \left[ (1 - \delta_l \bar{\mu}_s) + \frac{A_{kc}}{r_{s0}} \frac{J_{qa}^+}{D_a' + D_s'} \frac{S_l}{S_r} \right]. \quad (38)$$

В самом деле, (38) прямо следует из (33), (23), (22):

$$\beta = (D_a' + D_s') (1/D_q' + 1/D_T') \approx (D_a' + D_s') / (D_q S_l).$$

Пусть  $r_{mes} \ll D_q^{-1} \ll r_{cut}$ ,  $S_l D_a^{-1} \ll D_q^{-1}$ . Из (16) следует

$$\begin{aligned} D_q^{-1} = r_{st} + D_T^{-1} \approx r_{st}, \quad D_c^{-1} = 1 / (r_{st}^{-1} + r_{cut}^{-1}) + r_{mes} \approx D_q^{-1}, \\ r_l = S_l D_a^{-1} + D_c^{-1} \approx D_c^{-1} \approx D_q^{-1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, при выполнении приведенных выше приближенных равенств (39)

$$\Phi_0 \approx c_a^0 / r_l \approx c_a^0 D_q. \quad (40)$$

Введем обозначения

$$\lambda = \frac{m_k}{m_l}, \quad S_l = \beta_l m_l, \quad S_k = \beta_k m_k, \quad (41)$$

$$B_1 = 1 - \delta_l \bar{\mu}_s, \quad B_2 = \frac{A_{kc}}{r_{s0}} \frac{J_{qa}^+}{D'_a + D'_s} \frac{\beta_l}{\beta_k}, \quad \Phi_1 = \frac{\beta_l \tau c_a^0}{(1 + \tilde{R}_i)}, \quad \tilde{R}_i = \tilde{R},$$

$$G(\lambda, \bar{\mu}_s, t) = \frac{\lambda}{B_1 \lambda + B_2} (1 - \bar{\mu}_s), \quad F(\lambda, \bar{\mu}_s, t) = \frac{G(\lambda, \bar{\mu}_s, t)}{\lambda + 1} \Phi_1$$

Уточним (40):

$$r_i \approx D_q^{-1} = r_{s0} (1 - \bar{\mu}_s)^{-1} (B_1 \lambda + B_2) \lambda^{-1}, \quad (42)$$

$$\frac{\Phi'}{(1 + \tilde{R}_i)} = \frac{S_l \tau c_a^0}{(1 + \tilde{R}_i) r_i} = m_l \Phi_1 G(\lambda, \bar{\mu}_s, t).$$

Для приближения (40) модели фотосинтеза выпишем модель роста четырех биомасс  $m_i(t)$  растительного покрова и сопряженную с ней модель динамики усредненного водного потенциала  $\bar{\mu}_s$  корнеобитаемого слоя почвы:

$$\frac{d}{dt} m_i = \rho_i(t) m_l G(\lambda, \bar{\mu}_s, t) \Phi_1 - R'_i m_i, \quad i \in \{l, k, R, s\}; \quad (43)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\mu}_s = \alpha_w \bar{\mu}_s [J_{qa}(\bar{\mu}_s) - Q(t) - J_{\psi s H k}], \quad J_{qa}(\bar{\mu}_s) = J_{qa}^+ \frac{1 + b\beta}{1 + \beta}; \quad (44)$$

$$\sum \rho_i(t) = 1, \quad \rho_i(t) \geq 0, \quad \beta = \frac{(D'_a + D'_s) r_{s0}}{m_l \beta_l G(\lambda, \bar{\mu}_s, t)}, \quad \bar{\psi}_s = \bar{\mu}_s \psi_m, \quad 0 < \bar{\mu}_s < 1; \quad (45)$$

$$m_i(0) = m_i^0, \quad \bar{\mu}_s(0) = \bar{\mu}_s^0.$$

## 2. Рациональное распределение ассимилятов

Рост биомасс  $m_i(t)$  в (43) зависит от значений ростовых функций  $\rho_i(t)$ , моделирующих сложные механизмы распределения и транспорта ассимилятов в растении. Обычно функции  $\rho_i(t)$  определяются натурными измерениями.

Варьируя  $\rho_i(t)$  можно в значительной степени регулировать рост всех биомасс  $m_i(t)$  и, следовательно, величину биомассы  $m_R(t)$  репродуктивного органа в конце жизненного цикла растения  $[0, T]$ . Представляет интерес определить такие  $\rho_i(t)$ , при которых  $m_R(t)$  достигает максимума. Разумно предполагать, что такая структура распределения ассимилятов может возникнуть эволюционно у некоторых видов растений, например злаковых, подвергаемых отбору на максимальную урожайность репродуктивных органов.

Рассмотрим задачу выбора функций  $\rho_i(t)$ , максимизирующих для системы (43)–(45) на  $[0, T]$  функционал

$$m_R(T) \rightarrow \max \quad (46)$$

при ограничениях (45). Для частного случая, когда параметры внешней среды постоянны, в частности постоянны водный потенциал  $\bar{\mu}_s$  и температура листьев  $T_l$ , в [6] доказана теорема о магистрали для  $m_i(t)$  из (43). Опишем содержательную интерпретацию результатов формальной теоремы, представленных на рис. 2 и 3, где  $m_1 = m_l$ ,  $m_2 = m_k$ ,  $m_3 = m_R$ . Заметим, что оптимальные  $\rho_s(t) = 0$ , ибо из-за отсутствия в модели (43)–(45) учета архитектуры растения затраты ассимилятов на рост биомассы  $m_s$  стеблей оказываются непродуктивными. Также нетрудно видеть, что затраты ассимилятов на рост  $m_R$  продуктивны лишь на заключительном репродуктивном периоде  $[\tau_2, T]$ . Для начального вегетационного периода  $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$  рассмотрим функцию  $F(\lambda, \bar{\mu}_s, t)$  удельной фотосинтетической мощности покрова, приходящейся на единицу суммарной биомассы

$$F(\lambda, \bar{\mu}_s, t) = \frac{m_l}{m_l + m_k} G(\lambda, \bar{\mu}_s, t) \Phi_1 \quad (47)$$

Функция  $F$  имеет единственный максимум при  $\lambda^* = \sqrt{B_2/B_1}$  – решению уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F = \Phi_1(1 - \bar{\mu}_s) \frac{d}{d} \frac{\lambda}{(\lambda + 1)(B_1\lambda + B_2)} = \frac{-B_1\lambda^2 + B_2}{(\lambda + 1)^2(B_1\lambda + B_2)^2} = 0,$$

равный  $F^* = \Phi_1(1 - \bar{\mu}_s)(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2})^2$ . Оптимальные  $\rho_l^*(t)$  и  $\rho_k^*(t)$ , отвечающие  $F^*$ , есть решения системы

$$\dot{m}_l = \rho_l m_l G \Phi_1 - R m_l, \quad \dot{m}_k = \rho_k m_k G \Phi_1 - R m_k, \quad m_k = \lambda^* m_l, \quad \rho_l + \rho_k = 1.$$

Отсюда следует

$$\lambda^* = \sqrt{B_2/B_1}, \quad \rho_l^* = \frac{1}{1 + \lambda^*}, \quad \rho_k^* = \frac{\lambda^*}{1 + \lambda^*}, \quad \rho_R^* = 0, \quad \rho_s^* = 0, \quad t \in [\tau_1, \tau_2]. \quad (48)$$

Итак, период роста  $[0, T]$  разбивается на три фазы: начальную  $[0, \tau_1)$ , вегетативную  $[\tau_1, \tau_2)$  и репродуктивную  $[\tau_2, T]$ . На начальной фазе система стремится достичь сбалансированного отношения биомасс корней и листьев  $\lambda^*$ , направляя все ассимиляты на рост органа с недостаточной биомассой. Например, начальное значение  $\lambda^0 > \lambda^*$  на рис. 3 характеризуется недостаточной биомассой листьев  $m_l$ , поэтому все ассимиляты направляются на рост листьев, т.е.,

$$\rho_l^* = 1, \quad \rho_k^* = 0, \quad \rho_R^* = 0, \quad \rho_s^* = 0,$$

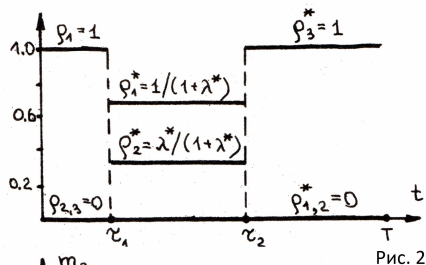


Рис. 2

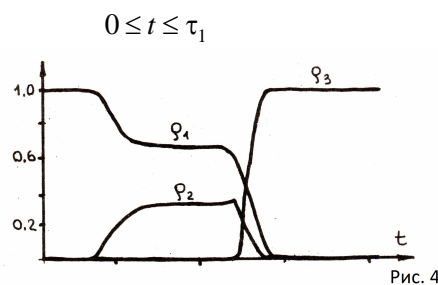


Рис. 4

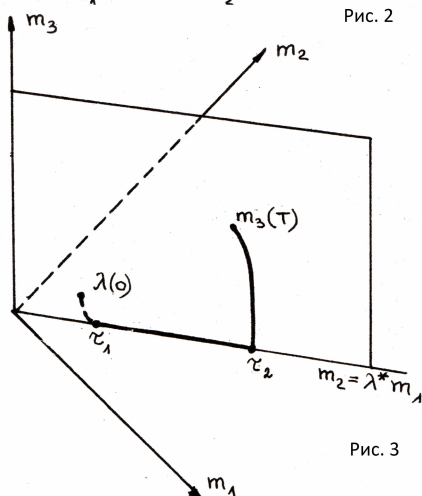


Рис. 3

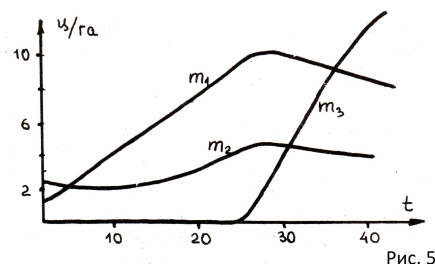


Рис. 5

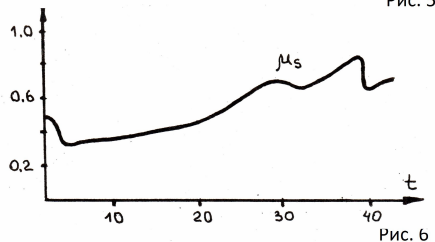


Рис. 6

Рис. 2–6. Оптимальное решение модели (43)–(46)

В момент  $\tau_1$  отношение  $\lambda(t)$  становится равным  $\lambda^*$ , система достигает магистрали  $m_2 = \lambda^* m_1$  и переходит в состояние сбалансированного роста. Это - вегетативная фаза, в течение которой выполняется (48). Скорость роста зависит от условий среды, в частности от усредненного водного потенциала  $\bar{\mu}_s$ .

С момента  $\tau_2$  начинается третья репродуктивная фаза, при которой все ассимиляты направляются на рост репродуктивной биомассы  $m_R$

$$\rho_l^* = 0, \quad \rho_k^* = 0, \quad \rho_R^* = 1, \quad \rho_s^* = 0, \quad \tau_2 \leq t \leq T.$$

В момент времени  $T$  система заканчивает рост с максимальным значением  $m_R(T)$ . На рис. 4–6 показаны численные решения задачи (43)–(46).

Таким образом, оптимальное сбалансированное распределение ассимилятов соответствует

максимизации удельной мощности фотосинтеза  $F(\lambda, \bar{\mu}_s, t)$ . Траектория магистрали обладает эффектом «притяжения» оптимальных траекторий с другими значениями начальных и внешних условий. Можно ожидать, что использование магистрали позволит лучше структурировать модель растительного покрова.

### Литература

1. Полуэктов Р. А. Динамические модели агроэкосистем. – Л.: Гидрометеиздат, 1991. – 312 с.
2. Воротынцев А. В. Модель переноса тепла и влаги в системе «почва – растение» с учетом баланса энергии // Вестник Бурятского государственного университета. – 2012. – № 1. – С. 107–111.
3. Воротынцев А. В. Исследование модели водно-теплового режима системы почва-растение-приземный слой воздуха // Сообщения по прикладной математике. – М.: Вычислительный центр РАН, 1991. – 53 с.
4. Воротынцев А.В. Исследование модели переноса тепла и влаги в системе почва-растение // Математическая биология и биоинформатика. Спецвыпуск по итогам конференции ЭкоМатМод-2011. – 2012. – Т. 7, № 1. – С. 45–53.
5. Воротынцев А.В. Приближенная модель переноса тепла и влаги в системе почва-растение с учетом баланса энергии. // Вестник Бурятского государственного университета. – Вып. 9(1) Математика, информатика. – 2014. – С. 22–26.
6. Две задачи оптимального управления для модели системы «почва – растение» / А. В. Воротынцев, Н. Л. Рогожина, И. А. Соколова, С. О. Степченкова. – М.: Вычислительный центр АН СССР. Сообщения по прикладной математике, 1988. – 38 с.
7. Бихеле З. Н., Молдау Х. А., Росс Ю. К. Математическое моделирование транспирации и фотосинтеза растений при недостатке почвенной влаги. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 223 с.

### References

1. Poluektov R. A. *Dinamicheskie modeli agroekosistem* [Dynamic models of agroecosystems]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1991. 312 p.
2. Vorotyntsev A. V. Model' perenosa tepla i vlagi v sisteme pochva-rastenie s uchetom balansa energii [The model of heat and moisture transfer in soil-plant system taking into account energy balance]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Vestnik of Buryat State University*. 2012. V. 1. Pp. 107–111.
3. Vorotyntsev A. V. *Issledovanie modeli vodno-teplovogo rezhima sistemy pochva-rastenie-prizemnyi sloi vozdukh* [Research of the model of moisture-heat regime of soil-plant-air system]. Moscow: RAS Computing center. Reports on applied mathematics, 1991. 53 p.
4. Vorotyntsev A. V. Issledovanie modeli perenosa tepla i vlagi v sisteme pochva-rastenie [Research of the model of heat and water transfer in soil-plant system]. *Matematicheskaya biologiya i bioinformatika. Spetsvyпуск po itogam konferentsii EkoMatMod – Mathematical biology and bioinformatics. Special issue on the results of EcoMatMod-2011 conference*. 2012. V. 7. No 1. Pp. 45–53.
5. Vorotyntsev A. V. Priblizhennaya model' perenosa tepla i vlagi v sisteme pochva-rastenie s uchetom balansa energii [The approximate model of moisture-heat transfer in soil-plant system taking into account energy balance]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, Informatika – Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics*. 2014. V. 9. No. 1. Pp. 22–26.
6. Vorotyntsev A. V., Rogozhina N. L., Sokolova I. A., Stepchenkova S. O. Dve zadachi optimal'nogo upravleniya dlya modeli sistemy pochva-rastenie [Two optimal control problems for a model of soil-plant system]. USSR AS Computing center. Reports on applied mathematics, 1988. 38 p.
7. Bikhele Z. N., Moldau Kh. A., Ross Yu. K. *Matematicheskoe modelirovanie transpiratsii i fotosinteza rastenii pri nedostatke pochvennoi vlagi* [Mathematical modeling of transpiration and photosynthesis at the lack of soil moisture]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1980. 223 p.

УДК 517.925.41

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-62-67

## ПУТЬ МЕЖДУ ДВУМЯ ПИКАМИ РЕСУРСА В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МИГРАЦИИ ЖИВОТНЫХ

© Мачулис Владислав Владимирович

доцент кафедры математического моделирования Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета

Россия, 625003, г. Тюмень, ул. Семакова, 10, e-mail: mareliks@gmail.com

Рассматривается задача нахождения гетероклинической траектории, соединяющей неподвижные точки, соответствующие максимумам ресурса в математической модели миграции животных. Проведено качественное исследование модели с двумя пиками ресурса, найдены численные решения для гетероклинических траекторий.

**Ключевые слова:** динамическая система, гетероклиническая траектория, модель миграции животных.

## A PATH BETWEEN TWO PEAKS OF RESOURCE IN THE MATHEMATICAL MODEL OF ANIMAL MIGRATION

Vladislav V. Machulis

A/Professor, Department of mathematical modeling, Institute of mathematics and computer science, Tyumen State University

10 Semakova st., Tyumen 625003, Russia

We considered the problem of finding a heteroclinic trajectory, connecting fixed points, which correspond to the maxima of resource in the mathematical model of animal migration. Qualitative research of the model with two peaks of resource was conducted, numerical solutions for heteroclinic trajectories were found.

**Keywords:** dynamic system, heteroclinic trajectory, model of animal migration.

### Введение

Массовые перемещения животных, или миграция, давно привлекают внимание исследователей. Перемещения на различные расстояния обеспечивают животным выживание, рост популяции за счет потребления новых ресурсов. Возникают вопросы, чем объяснить, что в данной среде обитания разные виды показывают различное поведение: одни виды остаются на месте, а другие передвигаются на большие расстояния? Только ли различие в физиологии объясняет мобильность одних и инертность других? Как влияют на миграционные процессы различия в экологии? Является ли экологическая разнородность главной причиной качественного различия в поведении траекторий математической модели популяции?

В статье [1] предпринята попытка ответить на последний вопрос. Предложенная модель описывает миграцию в среде, не зависящей от плотности популяции, где передвижение особей основано на потреблении одного ресурса, который изменяется в пространстве и времени.

Под миграцией понимается крупномасштабное перемещение групп организмов, которое, скорее всего, является откликом на сезонные циклы экологического изменения среды. Математических исследований, посвященных миграции животных, существует достаточно много (см., например, [2]). Но большинство из исследований относятся к стационарной среде. Предлагаемая модель разработана для нестационарной среды, т. е. среды, изменяющейся и в пространстве, и во времени. Известно, что даже простые нелинейные системы с внешним воздействием, такие, как уравнение Дюффинга, могут проявлять хаотическое поведение. Пространственное изменение воздействия еще более усложняет ситуацию.

### 1. Математическая модель

Модель, предложенная в [1], используется для исследования влияния сезонных изменений на стратегии пространственных перемещений животных. В этой модели среда обитания содер-

жит не истощаемый, не зависящий от плотности популяции ресурс, который по-разному распределен в пространстве и времени. Распределение ресурса не случайно, а периодически по времени. Популяция животных однородна, питается одним и тем же кормом и имеет одни и те же требования к энергетическим затратам при передвижении.

Пусть  $\Theta(x, t)$  – расход ресурса на единицу популяции,  $t$  – время,  $x(t)$  – позиция. Расход ресурса меняется периодически, т. е.  $\Theta(x, t) = \Theta(x, t + T)$ . Пусть также  $\gamma(\dot{x})$  есть темп использования ресурса (затратная функция), зависящий от текущей скорости движения  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ . Предполагается, что затраты на движение зависят только от скорости, а не, к примеру, направления, или количества съеденного ресурса.

В математической модели используется эволюционная теория в комбинации с концепцией природных ландшафтов для исследования эволюции. Пригодность (физическая форма) индивидуума после пройденного пути  $x(t)$  задается безразмерным числом

$$R_d = \int_0^{\infty} [\Theta(x(t), t) - \gamma(\dot{x}(t))] e^{-\delta t} dt, \quad (1)$$

где  $\delta$  – относительная значимость краткосрочного прироста ресурса по сравнению с долгосрочным. Наиболее быстрое увеличение показателя  $R_d$  обеспечивают стратегии, максимизирующие величину (1).

Каждая особь популяции в любом заданном месте и в любое заданное время «выбирает» начальное условие  $x(0)$  и движется согласно скорости  $\dot{x} = u(t)$ , где  $u(t)$  – выбранная скорость из множества стратегий движения. Оптимальная стратегия  $u^*(t)$  максимизирует ожидаемую пригодность

$$u^* = \arg \max_u \int_0^{\infty} [\Theta(x, t) - \gamma(u(t))] e^{-\delta t} dt. \quad (2)$$

Ясно, что любое пропорциональное увеличение затрат на движение  $\gamma(u(t))$  может быть компенсировано пропорциональным увеличением расхода ресурса  $\Theta(x, t)$ . Для упрощения математических выкладок предполагается, что пространство одномерно, т. е.  $x(t)$  и  $u(t)$  – скалярные переменные.

Гамильтониан текущих затрат имеет вид

$$H = \Theta(x, t) - \gamma(u(t)) + \lambda(t)u(t), \quad (3)$$

где  $\lambda(t)$  вспомогательная функция. Тогда, согласно принципу максимума Понтрягина, для каждого  $t$  оптимальная пригодность должна удовлетворять необходимому условию

$$u^*(t) = \arg \max_u H = \arg \max_u (\lambda(t)u(t) - \gamma(u(t))), \quad (4)$$

при условиях

$$\delta\lambda(t) - \dot{\lambda}(t) = \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad \dot{x} = u^*. \quad (5)$$

В предположении, что  $\gamma(u)$  и  $H(x, \lambda, u)$  дифференцируемы, из уравнения (4) можно получить

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u^*) = \lambda - \gamma'(u^*) = 0. \quad (6)$$

Пока  $\gamma(u)$  строго выпукла и  $\lambda$  мало, будет существовать единственное решение  $u^*$  уравнения (6). Тогда уравнения (5) можно переписать в виде

$$\dot{x} = \frac{1}{\gamma'(\lambda)}, \quad \dot{\lambda} = \delta\lambda - \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

или как равносильное уравнение второго порядка

$$\gamma''(\dot{x})\ddot{x} = \delta\gamma'(\dot{x}) - \frac{\partial \Theta}{\partial x}. \quad (7)$$

Чтобы определить лучшую стратегию перемещения мы должны задать граничные условия (также известные как условия трансверсальности). Прежде всего, будут отыскиваться случаи, где путь является периодическим с периодом  $T$  так, чтобы для каждого решения выполнялись условия

$$x(0) = x(T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T). \quad (8)$$

Таким образом, математическая модель оптимальной стратегии миграции животных состоит из условия (4), системы (5) (или уравнения (7)) и граничных условий (8).

## 2. Первичный анализ модели

Если предположить, что функция распределения ресурса может быть представлена как сумма постоянной и периодической компонент

$$\Theta(x, t) = \psi(x) + \omega(x, t), \quad (9)$$

то можно дать следующую интерпретацию уравнению (7) (см. [1])

$$\left( \frac{d \ln \gamma'(\dot{x})}{dt} - \delta \right) \gamma'(\dot{x}) = - \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} - \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x}. \quad (10)$$

Это означает, что имеется четыре компоненты, которые характеризуют природу оптимальных стратегий движения:

- амплитуда пространственных изменений, которая делится на амплитуду среднего уровня ресурса  $\psi$  и амплитуду сезонного изменения ресурса  $\omega$ ;
- коэффициент полезности движения  $\gamma'$ ;
- относительная значимость краткосрочного прироста ресурса по сравнению с долгосрочным  $\delta$ .

Из наблюдений известно, что если пространственные и временные вариации являются независимыми и разделяемыми, то сезонность не влияет на оптимальное перемещение. Также известно, что коэффициент полезности  $\gamma'(x)$  (единица стоимости/единица интервала) указывает, что потенциальный масштаб пространственного перемещения ограничен эффективностью перемещения.

С учетом указанных обстоятельств, оптимальные стратегии перемещения могут быть разделены на шесть режимов. Мы приводим схему режимов на рисунке 1.



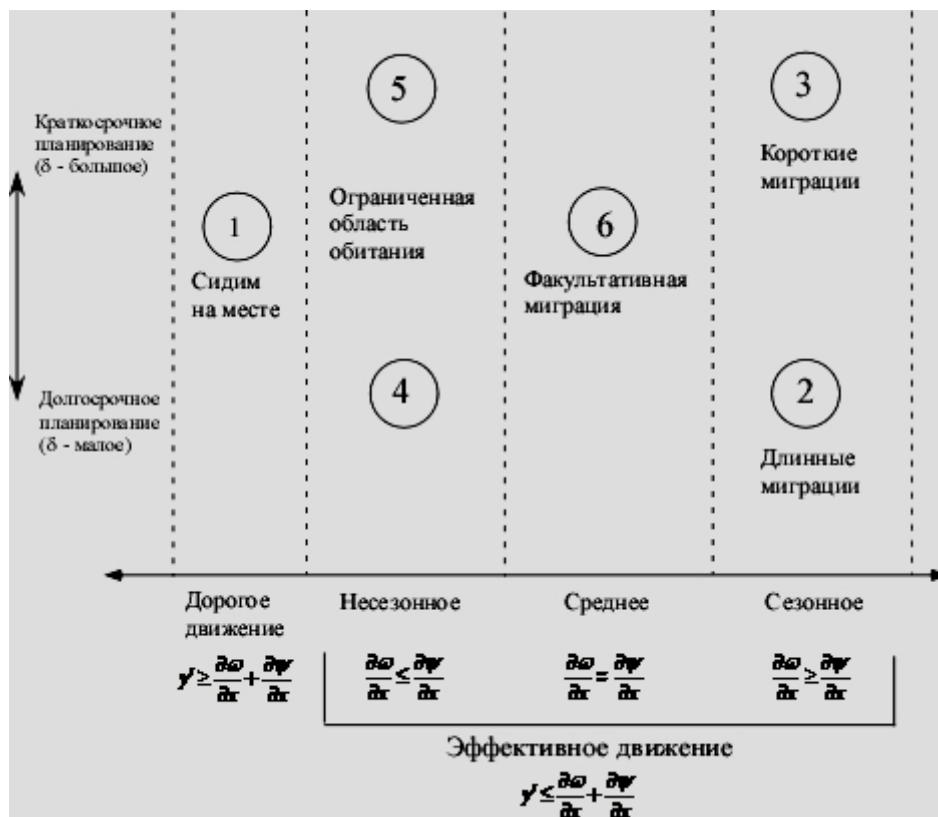


Рис. 1

Если передвижение оказывается неэффективным по сравнению с размахом пространственного изменения ресурса, то нет никакой выгоды для перемещения, поэтому особи будут находиться на прежних местах без скоплений (режим 1).

Если затраты на движение малы, то возможность миграций может оказаться реальной. Если при этом сезонное изменение ресурса в пространстве велико по сравнению с его изменением в определенном местообитании, то оптимальная стратегия заключается в следовании за сезонными изменениями ресурса.

Если краткосрочная выгода оказывается важнее долгосрочной (коэффициент  $\delta$  достаточно велик), то оптимальная стратегия следует за градиентом ресурса, причем здесь может быть множество региональных непересекающихся миграций, разделенных пустотами ресурса (режим 3).

Если долгосрочная выгода важнее, то существует единственный оптимальный миграционный путь, который может пересекать пустоты ресурса (режим 2).

Если передвижение эффективно и сезонное изменение ресурса мало по сравнению со стационарным, то оптимальная стратегия состоит в передвижении к локальному пику (максимуму) ресурса.

Если значимость краткосрочной выгоды выше долгосрочной, то лучшая стратегия – забраться на самый близкий локальный максимум (режим 5).

Чем меньше коэффициент  $\delta$ , тем больше значимость долгосрочной выгоды, и тогда лучше продвигаться к глобальному пику, даже если приходится пересекать пустоты ресурса (режим 4).

Когда сезонные изменения ресурса близки по величине к среднему по пространству изменению ресурса, то структура оптимальных решений может быть очень сложной и нет простых периодических движений, которые обеспечивали бы максимум эффективности (режим 6).

### 3. Гетероклиническая траектория

Мы рассматриваем здесь один из возможных типов затратной функции, а именно, квадратичную функцию

$$\gamma(\dot{x}) = \gamma(u) = \frac{gu^2}{2}. \tag{11}$$

Тогда  $\gamma'(u) = gu$ ,  $\gamma''(u) = g$  и система (5) примет вид

$$\dot{x} = \frac{\lambda}{g}, \quad \dot{\lambda} = \delta\lambda - \frac{\partial\Theta}{\partial x}. \tag{12}$$

Перепишем (12) как уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = \delta\dot{x} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \tag{13}$$

или, после параметризации затрат и распределения ресурса, как

$$\ddot{x} = \delta\dot{x} - \frac{\partial\Theta}{\partial x}. \tag{14}$$

Уравнение (14) служит необходимым условием оптимальности.

Будем предполагать, что сезонные изменения ресурса слабы ( $\omega(x,t) \ll 1$ ). Тогда распределение ресурса близко к своей стационарной части  $\psi(x)$

$$\Theta(x,t) = \omega(x,t) + \psi(x).$$

Интуиция подсказывает, что оптимальные стратегии должны соответствовать проживанию на пиках ресурса. Если  $\omega(x,t)$  мало, или отсутствует, то  $\Theta(x,t) \approx \Theta(x)$  не зависит явно от времени и уравнение (14) будет автономным. Его свойства могут быть изучены на фазовой плоскости.

Однако, не все так просто. Во-первых, условие (14) является лишь необходимым, но не достаточным. Это значит, что любой оптимальный путь движения удовлетворяет (14), но не наоборот. Причем, в некоторых случаях оптимального решения может не быть вообще.

Во-вторых, если коэффициент  $\delta$  велик, то оптимальная стратегия «следует за градиентом», а если  $\delta$  мал, то возникает неоднозначность в выборе лучшего действия в окрестности точки экстремума.

Наиболее интересны случаи, когда функция распределения ресурса имеет два пика. Именно такую ситуацию мы здесь рассматриваем.

Пусть

$$\psi(x) = a_0 - \bar{a}_2 x^2 (b_2 x^2 + \bar{b}_1 x + \bar{b}_0),$$

где  $a_0, \bar{a}_2, \bar{b}_0, \bar{b}_1, b_2$  – некоторые заданные числа. Для упрощения вынесем  $b_2$  за скобки и переобозначим коэффициенты

$$\psi(x) = a_0 - a_2 x^2 (x^2 + b_1 x + b_0). \tag{15}$$

Тогда уравнение (14) примет вид

$$\ddot{x} = \delta\dot{x} + 4a_2 x^3 + 3a_2 b_1 x^2 + 2a_2 b_0 x. \tag{16}$$

Сводя его к системе для анализа качественного поведения, получаем

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2a_2 b_0 x + 3a_2 b_1 x^2 + 4a_2 x^3 + \delta y \end{cases} \tag{17}$$

Здесь может быть одна неподвижная точка, две неподвижные точки, или три неподвижные точки в зависимости от значений параметров. Начало координат всегда является неподвижной точкой, две другие (если существуют) лежат на оси  $Ox$  фазовой плоскости  $xOy$  и имеют координаты

$\left(-\frac{3}{8}b_1 \mp \frac{1}{8}\sqrt{9b_1^2 - 32b_0}; 0\right)$ . Можно показать, что при  $b_0 < 0$  неподвижная точка  $(0,0)$

лежит между двумя другими неподвижными точками. Причем, при  $a_2 > 0$  точки

$\left(-\frac{3}{8}b_1 \mp \frac{1}{8}\sqrt{9b_1^2 - 32b_0}; 0\right)$  являются локальными максимумами функции распределения ресурса

$\psi(x)$ .

Локальные максимумы имеют, вообще говоря, различные значения и каждый имеет свой бассейн притяжения, характеристики которых управляются коэффициентом  $\delta$ . Не всегда существует оптимальный путь от меньшего максимума к большему, он появляется, когда формируется гетероклиническая орбита.

На плоскости параметров  $b_1Ob_0$  в точках, лежащих ниже параболы  $b_0 = \frac{9}{32}b_1^2$  локальные максимумы соответствуют неподвижным точкам типа седло, в точках выше параболы неподвижная точка лишь одна – начало координат (единственный максимум ресурса). На самой параболе  $b_0 = \frac{9}{32}b_1^2$  при каждом фиксированном  $b_1$  и изменяющимся  $b_0$  происходит бифуркация седло-узел, а при  $b_1 = 0$  – вильчатая бифуркация.

Нас интересует существование гетероклинической орбиты, соединяющей два локальных максимума. Если такая орбита существует, то существует и путь от меньшего максимума к большему. Легко убедиться, что «левый» максимум будет больше «правого», если выполнено условие  $b_1 > 0$ . Разность между большим и меньшим максимумами выражается формулой

$$\frac{|b_1|}{3} \sqrt{(9b_1^2 - 32b_0)^3}.$$

Численные расчеты показывают, что:

- существуют гетероклинические орбиты между двумя максимумами ресурса при  $b_0 < 0$ , соответствующие пути от меньшего максимума к большему;
- не существует путей, соединяющих локальные максимумы при  $0 < b_0 < \frac{9}{32}b_1^2$ ;
- управляющий параметр  $\delta$  является возрастающей функцией от  $b_1$ ;
- гетероклиническая траектория симметрично отображается относительно оси  $Ox$  фазовой плоскости при смене знака  $b_1$ .

На рис. 2 при  $\delta = 0,612$  представлены две гетероклинические траектории.

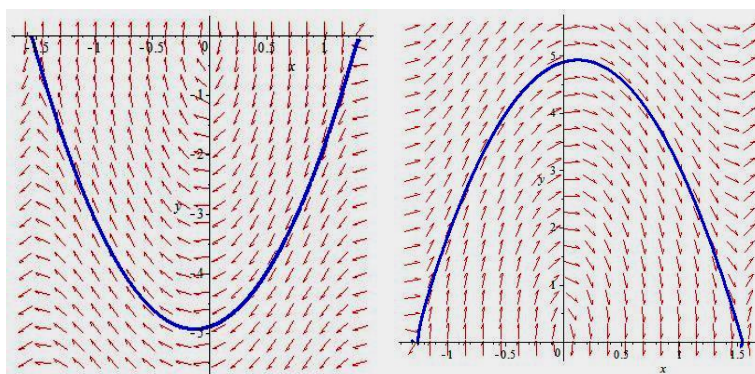


Рис. 2. (а)  $a_2 = 3$ ,  $b_1 = \frac{1}{3}$ ,  $b_0 = -4$ ; (б)  $a_2 = 3$ ,  $b_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $b_0 = -4$

### Заключение

В исследовании путем построения численного решения показано существование гетероклинической траектории между двумя пиками ресурса в модели миграции животных с затратной функцией параболического типа. Определены условия, при которых путь от одного максимума ресурса к другому может осуществиться.

### References

1. Timothy C. Reluga, Allison K. Shaw. Optimal migratory behavior in spatially-explicit seasonal environments. *Discrete and continuous dynamical system. Ser. B.* V. 19, No. 10. 2014. Pp. 3359–3378.
2. Cantrell S., Cosner C. and Lou Y. Evolution of dispersal in heterogeneous landscapes. *Spatial Ecology* (eds. S. Cantrell, C. Cosner, and S. Ruan). Chapman and Hall, 2009, Pp. 213–229.

УДК 517.98

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-68-75

**УСТАНОВИВШИЕСЯ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ  
ТВЕРДЫХ ТЕЛ, УСТАНОВЛЕННЫХ НА УПРУГОМ СТЕРЖНЕ<sup>1</sup>**© **Миждон Арсалан Дугарович**

доктор технических наук, профессор Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления

Россия, 670013, ул. Ключевская, 40в, e-mail: miarsdu@mail.ru

© **Дабеева Мария Жалсановна**

преподаватель Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления

Россия, 670013, ул. Ключевская, 40в, e-mail: miralira@mail.ru

В статье предлагается общий подход к нахождению амплитуд вынужденных колебаний системы твердых тел, установленных на балке Эйлера – Бернулли с закрепленными краями, основанный на рассмотрении обобщенной математической модели. Под обобщенной математической моделью понимается система гибридных дифференциальных уравнений, заданной структуры, описывающая динамику произвольных систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к упругому стержню.

**Ключевые слова:** амплитудо-частотная характеристика, твердое тело, балка Эйлера – Бернулли, обобщенная модель.

**STEADY-STATE FORCED OSCILLATIONS OF SOLID SYSTEM MOUNTED ON  
ELASTIC ROD****Arsalan D. Mizhidon**DSc, Professor, East Siberian State University of Technology and Management  
40v Kluchevskaya st., Ulan-Ude 670013, Russia**Maria Zh. Dabaeva**Lecturer, East Siberian State University of Technology and Management  
40v Kluchevskaya st., Ulan-Ude 670013, Russia

The article reviews a common approach to find forced oscillation amplitudes of solid system, mounted on Euler – Bernoulli beam with fixed edges. This approach is based on generalized mathematical model analysis.

A generalized mathematical model is defined as hybrid differential equation system of given structure that describes dynamics of any systems of interrelated solids elastically mounted on elastic rod.

**Key words:** amplitude-frequency response, solid, Euler – Bernoulli beam, generalized model.

**Введение**

Для вывода уравнений движения систем твердых тел, установленных на упругом стержне, используется вариационный принцип Гамильтона, который справедлив, как для систем с сосредоточенными, так и для систем с распределенными параметрами. Полученные на основании принципа Гамильтона, уравнения движений таких механических систем являются гибридными системами дифференциальных уравнений [1–3]. Под гибридными системами дифференциальных уравнений понимается система дифференциальных уравнений, состоящая из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. В работе [4] была предложена обобщенная математическая модель балки Эйлера – Бернулли с закрепленными краями и прикрепленными на нем с помощью упругих связей произвольной системы твердых

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-08-00973а

тел, соединенных между собой упругими связями. Обобщенная математическая модель таких механических систем, описывается системой гибридных дифференциальных уравнений [4]:

$$\begin{cases} A\ddot{z} + Bz + C(Dz - \bar{u}) = 0, \\ k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) = \sum_{i=1}^m q_i (d^{iT} z(t) - u(x, t)) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (1)$$

где  $z(t)$  –  $n$ -мерная вектор-функция;  $u(x, t)$  – скалярная функция;  $\bar{u}(t)$  –  $m$ -мерная вектор-функция с компонентами  $u(a_1, t), \dots, u(a_m, t)$ ;  $A, B$  – заданные, постоянные  $n \times n$  – матрицы;  $C$  – заданная, постоянная  $n \times m$  – матрица;  $D$  – заданная, постоянная  $m \times n$  – матрица;  $d^i$  –  $n$ -мерный вектор, составленный из строк матрицы  $D$ ;  $k, b, a_i, q_i, (i = \overline{1, m})$  – заданные постоянные, причем  $0 \leq a_i \leq l$ ; штрих  $()'$  – здесь и ниже операция транспонирования.

На функцию  $u(x, t)$  в зависимости от условий, накладываемых на правый и левый конец балки, задаются те или иные граничные условия. В частности, в случае жесткой заделки на концах имеем

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (2)$$

В данной работе развивается единый подход к построению амплитуд вынужденных колебаний системы, основанный на рассмотрении обобщенной математической модели (1).

### 1. Гармоническое силовое возмущение, приложенное к системе твердых тел

В случае действия на систему неконсервативных сил вариационный принцип Гамильтона может быть выражен следующим соотношением

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta(T - U) + \delta\omega) dt = 0 \quad (3)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы,  $U$  – потенциальная энергия системы,  $\delta\omega$  – виртуальная работа неконсервативных сил.

Вывод уравнений движения конкретных систем на основании принципа Гамильтона (3) приводит к появлению в гибридной системе дифференциальных уравнений дополнительных слагаемых, соответствующих внешним неконсервативным силам. Если гармоническое возмущение частоты  $\omega$  приложено к одному или нескольким твердым телам системы, то в правой части обыкновенных дифференциальных уравнений обобщенной модели (1) появляются выражения вида  $H \sin \omega t$

$$\begin{cases} A\ddot{z} + Bz + C(Dz - \bar{u}) = H \sin \omega t, \\ k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) = \sum_{i=1}^m q_i (d^{iT} z(t) - u(x, t)) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (4)$$

где  $H$  –  $n$ -мерный заданный вектор.

Действительно, для примера рассмотрим механическую систему, на массу  $m$  действует гармоническое силовое возмущение с частотой  $\omega$  и амплитудой  $f$  (рис. 1).

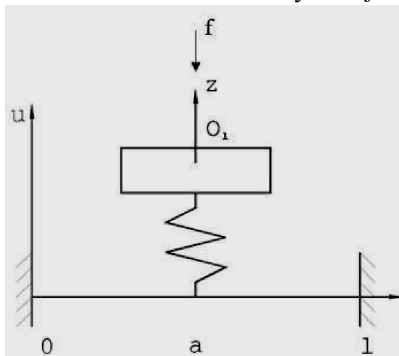


Рис. 1. Механическая система «твердое тело на упругом стержне» с гармоническим силовым возмущением, действующим на массу

Для данной системы имеем:

1. Потенциальная энергия пружины пропорциональна квадрату ее линейной деформации

$$U_1 = \frac{c(z - u(a, t))^2}{2},$$

2. Кинетическую энергию твердого тела можно записать в виде суммы кинетической энергии поступательного и вращательного движений:

$$T_1 = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2},$$

где  $I$  – момент инерции твердого тела относительно центра масс при повороте на угол  $\varphi$ .

3. Выражения для кинетической и потенциальной энергии стержня имеют вид:

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx, \quad U_2 = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx,$$

где  $\rho$  – плотность материала стержня,  $F$  – площадь поперечного сечения,  $E$  – модуль упругости стержня,  $I$  – момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний.

4. Работа неконсервативных сил в данной системе определяется следующим образом

$$\delta\omega = f \cos \omega t \delta z.$$

Учитывая, приведенные выше соотношения, можем найти вариацию функционала действия (3) в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ (-m\ddot{z} - c(z - u(a, t)) + f \cos \omega t) \delta z + \int_0^l \left( c(z - u(x, t)) \delta(x - a) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u dx \right] \quad (5)$$

Таким образом, из (5), в силу независимости вариаций координат получим уравнение движения системы

$$\begin{cases} m\ddot{z} + c(z - u(a, t)) = H \cos \omega t, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c(z - u(x, t)) \delta(x - a). \end{cases} \quad (6)$$

Вернемся к рассмотрению системы (4). Будем искать вынужденные установившиеся колебания системы (4)  $z(t)$ ,  $u(x, t)$  в виде

$$z(t) = Z \sin \omega t, \quad u(x, t) = V(x) \sin \omega t, \quad (7)$$

где  $\omega$  – частота внешних возмущений,  $Z$  –  $n$ -мерный вектор амплитуд вынужденных колебаний тел,  $V(x)$  – амплитуда вынужденных колебаний точек упругого стержня,

Подставив в систему (4)  $z(t)$ ,  $u(x, t)$  в виде (7) после преобразований получим алгеброическо-дифференциальную систему

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = H, \\ -\omega^2 kV(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \sum_{i=1}^m q_i (d^{i'} Z - V(x)) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (8)$$

где  $\bar{V}$  –  $m$ -мерный вектор с компонентами  $V(a_1), \dots, V(a_m)$ .

В силу граничных условий (2) функция  $V(x)$  должна удовлетворять условиям

$$V(0) = V(l) = 0, \quad \frac{dV}{dx}(0) = \frac{dV}{dx}(l) = 0. \quad (9)$$

Отметим в [4] было показано, что решение  $V(x)$  дифференциального уравнения из системы (8), удовлетворяющее условиям (9), при любом  $Z$  удовлетворяет соотношению

$$V(x) = \sum_{i=1}^m G_i(x - a_i) q_i (d^{i'} Z - V(a_i)). \quad (10)$$

Пусть, при заданном значении  $\omega$  (частота внешних возмущений), в соответствии с [4], найдены обобщенные решения  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  уравнения

$$-\omega^2 k G_i(x) + b \frac{d^4 G_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (i=1, \dots, n), \quad (11)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$\begin{cases} G_i(-a_i) = G_i(l - a_i) = 0, \\ \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = \frac{dG_i}{dx}(l - a_i) = 0. \end{cases} \quad (i=1, \dots, m) \quad (12)$$

Принимая в (10) последовательно значения  $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_m$ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V(a_1), V(a_2), \dots, V(a_m)$ . Объединив полученную систему с алгебраической системой из (8) получим линейную, неоднородную алгебраическую систему уравнений относительно вектора амплитуд  $Z$  и  $\bar{V}$

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = H, \\ NZ - M\bar{V} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь матрицы  $M, N$  определяются следующим образом

$$M = \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)q_1 & G_2(a_1 - a_2)q_2 & \dots & G_m(a_1 - a_m)q_m \\ G_1(a_2 - a_1)q_1 & 1 + G_2(0)q_2 & \dots & G_m(a_2 - a_m)q_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_1(a_m - a_1)q_1 & G_2(a_m - a_2)q_2 & \dots & 1 + G_m(0)q_m \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_n^i \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_n^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_n^i \end{pmatrix}.$$

Отметим, если, частота внешних возмущений не совпадает с какой-либо собственной частотой, тогда определитель системы (13) не равен нулю

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} -\omega^2 A + B + CD & -C \\ N & -M \end{pmatrix} \neq 0.$$

Решив линейную систему алгебраических уравнений (13) найдем  $n$ -мерный вектор амплитуд вынужденных колебаний масс  $Z$ , и амплитуды вынужденных колебаний точек крепления упругих связей к стержню  $V(a_1), V(a_2), \dots, V(a_m)$ . Амплитуды вынужденных колебаний произвольной точки  $x$  стержня найдутся по формуле (10).

## 2. Гармоническое силовое возмущение, приложенное к балке Эйлера – Бернулли

Пусть в механической системе действует гармоническое силовое возмущение с частотой  $\omega$  и амплитудой  $f$  (рис. 2). Силовое возмущение  $f(t) = f \cos \omega t$ , приложено к стержню в точке  $x = \bar{a}_i$ .

Виртуальную работу внешних сил можем записать в виде

$$\delta W = f \cos \omega t \delta u(a_i, t) = \int_0^l f \cos \omega t \delta u(x, t) \delta(x - a_i) dx$$

при этом вариация функционала действия (3) примет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( -m\ddot{z} - c(z - u(a, t)) \right) \delta z + \int_0^{\ell} \left( c(z - u(x, t)) \delta(x - a) + f \cos \omega t \delta(x - a_1) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u dx \right] dt = 0. \tag{14}$$

Таким образом, из (14) получим уравнение движения системы

$$\begin{cases} m\ddot{z} + c(z - u(a, t)) = 0 \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c(z - u(x, t)) \delta(x - a) + f \cos \omega t \delta(x - a_1). \end{cases}$$

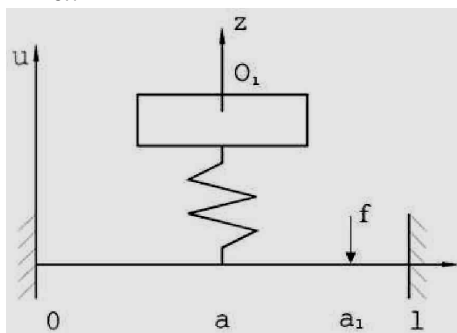


Рис. 2. Механическая система «Твердое тело на упругом стержне» с гармоническим силовым возмущением, действующим стержень

Поэтому, если на систему взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера – Лагранжа, действует гармоническое силовое возмущение с частотой  $\omega$ , приложенное в одной или в нескольких точках стержня, то в этом случае в правой части уравнений в частных производных обобщенной модели (1) появятся дополнительные слагаемые

$$\begin{cases} A\ddot{z} + B\dot{z} + C(Dz - \bar{u}) = 0, \\ k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) = \sum_{i=1}^m q_i (d^{iT} z(t) - u(x, t)) \delta(x - a_i) + \\ + \sum_{i=1}^s H_i \sin \omega t \delta(x - \bar{a}_i), \end{cases} \tag{14}$$

где  $H_i$  – заданные амплитуды внешних воздействий, приложенные в точке стержня с координатой  $\bar{a}_i$ .

Подставив в систему (14)  $z(t)$ ,  $u(x, t)$  в виде (7) после преобразований получим алгебраическо-дифференциальную систему

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = 0 \\ -\omega^2 kV(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \sum_{i=1}^m q_i (d^{iT} Z - V(x)) \delta(x - a_i) + \\ + \sum_{i=1}^s H_i \delta(x - \bar{a}_i) \end{cases} \tag{15}$$

где  $\bar{V}$  –  $m$ -мерный вектор с компонентами  $V(a_1), \dots, V(a_m)$ .

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для алгебраическо-дифференциальной системы (15) с граничными условиями (9).

**Теорема 1.** При любых значениях  $Z$  для обобщенного решения  $V(x)$  дифференциального уравнения

$$-\omega^2 kV(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \sum_{i=1}^m q_i (d^{iT} Z - V(x)) \delta(x - a_i) + \sum_{i=1}^s H_i \delta(x - \bar{a}_i) \tag{16}$$



справедливо представление

$$V(x) = \sum_{i=1}^m G_i(x-a_i)q_i(d^{it}Z - V(a_i)) + \sum_{i=1}^s \bar{G}_i(x-\bar{a}_i)H_i \quad (17)$$

где функции  $G_i(x)$ ,  $(i=1, \dots, m)$  обобщенные решения уравнений

$$-\omega^2 k G_i(x) + b \frac{d^4 G_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (i=1, \dots, m),$$

с граничными условиями

$$G_i(-a_i) = G_i(l-a_i) = 0, \quad \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = \frac{dG_i}{dx}(l-a_i) = 0, \quad (i=1, \dots, m),$$

функции  $\bar{G}_i(x)$ ,  $(i=1, \dots, s)$  обобщенные решения уравнений

$$-\omega^2 k \bar{G}_i(x) + b \frac{d^4 \bar{G}_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (i=1, \dots, s),$$

с граничными условиями

$$\bar{G}_i(-\bar{a}_i) = \bar{G}_i(l-\bar{a}_i) = 0, \quad \frac{d\bar{G}_i}{dx}(-\bar{a}_i) = \frac{d\bar{G}_i}{dx}(l-\bar{a}_i) = 0, \quad (i=1, \dots, s),$$

**Доказательство.** Представим (17) в виде

$$V(x) = \sum_{i=1}^m \int_0^l \left( G_i(x-\xi)q_i(d^{it}Z - V(\xi)) \cdot \delta(\xi - a_i) \right) d\xi + \sum_{i=1}^s \int_0^l \bar{G}_i(x-\xi)H_i \delta(\xi - \bar{a}_i) d\xi. \quad (18)$$

Отметив, если функция  $V(x)$  обобщенное решение [5] дифференциального уравнения (16), то для любой компоненты  $v(\cdot, \cdot)$  основной вектор-функции  $(y(\cdot), v(\cdot, \cdot)) \in K$ , при любом  $t \in [0, T]$  справедливо тождество

$$\int_0^l \left( \lambda^2 k V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} \right) \cdot v(x, t) dx = \sum_{i=1}^m \left[ q_i(d^{it}Z - V(a_i))v(a_i, t) \right] + \sum_{i=1}^s H_i v(\bar{a}_i, t), \quad (19)$$

в справедливости представления (17) можем убедиться непосредственной подстановкой (18) в левую часть (17).

Пусть в соответствии с изложенным выше найдены обобщенные решения  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$  и  $\bar{G}_1(x), \bar{G}_2(x), \dots, \bar{G}_m(x)$  соответствующих уравнений, удовлетворяющие заданным согласно поставленной задаче краевым условиям.

Далее, принимая в (17) последовательно значения  $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_m$ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V(a_1), V(a_2), \dots, V(a_m)$

$$(1 + G_j(0)q_j V(a_j) + \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^m G_i(a_j - a_i)q_i V(a_i)) = \sum_{i=1}^m G_i(a_j - a_i)q_i d^{it}Z + \sum_{i=1}^s \bar{G}_i(a_j - \bar{a}_i)H_i, \quad (j=1, \dots, m). \quad (20)$$

Используя матричные обозначения, систему (20) можно записать в виде

$$M\bar{V} = NZ + b, \quad (21)$$

где  $M$  и  $N$  матрицы, соответственно размерности  $m \times m$  и  $m \times n$ , такого же вида, как и в системе (13);  $b$  –  $m$ -мерный заданный вектор

$$b = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^s \bar{G}_i (a_1 - \bar{a}_i) H_i \\ \sum_{i=1}^s \bar{G}_i (a_2 - \bar{a}_i) H_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^s \bar{G}_i (a_m - \bar{a}_i) H_i \end{pmatrix}.$$

Объединив (21) с алгебраической системой из (15), получим систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно вектора амплитуд  $Z$  и  $\bar{V}$

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = 0, \\ NZ - M\bar{V} = -b. \end{cases} \quad (22)$$

Если, частота внешних возмущений не совпадает с какой-либо собственной частотой, тогда определитель системы (22) не равен нулю. Решив линейную систему алгебраических уравнений (22) найдем  $n$ -мерный вектор амплитуд вынужденных колебаний масс  $Z$ , и амплитуды вынужденных колебаний точек крепления упругих связей к стержню  $V(a_1), V(a_2), \dots, V(a_m)$ . Амплитуды вынужденных колебаний произвольной точки  $x$  стержня найдутся по формуле (17).

### Заключение

В работе на основе обобщенной математической модели предложен общий численно-аналитический метод нахождения амплитуд установившихся вынужденных колебаний систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к упругому стержню (балке Эйлера – Бернулли). Предложенный метод полностью теоретически обоснован и может быть положен в основу алгоритмического обеспечения построения амплитудно-частотных характеристик системы.

### Литература

1. Баргуев С. Г., Мижидон А. Д. Определение собственных частот простейшей механической системы на упругом основании // Вестник Бурятского государственного университета. – 2009. – № 9. – С. 58–66.
2. Мижидон А. Д., Баргуев С. Г., Лебедева Н. В. К исследованию виброзащитной системы с упругим основанием // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2009. – №2(22). – С. 13–20.
3. Мижидон А. Д., Баргуев С. Г. О собственных колебаниях механической системы каскадного типа, установленной на упругом стержне // Вестник ВСГУТУ. – 2010. – № 1. – С. 26–32.
4. Мижидон А. Д., Дабаева М. Ж. (Цыцыренова М. Ж.) Обобщенная математическая модель системы твердых тел, установленных на упругом стержне // Вестник ВСГУТУ. – 2013. – № 6. – С. 5–12.
5. Мижидон А. Д., Баргуев С. Г. Краевая задача для одной гибридной системы дифференциальных уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – 2013. – № 9. – С. 130–137.

### References

1. Barguev S. G., Mizhidon A. D. Opredelenie sobstvennykh chastot prosteishei mekhanicheskoi sistemy na uprugom osnovanii [Determination of natural frequencies of a simplest mechanical system on elastic foundation]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2009. No. 9. Pp. 58–66.
2. Mizhidon A. D., Barguev S. G., Lebedeva N. V. K issledovaniyu vibrozashchitnoi sistemy s uprugim osnovaniem [To the study of vibration-proof system with elastic base]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie – Modern technologies. System analysis. Modeling*. 2009. No. 2(22). Pp. 13–20.
3. Mizhidon A. D., Barguev S. G. O sobstvennykh kolebaniyakh mekhanicheskoi sistemy kaskadnogo tipa, ustanovlennoi na uprugom sterzhne [On natural oscillations of a mechanical system of cascade type, installed on elastic rod]. *Vestnik Vostochno-Sibirskogo gosudarstvennogo*

*tehnologicheskogo universiteta – Bulletin of East Siberian State Technological University. 2010. No. 1. Pp. 26–32.*

4. Mizhidon A. D., Dabaeva M. Zh. (Tsytsyrenova M. Zh.) Obobshchennaya matematicheskaya model' sistemy tverdykh tel, ustanovlennykh na uprugom sterzhne [Generalized mathematical model of solids, mounted on elastic rods]. *Vestnik Vostochno-Sibirskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta – Bulletin of East Siberian State Technological University. 2013. No. 6. Pp. 5–12.*

5. Mizhidon A. D., Barguev S. G. Kraevaya zadacha dlya odnoi gibridnoi sistemy differential'nykh uravnenii [Boundary-value problem for a hybrid system of differential equations]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i informatika – Bulletin of Buryat State University. Mathematics and Computer Science. 2013. No. 9. Pp. 130–137.*

УДК 517.98

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-76-82

**ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО МЕТОДУ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ СИГНАЛЕ<sup>1</sup>****© Миждон Арсалан Дугарович**

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления

Россия, 670013, ул. Ключевская, 40в, e-mail: miarsdu@esstu.ru

**© Мадаева Елена Андреевна**

аспирант Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления

Россия, 670013, ул. Ключевская, 40в, e-mail: elenamadaeva@gmail.com

В работе представлена численная реализация метода идентификации линейных стационарных динамических систем по входному синусоидальному сигналу. Идентификация матрицы системы сводится к построению и решению матричного линейного алгебраического уравнения, построение которого основано на сопоставлении представления решений задачи Коши в виде экспоненциального матричного ряда и результатов измерений фазовых координат системы при входном синусоидальном сигнале. Для реализации численных экспериментов было составлено программное обеспечение на языке Фортран.

**Ключевые слова:** идентификация, активная идентификация, линейная система, задача Коши, фундаментальная матрица, матричная экспонента, интерполирование.

**NUMERICAL EXPERIMENTS BY THE METHOD OF IDENTIFICATION OF LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS UNDER HARMONIC SIGNAL****Arsalan D. Mizhidon**

DSc, Professor, Applied mathematics Department, East Siberian State University of Technology and Management

40v Kluchevskaya st., Ulan-Ude 670013, Russia

**Elena A. Madaeva**

Research Assistant, Applied mathematics Department, East Siberian State University of Technology and Management

40v Kluchevskaya st., Ulan-Ude 670013, Russia

The paper presents the numerical implementation of the method of identification of linear stationary dynamic systems on the input sinusoidal signal. Identification of the system matrix is reduced to constructing and solving a matrix linear algebraic equation. The construction of the equation is based on comparison of the representation of Cauchy problem solutions in the form of exponential matrix series and results of the system phase coordinates measurement under the input sinusoidal signal. For the implementation of numerical experiments it was compiled a software in Fortran.

**Keywords:** identification, active identification, linear system, Cauchy problem, fundamental matrix, matrix exponential, interpolation.

**Введение**

Одним из основных этапов, реализующих технологии математического моделирования, является создание и идентификация математической модели, исследуемого объекта. При этом различают идентификацию в широком смысле – структурная идентификация, и в узком смысле – параметрическая идентификация.

Так, в работе [1] был предложен подход к идентификации линейных стационарных динами-

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и республики Бурятия в рамках научного проекта № 15-41-04020 p\_сибир\_a.

ческих систем по результатам проведенных измерений фазовых координат системы на некотором промежутке времени. В статье [2], согласно данному подходу, был рассмотрен метод идентификации линейных динамических систем при синусоидальном воздействии.

В работе производится развитие метода, предложенного в [2] и проводится численный эксперимент идентификации некоторой линейной стационарной динамической системы по результатам измерений фазовых координат системы на некотором промежутке времени, при наложении на вход системы синусоидального сигнала.

### 1. Постановка задачи

Будем предполагать подачу на вход исследуемой системы некоторого тестового сигнала. В качестве тестового воздействия рассматривается некоторый синусоидальный сигнал  $BSin(\omega t)$ , где  $B = diag\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  - матрица амплитудных значений,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$  - вектор частотных значений, накладываемый на вход  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$  исследуемого объекта (процесса). Производя замеры реакции объекта на возмущение в моменты времени  $t$ , были получены значения состояния системы в моменты  $t$ ,  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ , являющиеся функциями времени. Предполагается, что выходные переменные  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  являются решением стационарной динамической линейной неоднородной задачи:

$$\dot{x} = Ax + BSin(\omega t), \quad x(0) = x^0. \quad (1)$$

где  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$  - начальное состояние объекта,

$A$  -  $n$ -мерная квадратная матрица.

Задача параметрической идентификации сводится к отысканию матрицы  $A$ , которая обеспечивает в некотором смысле близость решений задачи (1) и экспериментальных данных.

### 2. Идентификация системы по синусоидальному сигналу

Решение задачи (1), согласно формуле Коши [3], можно записать в виде:

$$x(t) = F(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t F(t, \tau)BSin(\omega \tau)d\tau, \quad (2)$$

где  $F(t, \tau)$  - фундаментальная матрица.

Проинтегрировав правую часть уравнения (1), и используя разложения фундаментальной матрицы  $F(t, \tau)$  в виде матричного ряда, функций  $Cos(\omega t)$  и  $Sin(\omega t)$  в ряд Тейлора, было получено следующее итоговое выражение для решения неоднородной системы вида (1) [2]:

$$\begin{aligned} x(t) = x^0 + Ax^0t + \frac{(A^2x^0 + A^2CW^{-1}b + CWb)t^2}{2!} + (A^3x^0 + A^3CW^{-1}b + \\ + ACWb)\frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{(A^{2m}x^0 + A^{2m}CW^{-1}b + (-1)^{m+1}CW^{2m-1}b)t^{2m}}{(2m)!} + \\ + \frac{(A^{2m+1}x^0 + A^{2m+1}CW^{-1}b + (-1)^{m+1}ACW^{2m-1}b)t^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ ,  $W = diag\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , а матрица  $C$  удовлетворяет уравнению:

$$A^2CW^{-2} + C = E.$$

С другой стороны, разложение решений системы (1)  $x(t)$  в ряд Тейлора в некоторой окрестности точки  $t_0$  имеет вид:

$$x(t) = x^0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{(i)}(t_0)(t-t_0)^i}{i!}. \quad (4)$$

Сравним полученное выражение (3) с разложением решения неоднородной системы (1)  $x(t)$  в ряд Тейлора в некоторой окрестности точки  $t_0 = 0$  (4). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в (3) и (4) [2]:

$$\begin{cases} x^{(1)}(0) = Ax^0, \\ \dots\dots\dots \\ x^{(2m)}(0) = A^{2m}x^0 + A^{2m}CW^{-1}b + (-1)^{m+1}CW^{2m-1}b, \\ x^{(2m+1)}(0) = A^{2m+1}x^0 + A^{2m+1}CW^{-1}b + (-1)^{m+1}ACW^{2m-1}b = Ax^{(2m)}(0). \end{cases}$$

Отсюда получим следующую систему уравнений для нахождения матрицы  $A$ :

$$\begin{cases} Ax^0 = x^{(1)}(0), \\ Ax^{(1)}(0) = x^{(2)}(0) - Wb, \\ \dots\dots\dots \\ Ax^{(2m-1)}(0) = x^{(2m)}(0) + (-1)^m W^{2m-1}b, \\ Ax^{(2m)}(0) = x^{(2m+1)}(0). \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, для нахождения матрицы системы (1) получили матричное алгебраическое уравнение относительно матрицы  $A$

$$AX^0 = X^1 + W^*, \tag{6}$$

где матрицы  $X^0$  и  $X^1$  определяются следующим образом:

$$X^0 = (x(0), x^{(1)}(0), \dots, x^{(n-1)}(0)), \quad X^1 = (x^{(1)}(0), x^{(2)}(0), \dots, x^{(n)}(0)),$$

$$W^* = \begin{cases} (\bar{0}, -Wb, \dots, (-1)^m W^{2m-1}b), \text{ при } n = 2m, m \in \mathbb{N}; \\ (\bar{0}, -Wb, \dots, (-1)^m W^{2m-1}b, \bar{0}), \text{ при } n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Решив матричное алгебраическое уравнение (6), найдем

$$A = (X^1 + W^*)(X^0)^{-1}.$$

Заметим, для построения матриц  $X^0$  и  $X^1$  будем использовать значения производных интерполяционных полиномов [1], вычисленные в точке  $t = 0$ .

В целом идентификация системы сводится к следующему:

1. проводится интерполирование входных данных [1];
2. строятся матрицы  $X^0$ ,  $X^1$ , используя производные интерполяционных представлений, найденных на шаге 1, и по синусоидальному сигналу  $BSin(\omega t)$  - матрица  $W^*$ ;
3. решается уравнение (6).

Т.к. матрицы  $X^0$  и  $X^1$  будут найдены с некоторой погрешностью, то вместе с матричным уравнением (6), восстанавливающим матрицу  $A$ , рассматривается система:

$$(A + \Delta A)(X^0 + \Delta X^0) = (X^1 + W^* + \Delta X^1 + \Delta W^*),$$

где  $\Delta A$ ,  $\Delta X^0$ ,  $\Delta X^1$  и  $\Delta W^*$  приращения соответствующих матриц. Тогда согласно [4] верно следующее утверждение об оценке относительной погрешности метода.

**Утверждение.** Пусть матрицы  $X^0$ ,  $X^1$ ,  $W^*$  имеют приращения  $\Delta X^0$ ,  $\Delta X^1$ ,  $\Delta W^*$  соответственно и выполнено условие:

$$\mu \| \Delta X^0 \| \| X^0 \|^{-1} < 1, \quad \text{где } \mu = \| X^0 \| \| (X^0)^{-1} \|.$$

Тогда оценка относительной погрешности идентифицируемой матрицы  $A$  удовлетворяет неравенству:

$$\frac{\| \Delta A \|}{\| A \|} \leq \frac{\mu}{1 - \mu \| \Delta X^0 \| \| X^0 \|^{-1}} \left( \frac{\| \Delta X^1 + \Delta W^* \|}{\| X^1 + W^* \|} + \frac{\| \Delta X^0 \|}{\| X^0 \|} \right).$$

**Замечание.** Для идентификации матрицы  $A$  системы (1) по уравнению (6) используются амплитудные и частотные характеристики входного сигнала. Из системы (5) можем получить матричное уравнение для нахождения матрицы системы (1), не включающее характеристики

входного сигнала [2], вида:  $AX^{2m} = X^{2m+1}$ , где  $X^{2m} = (x(0), x^{(2)}(0), \dots, x^{(2n-2)}(0))$ ,  $X^{2m+1} = (x^{(1)}(0), x^{(3)}(0), \dots, x^{(2n-1)}(0))$ .

### 3. Численный эксперимент

Рассмотрим идентификацию линейной системы по заданному точному значению решений. Для этого в качестве идентифицируемой системы вида (1), рассмотрим систему, которая в реальном представлении описывается следующей системой дифференциальных уравнений с заданным начальным условием:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(2t) \\ 2\sin(t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 4.97 \\ 4.32 \\ 1.86 \\ 1.56 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Для задачи Коши (7) решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,5+t)e^t + (1,25+t)e^{-t} \\ (1+t)e^t + (1+t)e^{-t} \\ (1,5+t)e^t \\ (1+t)e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5 & 3.5 & 0 & -1.28 \\ 0 & 4 & -0.6 & -1.68 \\ -1 & 1 & 0.48 & -0.64 \\ 0 & 2 & 0.08 & -1.44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Используя точное аналитическое представление решения (8) вычислим производные до 4-го порядка включительно. Значение функции и производные при  $t = 0$  представлены в таблице 1.

Таблица 1

$j$	$x_j(0)$	$x_j^{(1)}(0)$	$x_j^{(2)}(0)$	$x_j^{(3)}(0)$	$x_j^{(4)}(0)$
1	4.97	0.75	4.37	7.75	-14.23
2	4.32	0.8	4.72	10.8	-20.88
3	1.86	2.46	5.06	1.66	-3.74
4	1.56	2.16	6.76	3.36	-16.04

Из таблицы 1 и неоднородной части системы (7) можем записать значения матриц  $X^0$  и  $X^1 + W^*$ :

$$X^0 = \begin{pmatrix} 4.97 & 0.75 & 4.37 & 7.75 \\ 4.32 & 0.8 & 4.72 & 10.8 \\ 1.86 & 2.46 & 5.06 & 1.66 \\ 1.56 & 2.16 & 6.76 & 3.36 \end{pmatrix}, \quad X^1 + W^* = \begin{pmatrix} 0.75 & 3.37 & 7.75 & -13.23 \\ 0.8 & 2.72 & 10.8 & -12.88 \\ 2.46 & 3.06 & 1.66 & -1.74 \\ 2.16 & 2.76 & 3.36 & -0.04 \end{pmatrix}.$$

Используя (6) матрицу  $A$  получим вида:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3.999999 & 0 & 1.999999 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица совпадает с исходной матрицей системы (7), так как для идентификации использовались производные до 4го порядка точных аналитических решений (8) (таблица 1).

Таблица 2

$t$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
0.0	4.97	4.32	1.86	1.56
0.2	5.216815	4.587393	2.455224	2.130642
0.4	5.688296	5.110366	3.264548	2.984807
0.6	6.419644	5.926847	4.302613	4.118829
0.8	7.439683	7.050904	5.596578	5.5214
1	8.784953	8.48708	7.197332	7.189164
1.2	10.5163	10.24986	9.190789	9.144857
1.4	12.73632	12.38612	11.70842	11.45601
1.6	15.60607	14.99818	14.93652	14.25236
1.8	19.35987	18.26511	19.12431	17.74054

Рассмотрим задачу идентификации матрицы согласно изложенному методу. Для этого, используя дискретные данные решения системы (7) (таблица 2), найдем интерполяционные полиномы Лагранжа [1] и их производные (таблица 3).

Ниже, в таблице 3 приведены производные до 4-го порядка интерполяционных полиномов при  $t = 0$ :

Таблица 3

$j$	$P_j(0)$	$P_j^{(1)}(0)$	$P_j^{(2)}(0)$	$P_j^{(3)}(0)$	$P_j^{(4)}(0)$
1	4.97	0.750057	4.368569	7.77105	-14.45088
2	4.32	0.79996	4.720996	10.78604	-20.75801
3	1.86	2.460005	5.059994	1.658043	-3.692948
4	1.56	2.159965	6.760901	3.347021	-15.91548

Здесь  $P_j^{(i)}(0)$  обозначает производную  $i$ -го порядка полинома Лагранжа, составленного по табличным значениям  $x_j(t)$  (таблица 2) при  $t = 0$  для всех  $i, j = \overline{1,4}$  [1].

В соответствии таблице 3 значения матриц  $X^0$  и  $X^1$  представляются следующим образом:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 4.97 & 0.750057 & 4.368569 & 7.771051 \\ 4.32 & 0.799960 & 4.720996 & 10.78604 \\ 1.86 & 2.460005 & 5.059994 & 1.658043 \\ 1.56 & 2.159965 & 6.760901 & 3.347021 \end{pmatrix},$$

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0.750057 & 4.368569 & 7.771051 & -14.45088 \\ 0.79996 & 4.720996 & 10.78604 & -20.75801 \\ 2.460005 & 5.059994 & 1.658043 & -3.692948 \\ 2.159965 & 6.760901 & 3.347021 & -15.91548 \end{pmatrix}.$$

Матрицу  $A$  согласно формуле (6) получим в виде:

$$A_p = \begin{pmatrix} 3.08 & -4.096548 & -0.030396 & 2.040963 \\ 3.994221 & -4.993414 & -1.995434 & 3.994701 \\ -0.006458 & -0.007625 & 3.001408 & -2.002228 \\ -0.03089 & -0.036105 & 2.012262 & -1.016214 \end{pmatrix}.$$



Таблица 4

$t$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
0.0	4.970001	4.320001	1.860001	1.560001
0.2	5.216816	4.587394	2.455225	2.130643
0.4	5.688297	5.110367	3.264549	2.984808
0.6	6.419645	5.926848	4.302614	4.118830
0.8	7.439682	7.050903	5.596577	5.521399
1	8.784952	8.487079	7.197331	7.189163
1.2	10.5163	10.24986	9.190788	9.144856
1.4	12.73632	12.38612	11.70841	11.45601
1.6	15.60607	14.99818	14.93652	14.25236
1.8	19.35987	18.26511	19.12431	17.74054

Если же сделать допущение, что экспериментальные данные получены с некоторой погрешностью  $\varepsilon$  (таблица 4), тогда согласно предлагаемому подходу матрица  $A_\varepsilon$  найдется в виде:

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3.25413 & -4.297418 & -0.095888 & 2.128447 \\ 4.165789 & -5.194152 & -2.060879 & 4.082123 \\ 0.16514 & -0.193144 & 2.935939 & -1.914778 \\ 0.140825 & -0.164804 & 1.946753 & -0.928708 \end{pmatrix}$$

Решения системы с матрицей  $A_\varepsilon$  представлены в таблице 5.

Таблица 5

$t$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
0.0	4.970001	4.320001	1.860001	1.560001
0.2	5.216794	4.587374	2.455211	2.130626
0.4	5.687912	5.110089	3.264316	2.9846
0.6	6.417365	5.925244	4.301182	4.117638
0.8	7.432735	7.046525	5.59192	5.518198
1	8.76395	8.470778	7.183947	7.177012
1.2	10.47498	10.21771	9.163688	9.120893
1.4	12.6654	12.33016	11.66056	11.41404
1.6	15.49595	14.90804	14.86079	14.18464
1.8	19.20583	18.13332	19.01645	17.64201

Таким образом, отклонение точных решений (таблицы 2) от решений (таблицы 5) имеют незначительную погрешность, вызванную способом нахождения производных и точностью табличных данных.

### Заключение

Рассмотрена численная реализация метода идентификации линейных стационарных динамических систем по результатам проведенных измерений фазовых координат системы на некотором промежутке времени при входном синусоидальном сигнале. Идентификация согласно изложенному подходу позволяет восстановить исходную систему по заданным решениям некоторой задачи Коши. В общем случае, производя идентификацию по табличным данным некоторой Задачи Коши, получили отклонения, связанные с точностью табличных данных и выбранного метода интерполяции полиномами Лагранжа.

### Литература

1. Мижидон А. Д., Мадаева Е. А. Об одном подходе к идентификации линейных динамических систем // Вестник ВСГУТУ. – 2014. – № 3. – С. 5–12.
2. Мижидон А. Д., Мадаева Е. А. Метод идентификации линейных динамических систем по входному синусоидальному воздействию // Научный вестник НГТУ. – 2015. – № 1. – С. 62–75.
3. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 331 с.

---

4. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.

#### References

1. Mizhidon A. D., Madaeva E. A. Ob odnom podkhode k identifikatsii lineinykh dinamicheskikh system [One approach to the identification of linear dynamic systems]. *Vestnik Vostochno-Sibirskogo gosudarstvennogo universiteta tekhnologii i upravleniya – Bulletin of East Siberian State University of Technology and Management*. 2014. No. 3. Pp. 5–12.

2. Mizhidon A. D., Madaeva E. A. Metod identifikatsii lineinykh dinamicheskikh sistem po vkhodnomu sinusoidal'nomu vozdeistviyu [The method of linear dynamic system identification by input sinusoidal action]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta – Science Bulletin of Novosibirsk State Technological University*. 2015. No. 1. Pp. 62–75.

3. Pontryagin L. S. *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary differential equations]. Moscow: Nauka, 1974. 331 p.

4. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-Posed Problems]. Novosibirsk: Siberian Scientific publ., 2009, 457 p.

УДК 537.523

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-83-88

## НЕЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНОТОЧНЫХ КАТОДНЫХ УЗЛОВ ГЕНЕРАТОРОВ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

© Цыдыпов Балдандоржо Дашиевич

доктор технических наук, ведущий научный сотрудник Института физического материаловедения СО РАН

Россия, 670047, Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, 6, e-mail: tsydyповbd@rambler.ru

© Аветян Мактах Арсеновна

аспирант Института физического материаловедения СО РАН

Россия, 670047, Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, 6, e-mail: magdaavetian@mail.ru

В работе представлены постановка и метод решения электрофизической задачи с нелинейными граничными условиями для катодных узлов плазмотронов.

**Ключевые слова:** энергообмен, генератор, низкотемпературная плазма, плазмотрон, плотность тока.

## NONLINEAR ELECTROPHYSICAL PROBLEM FOR HIGH-CURRENT CATHODE ASSEMBLIES IN GENERATORS OF LOW-TEMPERATURE PLASMA

**Baldandorzho D. Tsydyпов**

DSc, Institute of Physical Materials Science, Buryat Scientific Center, Siberian Branch of Russian Academy of Science

6 Sakhyanovoy st., Ulan-Ude 670047, Russia

**Maktakh A. Avetyan**

Research Assistant, Institute of Physical Materials Science, Buryat Scientific Center, Siberian Branch of Russian Academy of Science

6 Sakhyanovoy st., Ulan-Ude 670047, Russia

The article presents formulation and method of solving the electrophysical problem with nonlinear boundary conditions for cathode assemblies of plasmotrons.

**Keywords:** energy transfer, generator, low-temperature plasma, plasmatron, current density.

### Введение

В физике и технике сильнотоочных плазменных систем (СПС) актуальной задачей является проблема повышения работоспособности и ресурса катодных узлов, функционирующих в экстремальных условиях по уровням тепловых потоков и плотностей тока [1; 2]. Решение ее требует многопараметрической оптимизации токовой нагрузки, радиационного и теплового потоков из плазмы разряда, электро- и теплофизических свойств материалов, геометрических размеров и характеристик теплообмена в конструкциях катодного узла. В настоящее время в СПС наиболее работоспособными показали себя электродные структуры, состоящие из стержневого электрода (вставки) из тугоплавкого металла, запрессованного в интенсивно охлаждаемый корпус катододержателя (обоймы) [3; 4]. В мощных плазменных установках, например, в плавильных плазмотронах до 15 кА [5–8] токовая нагрузка внутри катодного узла становится решающим фактором функционирования и ресурса работы конструкции. Экспериментальная оптимизация катодных узлов по токовому режиму является трудоемким и дорогостоящим процессом и не обладает обобщенностью полученных результатов.

Теоретический подход к данной проблеме состоит в решении краевой электрофизической задачи, установлении закономерностей и вклада джоулевой диссипации в энергообмене катодного узла. В работах [9–13] краевая задача решается в различных постановках для катода-

вставки и не рассматривается прохождение тока в объеме массивного катододержателя – обоймы.

В данной работе впервые краевая электрофизическая задача решается в строгой постановке для катодного узла, т.е. для системы «вставка – обойма» в целом.

**Постановка задачи**

На рис. 1 показана полуплоскость осевого сечения расчетной модели катодного узла СПС, составленного из двух соосно сопряженных элементов цилиндрической симметрии. На торец стержневого катода I в пределах контакта с плазмой разряда размером  $r_0$  поступает электрический ток с плотностью:  $j_0 = F(r)$ , где  $F(r)$  – в общем случае известная функция,  $r$  и  $z$  – цилиндрические координаты.

Теоретическое исследование стационарного распределения потенциала электрического поля в катодном узле состоит в решении уравнения неразрывности тока:

$$\operatorname{div} j_c = 0 \tag{1}$$

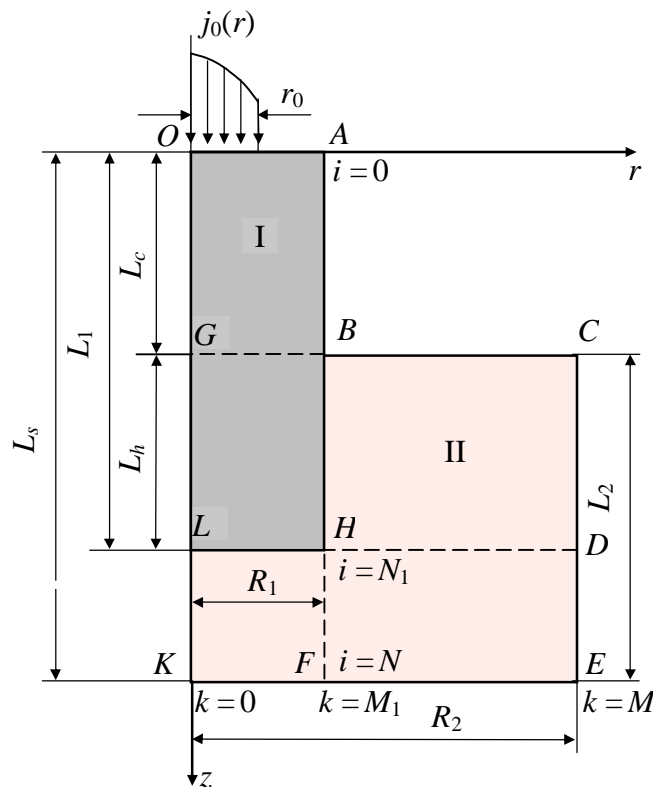


Рис. 1. Расчетная модель катодного узла

I – катод (вставка), II – катододержатель (обойма)

Для рассматриваемой осесимметричной модели уравнение (1) в двумерном приближении примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r}{\rho(T)} \frac{\partial U}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\rho(T)} \frac{\partial U}{\partial z} \right] = 0, \tag{2}$$

где  $j_c = \sqrt{j_r^2 + j_z^2}$ ,  $j_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial r}$  и  $j_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial z}$ .

Граничные условия к уравнению (2) следующие:

- 1) на горячем торце катода (линия  $OA$ )

$$\frac{1}{\rho_1(T)} \frac{\partial U(r,0)}{\partial z} = \begin{cases} -\frac{I}{\pi r_0^2}, & 0 \leq r \leq r_0 \\ 0, & r_0 < r \leq R_1 \end{cases} \quad (3)$$

- 2) на горячем торце катододержателя ( $BC$ )

$$\frac{\partial U(r, L_c)}{\partial z} = 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (4)$$

- 3) на холодном торце катододержателя ( $KE$ )

$$U(r, L_s) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_2 \quad (5)$$

- 4) на оси катодного узла ( $OK$ )

$$\frac{\partial U(0, z)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq z \leq L_s \quad (6)$$

- 5) на цилиндрической поверхности катода ( $AB$ )

$$\frac{\partial U(R_1, z)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq z \leq L_c \quad (7)$$

- 6) на цилиндрической поверхности катододержателя ( $CE$ )

$$U(R_2, z) = 0, \quad L_c \leq z \leq L_s \quad (8)$$

В выражениях (2) – (8) приняты следующие обозначения:

$\rho_{1,2}(T)$  – удельное электросопротивление материалов катодного узла соответственно катода и обоймы;  $U$  – потенциал электрического поля;  $I$  – разрядный ток;  $j_1, j_2$  – плотность тока в катоде и обойме соответственно.

На контакте двух металлов поставлены граничные условия 4-го рода:

$$U_1 = U_2, \quad \sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{n}} = \sigma_2 \frac{\partial U_2}{\partial \mathbf{n}}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{n}$  – нормаль к внутренней границе, направленная вдоль  $z$  на поверхности  $LH$  или вдоль  $r$  на  $BH$  (см. рис. 1).

### Метод решения

Электрофизическая задача в рассмотренной выше постановке аналитически не решается. Поэтому используем метод конечных разностей [14]. Для получения стационарного распределения электрического потенциала внутри катодной структуры вместо уравнения (2) решаем нестационарное уравнение неразрывности тока методом установления в следующем виде:

$$\frac{\partial U_{1,2}}{\partial \tau} = \sigma_{1,2} \left[ \frac{\partial^2 U_{1,2}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U_{1,2}}{\partial r} \right) \right]. \quad (10)$$

Для придания алгоритму решения универсальности следует перейти к безразмерным переменным. После обезразмеривания уравнение (10) запишется как

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \left( \frac{\partial^2 y}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial y}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tilde{r}^2} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial x}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 x}{\partial \tilde{r}^2} \right) \quad (12)$$

соответственно для элементов I и II электродной структуры.

Область интегрирования I – II, занимаемую катодным узлом, разбиваем пространственной сеткой

$$\omega_{h_1, h_2} = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2} \begin{cases} z_i = ih_1, & h_1 > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N; \quad Nh_1 = L_s \\ r_k = kh_2, & h_2 > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M; \quad Mh_2 = R_2 \end{cases}$$

с шагами  $h_1$  по координате  $z$  и  $h_2$  по  $r$ . По временной координате введем равномерную сетку  $\bar{\omega}_{\tau_0} = \{t_j = j\tau_0, \tau_0 > 0, j = 0, 1, 2, \dots\}$  с шагом  $\tau_0$ .

Значение сеточной функции  $y$  (или  $x$ ) в некотором узле сетки  $(z_i, r_k, t_j)$  обозначим  $y_{i,k}^j$ . Соответственно  $y(z_{i\pm 1}, r_{k\pm 1}, t_j) = y_{(i,k)\pm 1}^j$ ,  $y(z_i, r_k, t_{j+1}) = y_{i,k}^{j+1}$ .

На 4-х точечном шаблоне расчетной пространственно-временной сетки дифференциальное уравнение (10) аппроксимируется разностным уравнением:

$$y_{i,k}^{j+1} - y_{i,k}^j = (y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}) / (h_1 / L_s)^2 + (y_{k+1}^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}) / 2k(h_2 / R_2)^2 + (y_{k-1}^{j+1} - 2y_k^{j+1} + 2y_{k+1}^{j+1}) / (h_2 / R_2)^2, \tag{13}$$

где  $\sigma(y_k^j)$  – удельная проводимость на  $j$ -том временном слое. Погрешность аппроксимации имеет порядок  $O(h^2 + \tau)$ . Применяя локально-одномерную схему прогонки метода дробных шагов, уравнение (13) разбиваем на два одномерных:

$$y_i^{j+1} - y_i^j = 2(y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}) / (h_1 / L_s)^2 \tag{14}$$

$$y_k^{j+1} - y_k^j = 2((y_{k+1}^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}) / 2k(h_2 / R_2)^2 + (y_{k+1}^{j+1} - 2y_k^{j+1} + 2y_{k+1}^{j+1}) / (h_2 / R_2)^2) \tag{15}$$

соответственно по координатам  $z$  и  $r$ . При прогонке разностные уравнения (14) и (15) приводятся к алгебраической системе уравнений типа:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i \tag{16}$$

с условиями  $A_i, B_i > 0, C_i > A_i + B_i$ , обеспечивающими разрешимость системы методом прогонки. Решение задачи ищем в виде:

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \tag{17}$$

где коэффициенты  $\alpha_{i+1}$  и  $\beta_{i+1}$  вычисляются по рекуррентным соотношениям

$$\alpha_{i+1} = B_i / (C_i - A_i \alpha_i), \quad \beta_{i+1} = (F_i - A_i \beta_i) / (C_i - A_i \alpha_i) \tag{18}$$

Значения начальных прогоночных коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  определяются при помощи одного из граничных условий области интегрирования. Затем из второго граничного условия находим значения сеточной функции  $y_N$  и по формуле (17) вычисляем все остальные значения  $y_i$  вплоть до  $y_0$ . При этом переход от временного слоя  $j$  на слой  $(j+1)$  осуществляется последовательным решением однородных уравнений (14) и (15) по соответствующим координатам.

Так как катодный узел состоит из сопряженных элементов разной геометрии, необходимо разбить его на несколько простых областей и для каждой решать свой прогоночный цикл, «сшивая» соседние области удовлетворением единым граничным условиям. Для прогонки по координате  $z$  выделяются области *OAFK* и *BCEF*, а по координате  $r$  области *OABG*, *GCDL* и *LDEK*. Следует отметить особенность прогонки по областям *OAFK* и *GCDL*. Здесь используется метод встречных прогонок: из граничных условий вычисляются начальные

коэффициенты  $\alpha_{II}$  и  $\beta_{II}$  для первого элемента,  $\alpha_{III}$  и  $\beta_{III}$  для второго элемента, а искомая функция на их границе определяется из условий сопряжения.

Составленный алгоритм позволяет рассчитать стационарное распределение электрического потенциала в составном катодном узле.

### Литература

1. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Вводный том IV / под ред. В. Е. Фортова. – М.: Наука, 2000. – С. 153–459.
2. Генерация низкотемпературной плазмы и плазменные технологии: проблемы и перспективы / Г. Ю. Даутов [и др.]. – Новосибирск: Наука, 2004. – 464 с.
3. Электродуговые генераторы термической плазмы / М. Ф. Жуков [и др.]. – Новосибирск: Наука, 1999. – 712 с.
4. Fauchais P., Vardelle A. Thermal plasmas // IEEE Trans. on Plasma Sci. – 1997. – V. 25, № 6. – P. 1258–1280.
5. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Вводный том III / под ред. В. Е. Фортова. – М.: Наука, 2000. – С. 1–212.
6. Плазмотроны. Исследования. Проблемы / под ред. М. Ф. Жукова. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1995. – 203 с.
7. Бортничук Н. И., Крутянский М. М. Плазменно-дуговые плавильные печи. – М.: Энергоиздат, 1981. – 120 с.
8. Дембовский В. Плазменная металлургия. – М.: Металлургия, 1981. – 280 с.
9. Математическое моделирование катодных процессов / А. М. Зимин, И. П. Назаренко, И. П. Паневин, В. И. Хвесюк. – Новосибирск: Наука, 1993. – 194 с.
10. Цыдыпов Б. Д. Динамика нестационарных процессов в сильнотоочных плазменных системах. – Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2003. – 268 с.
11. Цыдыпов Б. Д. Нестационарные тепловая и диффузионная задачи для катодных узлов сильнотоочных плазменных систем // Вестник ВСГУТУ. – 2010. – № 4. – С. 33–37.
12. Цыдыпов Б. Д. Нелинейная термическая задача для системы сопряженных элементов. Метод решения // Вестник Бурятского государственного университета. – 2011. – Вып. 9. – С. 280–284.
13. Цыдыпов Б. Д., Симаков И. Г. Тепловое состояние катодных узлов сильнотоочных плазменных систем // Теплофизика высоких температур. – 2011. – Т. 49, № 4. – С. 663–670.
14. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

### References

1. *Entsiklopediya nizkotemperaturnoi plazmy* [Encyclopedia of low-temperature plasma]. Moscow: Nauka, 2000. V. 4. Pp. 153–459.
2. Dautov G. Yu., Timoshevskii A. N., Uryukov B. A. et al. *Generatsiya nizkotemperaturnoi plazmy i plazmennye tekhnologii: problemy i perspektivy* [Generation of low-temperature plasma and plasma technologies: problems and prospects]. Novosibirsk: Nauka, 2004. 464 p.
3. Zhukov M. F., Zasyupkin I. M., Timoshevskii A. N. et al. *Elektrodugovye generatory termicheskoi plazmy* [Electric arc thermal plasma generators]. Novosibirsk: Nauka, 1999. 712 p.
4. Fauchais P., Vardelle A. Thermal plasmas. *IEEE Trans. on Plasma Sci.* 1997. V. 25. No. 6. Pp. 1258–1280.
5. *Entsiklopediya nizkotemperaturnoi plazmy* [Encyclopedia of low-temperature plasma]. Moscow: Nauka, 2000. V. 3. Pp. 1–212.
6. *Plazmotrony. Issledovaniya. Problemy* [Plasmatrons. Research. Problems]. Novosibirsk: SB RAS publ., 1995. 203 p.
7. Bortnichuk N. I., Krutyanskiy M. M. *Plazmenno-dugovye plavil'nye pechi* [Plasmic arc furnaces]. Moscow: Energoizdat, 1981. 120 p.
8. Dembovskii V. *Plazmennaya metallurgiya* [Plasmic metallurgy]. Moscow: Metallurgiya, 1981. 280 p.
9. Zimin A. M., Nazarenko I. P., Panevin I. P., Khvesyuk V. I. *Matematicheskoe modelirovanie katodnykh protsessov* [Mathematical modeling of cathode processes]. Novosibirsk: Nauka, 1993. 194 p.

10. Tsydypov B. D. *Dinamika nestatsionarnykh protsessov v sil'notochnykh plazmennykh sistemakh* [The dynamics of non-stationary processes in heavy-current plasma systems]. Ulan-Ude: BSC SB RAS publ., 2003. 268 p.

11. Tsydypov B. D. Nestatsionarnye teplovaya i diffuzionnaya zadachi dlya katodnykh uzlov sil'notochnykh plazmennykh sistem [Unsteady heat and diffusion problems for cathode assemblies of heavy-current plasma systems]. *Vestnik Vostochno-Sibirskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta – Bulletin of East Siberian State Technological University*. 2010. No. 4. Pp. 33–37.

12. Tsydypov B. D. Nelineinaya termicheskaya zadacha dlya sistemy sopryazhennykh elementov. Metod resheniya [Nonlinear thermal problem for a system of conjugate elements. The method of solution]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2011. V. 9. Pp. 280–284.

13. Tsydypov B. D., Simakov I. G. Teplovoe sostoyanie katodnykh uzlov sil'notochnykh plazmennykh sistem [Thermal state of cathode assemblies of heavy-current plasma systems]. *Teplofizika vysokikh temperatur – Thermal physics of High Temperatures*. 2011. V. 49. No. 4. Pp. 663–670.

14. Samarskii A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of differential schemes]. Moscow: Nauka, 1977. 656 p.



## 4. Информационные системы и технологии

УДК 656

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-89-95

### СОЗДАНИЕ ИНФРАСТРУКТУРЫ ЕДИНОГО ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА УЛАН-БАТОРСКОЙ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ

© **Мунхбуянь Дорждэрэм**

аспирант Иркутского государственного университета путей сообщения, инженер АО «УБЖД»

Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15, e-mail: shg.munh@gmail.com

© **Данеев Алексей Васильевич**

доктор технических наук, профессор Иркутского государственного университета путей сообщения

Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15, e-mail: daneev@mail.ru

АО «УБЖД» первым в Монголии реализовало стратегию развития железнодорожного транспорта, направленную на создание инфраструктуры с внедрением современных телекоммуникационной среды с высокоскоростными цифровыми системами передачи на базе ВОЛС. В результате модернизации и расширения технологии с аналоговой на цифровую АО «УБЖД» совместно с международными компаниями ТрансТелеком (РФ) и Чайна Юником (КНР) объявила о совместном выходе на трансконтинентальный мировой рынок. В статье выявлены проблемные вопросы развития информационной сети АО «УБЖД» в постановке задачи.

**Ключевые слова:** телекоммуникационная сеть, отказоустойчивость, информационная сеть.

### CREATION OF COMMON INFORMATION SPACE INFRASTRUCTURE OF ULAANBAATAR RAILWAY

**Munhbuyan Dorzhderem**

Research Assistant, Irkutsk State University of Railway Transport  
15 Chernyshevskogo st., Irkutsk 664074, Russia

**Aleksei V. Daneev**

DSc, Professor, Irkutsk State University of Railway Transport  
15 Chernyshevskogo st., Irkutsk 664074, Russia

JSC Ulan Bator Railway first in Mongolia implemented strategy of railway transport development, aimed at creating infrastructure with introduction of modern telecommunicational environment and high-speed digital transmission systems based on fiber optic cable. As a result of modernization and expansion of technology from analogue to digital, JSC Ulan Bator Railway together with international operator TransTeleCom (RF) and ChaynaYunikom (PRC) announced the joint entry to transcontinental world market. We revealed the problems of information network development of JSC Ulan Bator Railway.

**Keywords:** telecommunicational network, fault tolerance, information network.

#### Введение

Улан-Баторская железная дорога (УБЖД) уделяет значительное внимание эффективному развитию информационных технологий. Организация эффективного информационного обеспечения железнодорожного транспорта возможна лишь на базе современных информационных технологий, реализованных в виде корпоративной информационной сети [1–3]. Использование возможностей такой сети и развитие перспективных направлений ведомственной сети на Улан-Баторской железной дороге позволяет своевременно получать оперативно значимую информа-

цию, эффективно прогнозировать, осуществлять планирование и успешную реализацию мероприятий, связанных с повседневной деятельностью всей иерархии подразделений железной дороги. Информационно-телекоммуникационная система (ИТКС) УБЖД основана на интегрированной транспортной среде, обеспечивающей взаимодействие с телекоммуникационными системами железных дорог России и Китая, телекоммуникационными системами органов государственной власти.

Общей целью совершенствования и развития информатизации в рамках сети УБЖД является создание современной информационно-телекоммуникационной инфраструктуры для повышения эффективности деятельности железной дороги, обеспечения необходимой, надежной, качественной и оперативной информационной поддержкой, при безусловном выполнении требований информационной безопасности. При этом предусматривается открытая архитектура системы с возможностью дальнейшего совершенствования и развития сети.

### 1. Принципы построения ИТКС УБЖД

В целом роль ИТКС интегрированного типа в деятельности УБЖД существенно возрастает, поскольку она должна постоянно обеспечивать поддержание важнейшего, интегрального свойства – информационной устойчивости функционирования ИТКС в интересах УБЖД. Прекращение функционирования по какой-либо причине ИТКС или ее отдельных функционально важных компонентов приведет к тому, что соответствующие информационные ресурсы и сервисы станут недоступными пользователям, а реализация совокупности электронных информационных технологий деятельности УБЖД станет невозможной со всем вытекающим отсюда комплексом негативных последствий.

При разработке и создании ИТКС [4; 5] в основу положены следующие принципы информатизации деятельности УБЖД:

1. *Принцип системности*, состоящий в объединении разрозненных АБД и АИС в единую распределенную иерархическую систему, с возможностью автономной разработки и внедрения при обеспечении единых подходов и ведомственных стандартов.
2. *Принцип открытости*, состоящий в возможности подключения к единому информационному пространству (ЕИП) новых пользователей и источников информации, расширения предоставляемых сервисов и технологий без нарушения внутреннего функционирования ЕИП и ухудшения эксплуатационных характеристик.
3. *Принцип направленной эволюции*, состоящий в осуществлении взаимоувязанных процессов проектирования и поэтапной модернизации структурных составляющих системы, обеспечивающих ее постоянную адаптацию к изменяющимся требованиям пользователей.
4. *Принцип консолидации данных*, состоящий в приведении всех данных к единой терминологии, обеспечении их одинаковой интерпретации и точного сопоставления.
5. *Принцип безопасности данных*, состоящий в осуществлении организационных и технических мер, предотвращающих повреждение или потерю данных, а также их использование без соответствующих полномочий.
6. *Принцип достоверности и легитимности данных*, допускающий использование в оперативно-служебной деятельности только проверенных данных, полученных в соответствии с действующим законодательством.

### 2. Состав и структура ИТКС

Структура ИТКС представляет собой сложную территориально распределенную иерархическую телекоммуникационную систему, основная функция которой – хранение, передача и оперативный доступ к разнообразной информации на современном техническом уровне. Реализуя данную функцию, ИТКС играет роль консолидирующего фактора, объединяя УБЖД в единый, эффективно действующий, хорошо скоординированный организм.

Укрупненно в состав ИТКС входят следующие четыре компоненты: телекоммуникационная, информационно-технологическая, интеграционная составляющие и компонента информационной безопасности. В настоящее время реализованы первые две составляющие ИТКС, одновременно осуществляются проектные работы для дальнейшей реализации интеграционной составляющей и компоненты информационной безопасности.

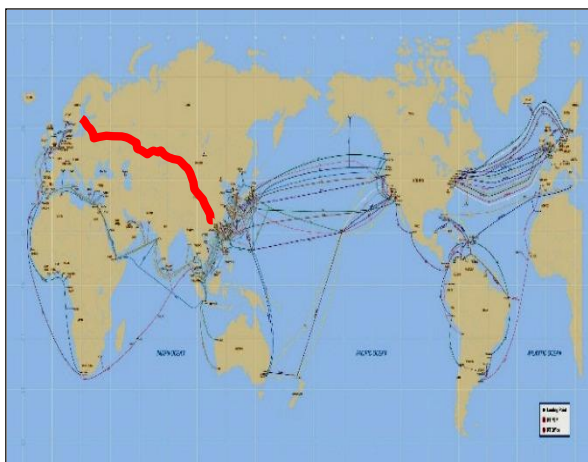
**Телекоммуникационная сеть.** АО «УБЖД» стало пионером по внедрению волоконно-оптических линий связи в Монголии, заменив аналоговую систему телекоммуникационной

связи на цифровую. Основа телекоммуникационной связи УБЖД определена установкой декадно-шаговой станции в середине 1950 г. На следующем этапе развития в конце 70-х годов введена в эксплуатацию координатная АТС в основных узловых станциях УБЖД.

В 1995 г. введены в эксплуатацию первые 5 цифровых телефонных станций из 18 станций производства Siemens типа Нисом300 с емкостью 5500 абонентов, а в 2005 г. введены в эксплуатацию 13 цифровых телефонных станций производства ZTE. В результате этой модернизации технологии АО УБЖД и перехода с аналогового на цифровое оборудование построена цифровая телекоммуникационная сеть на основе ВОЛС (1405 км), цифровая система передачи и коммутации. Таким образом сегодня цифровая телекоммуникационная сеть УБЖД имеет 8000 абонентов и является одним из двух операторов фиксированной связи в стране. В следствии внедрения цифровой телекоммуникационной сети расширен перечень услуг сети и повышено качество обслуживания.

Магистральный сегмент сети предоставляет услуги на международном и межгородском уровне по системам DWDM и SDH (10 Гигабит и 2.5 Гигабит) на основе ВОЛС. Первичная цифровая сеть связи строилась на системах передачи синхронной цифровой иерархии уровня STM4 и STM16 на 18-ти узловых станциях и на линейных 70-ти станциях и разъездов соответственно, обеспечивает услуги международной, межгородной и локальной связи со стыками взаимосоединения с другими операторами связи Монголии. Технологическая связь организована на базе цифровой телекоммуникационной сети. Технологическую связь АО «УБЖД» обеспечивает диспетчеризация управления движением поездов, перевозочным процессом и содержанием инфраструктуры автоматизации и связи, подвижного состава, пути и других хозяйств железнодорожного транспорта. Базой для функционирования сети технологической связи является телекоммуникационная сеть АО «УБЖД», которой уделялось стратегическое внимание. Уровень готовности для систем SDH составляет 99.999 %, а для систем DWDM – 99.99 %. Высокоскоростная система цифровых каналов DWDM и SDH (10 Гигабит и 2.5 Гигабит) имеет международный выход с другими оператор-компаниями связи РФ и КНР для транзитных каналов и интернет услуги. На основе скоростных цифровых каналов DWDM и SDH (10 Гигабит и 2.5 Гигабит). Расширен спектр предоставляемых услуг и стало возможным доставка пользователю больших объемов информации в реальном времени.

Использование единого информационного пространства на базе цифровых методов обработки информации, пакетной коммутации позволяет создавать инфокоммуникационные сети, предоставляющие пользователю набор современных информационных услуг. Развитию инфокоммуникационной технологии уделяет большое внимание и АО «УБЖД».



В результате модернизации таких технологий и перевода оборудования с аналогового на цифровое впервые в Монголии АО «УБЖД» совместно с международными оператор-компаниями ТрансТелеком (РФ) и Чайна Юником (КНР) объявила о выходе на мировой рынок. 14 апреля 2004 г. в столице Монголии в г. Улан-Баторе состоялась церемония открытия первого цифрового шелкового маршрута через Монголию, называемый ERMC между Европой и Азией.

**Созданная информационная сеть** является основой для создания информационного пространства, представляющей собой функциональное объединение средств информатизации и телекоммуникаций, поэтому основными направлениями государственной политики информатизации Монголии являются:

- развитие широкополосных и высокоскоростных линий связи,
- модернизация существующих и создание новых высокоскоростных транспортных сетей на базе ВОЛС,
- повышение устойчивости и надежности функционирования сетей.

В результате внедрения цифровой телекоммуникационной сети на протяжении 10 лет в период 1995–2005 гг. создалась основа информационной сети АО «УБЖД». Реализация цифровой технологии с применением ВОЛС и цифровых систем передачи была предпосылкой для создания информационной среды транспорта АО «УБЖД».

Стратегию развития информатизационной сети в АО «УБЖД» соответствует государственному политике в вышеотмеченных направлениях.

Функционирование информационной сети АО «УБЖД» направлено на обеспечение перевозочного процесса и управление информационным процессом предприятий АО «УБЖД». Информационная сеть дороги имеет территориально-распределенный характер и ее пользователями являются локальные сети организаций (77 предприятий) УБЖД, расположенных территориально друг от друга на значительных расстояниях и нуждающихся в обмене информацией через центральный сервер (источник ресурсов информации), предоставляемых пользователям. Поэтому в соответствии с масштабом производственного подразделения, в пределах которого действует информационная сеть, ее можно предоставить в виде корпоративной сети, называемой сетью масштаба предприятия, плавающих в телекоммуникационной среде.

Информационная сеть включает в себе три подсети по территориальному признаку (северный, центральный, южный) и связанных между собой магистральной цифровой выделенной линией. Данная сеть имеет 15 узловых станций вдоль железной дороги с ответвлением потоков данных до конечных потребителей в каждом пункте узлов. 30 % конечных потребителей подключаются к сети с помощью оптического кабеля, а 70 % подключаются к сети через физический кабель с меньшей производительностью, чем у магистральных каналов.

Функционирование информационной сети АО «УБЖД» связано с следующими проблемами и направлено на решение следующих задач:

1. Сетевая топология нынешней информационной сети является одноуровневой, у которой производительность сети низкая.
2. Основное сетевое оборудование работало безостановочно, круглосуточно в течение 10 лет (физически и морально очень устарело).
3. Значительная часть этого оборудования снято с производства и остановлена представлением технической поддержки.

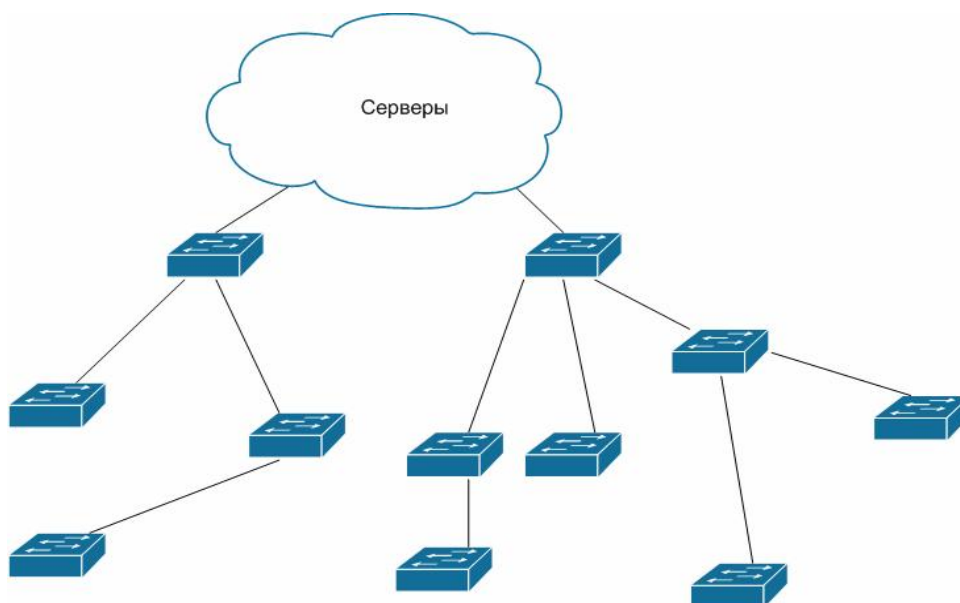


Рис. 2. Топология информационной сети АО «УБЖД»

4. Не соответствует стандарту и не удовлетворяет современным требованиям структуры центра данных.

Атрибутом такой крупномасштабной сети, как информационная сеть УБЖД, является высокая степень гетерогенности: нельзя удовлетворить потребности сотен пользователей с помощью однотипных аппаратных средств. Неоднородные части корпоративной сети должны работать как единое целое, представляя пользователям по возможности прозрачный доступ ко всем необходимым ресурсам.

**Функционально** ИТКС разделена на ряд технологических уровней, которые включают в себя различные типы коммуникационных узлов связи и передачи данных:

**Ядро ИТКС** – соединяет все коммуникационные узлы связи и передачи данных. Основная задача ядра состоит в обеспечении передачи информационных потоков. Ядро образует магистральную сеть передачи данных с широкополосными каналами связи и имеет внутреннюю иерархию в соответствии с административно-территориальным делением. На уровне ядра целесообразно организовывать межведомственное взаимодействие ИТКС;

**уровень распределения** – образуется пограничным оборудованием, находящимся на стыке между высокоскоростным уровнем ядра и уровнем доступа. Вся интеллектуальная обработка информации, связанная с маршрутизацией, подсистемой администрирования и мониторинга, формирования единого адресного пространства, сосредоточена на данном функциональном уровне;

**уровень доступа** – в состав этого уровня входят коммуникационные узлы связи и передачи данных, локально-вычислительные сети и коммуникационное оборудование ЛВС. Основная функция данного уровня состоит в обеспечении связи оборудования пользователей. Оборудование доступа совместно с каналами связи образует сеть доступа.

В состав коммуникационных узлов связи, и передачи данных входит как оборудование уровня ядра, так и оборудование уровней распределения и доступа.

**Основными элементами интеграционной инфраструктуры ЕИТКС** являются *унифицированные средства сопряжения (УСС), позволяющие обеспечить:*

- регламентированное информационное взаимодействие существующих *автоматизированных информационных систем (АИС) и специализированных территориально-распределённых систем (СТРАС)* различных служб и подразделений УБЖД между собой;

- контролируемый доступ пользователей к *информационным ресурсам (ИР)*;

- формирование и доступ к ИР на основе принятых в ИТКС единой модели данных и единой системы классификации и кодирования;

- контроль и управление функционированием;

- требуемый уровень информационной безопасности.

Внедрение ИТКС УБЖД и накопление информации в соответствующих базах данных влечет появление различных угроз безопасности сети. Угроза безопасности – это возможность осуществления действия направленного против объектов защиты, проявляемая в опасности искажений и потерь информации, либо ее части подлежащей защите в силу закона (составляющей государственную тайну и конфиденциальной информации). Информация, обрабатываемая ИТКС, при условии предоставления работникам УБЖД возможности выхода с помощью ИТКС в сеть Интернет, особенно уязвима. Существенному повышению возможности несанкционированного использования или модификации данных, введению в оборот ложной информации в настоящее время способствуют:

- увеличение объемов обрабатываемой, передаваемой и хранимой в компьютерах информации;

- сосредоточение в базах данных информации различного уровня секретности (конфиденциальности);

- использование информационных ресурсов других учреждений и организаций и ресурсов глобальных телекоммуникационных сетей, последние применяются также в качестве транспортной среды для передачи данных;

- расширение доступа круга пользователей к информации, хранящейся в базах данных, и к ресурсам вычислительной сети;

- увеличение числа удаленных рабочих мест;

- широкое использование для связи глобальной сети Internet и различных каналов связи;

- автоматизация обмена информацией между компьютерами пользователей.

Для организации защиты информационных ресурсов организации и безопасного их использования необходимо решить **ряд задач:**

- разработать политику информационной безопасности УБЖД;
- защитить данные ограниченного доступа распространения, обеспечив конфиденциальность, целостность и подлинность информации;
- обеспечить возможность безопасного доступа к открытым ресурсам внешних сетей и общения с их пользователями;
- обеспечить защиту отдельных наиболее значимых информационных систем независимо от используемых в них каналов передачи данных;
- обеспечить защищенный удаленный доступ персонала к информационным ресурсам сети ИТКС;
- обеспечить надежное централизованное управление средствами сетевой защиты.

### 3. Основные направления развития ИТКС УБЖД

Основными направлениями совершенствования и развития информатизации, способствующими достижению поставленной цели и вытекающих из нее задач на основе последовательно-го, целенаправленного применения системного подхода, являются:

- создание перспективной, целостной ИТКС как системы интегрированного типа, представляющей собой семейство систем, подсистем и комплексов, тесно взаимодействующих между собой в соответствии с установленными стандартами взаимодействия;
- унификация технологии обмена информацией в ИТКС, разработка единых форматов электронных документов и информационных сообщений (с учетом современных мировых тенденций развития электронного обмена данными);
- повышение уровня централизации обработки и хранения всей значимой информации ИТКС, относящейся к деятельности УБЖД. Создание соответствующих комплексов программно-технических средств централизованной обработки и хранения данных;
- обеспечение полноты, точности и достоверности, согласованности и непротиворечивости, своевременности и конфиденциальности результатов обработки информации;
- консолидация информационных ресурсов и обеспечение на этой основе возможности полноценной аналитической обработки информации с использованием новейших технологий;
- правильно структурированное, модульное построение ИТКС с достижением максимально возможной унификации, стандартизации и типизации;
- использование типовых программно-технических средств, эффективно поддерживающих выполнение всего комплекса работ и аналитической обработки информации в ИТКС в интересах УБЖД;
- применение информационных технологий нового поколения, включая технологии хранения данных, оперативного анализа данных, глубокой аналитической обработки информации, интранет-технологии и т. д.;
- использование промышленных технологий разработки и сопровождения прикладного программного обеспечения, гарантирующих эффективность разработки, качество получаемого продукта, возможность его дальнейшего сопровождения без участия разработчика;
- неукоснительное выполнение в ИТКС всего комплекса требований по обеспечению необходимого уровня информационной безопасности (для открытой, конфиденциальной, секретной и сов. секретной информации - в зависимости от специфики и потребностей конкретных систем, подсистем, комплексов в составе ИТКС);
- минимизация совокупной стоимости владения целостной ИТКС в течение ее жизненного цикла.

### Заключение

Организация эффективного информационного обеспечения УБЖД возможна лишь на базе современных информационных технологий, реализованных в виде корпоративной информационной сети, что и предусмотрено при создании ИТКС УБЖД.

Использование имеющихся возможностей ИТКС УБЖД, развитие перспективных направлений использования ведомственной сети позволит своевременно получать оперативно-значимую информацию, эффективно прогнозировать, осуществлять планирование и успешную реализацию мероприятий, связанных с повседневной деятельностью всей иерархии подразделений УБЖД.

### Литература

1. Пятибратов А. П. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации. – М.: Инфра-М, 2008. – 628 с.
2. Корольков П. Б. Элементы архитектуры, функционирования и проектирования информационно-вычислительных сетей. – Иркутск: ИрГУПС, 2006. – 44 с.
3. Бат-Эрдэнэ Ш., Буяндэлгэр Б. Государственная политика информатизации и внедрения инфокоммуникационной технологии Монголии // Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2010. – С. 59–63.
4. Данеев А. В., Воробьев А. А. Методика формирования комплекса средств управления сложной организационно-технической системой. – Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем // Иркутск: ИрГУПС, 2014. – Вып. 11.
5. Данеев А. В., Ткаченко А. Ю. Метод консолидации данных региональных серверов комплекса управления локомотивным хозяйством // Транспортная инфраструктура Сибирского региона: матер. пятой междунар. науч.-практ. конф. – Иркутск: ИрГУПС, 2014. – Т. 1. – С. 512–516.

### References

1. Pyatibratov A. P. *Vychislitel'nye sistemy, seti i telekommunikatsii* [Computer systems, networks and telecommunications]. Moscow: Infra-M, 2008. 628 p.
2. Korol'kov P. B. *Elementy arkhitektury, funktsionirovaniya i proektirovaniya informatsionno-vychislitel'nykh setei* [Elements of architecture, functioning and designing of information networks]. Irkutsk: Irkutsk State University of Railway Transport, 2006. 44 p.
3. Bat-Erdene Sh., Buyandelger B. Gosudarstvennaya politika informatizatsii i vnedreniya infokommunikatsionnoi tekhnologii Mongolii [Mongolian State policy of informatization and implementation of informational and communicational technologies]. *Infokommunikatsionnye i vychislitel'nye tekhnologii i sistemy – Info-communicational and computer technologies and systems*. Ulan-Ude: Buryat State University publ., 2010. Pp. 59–63.
4. Daneev A. V., Vorob'ev A. A. Metodika formirovaniya kompleksa sredstv upravleniya slozhnoi organizatsionno-tekhnicheskoi sistemoi [Methodology of complex organizational and technical system controls formation]. *Informatsionnye tekhnologii i problemy matematicheskogo modelirovaniya slozhnykh system – Informational technologies and the problems of complex systems mathematical modeling*. Irkutsk: Irkutsk State University of Railway Transport, 2014. V. 11.
5. Daneev A. V., Tkachenko A. Yu. Metod konsolidatsii dannykh regional'nykh serverov kompleksa upravleniya lokomotivnym khozyaistvom [The method of regional servers data consolidation of locomotive economy control complex]. *Transportnaya infrastruktura Sibirskogo regiona – Transport infrastructure in Siberia*. Proc. 5<sup>th</sup> Int. sci. and pract. conf. Irkutsk: Irkutsk State University of Railway Transport, 2014. V. 1. Pp. 512–516.

УДК 004.82

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-96-102

## ПОСТРОЕНИЕ БАЗ ЗНАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ГРАММАТИК

© **Кравченко Вячеслав Александрович**

старший преподаватель кафедры «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления  
Россия, 670013, ул. Ключевская, 40в, e-mail: krawyach@mail.ru

© **Ширапов Дашадондок Шагдарович**

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления

Россия, 670013, ул. Ключевская, 40в, e-mail: shir48@mail.ru

Статья посвящена вопросам автоматизированного поиска решения задач с применением функциональных грамматик. Рассматривается алгоритм и особенности построения баз знаний для Решателя задач на основе метода использования функциональных грамматик. В качестве примера построения базы знаний применяется теория линейных стационарных радиотехнических систем.

**Ключевые слова:** инженерия знаний, решатель задач, функциональное программирование.

## CREATION OF KNOWLEDGE BASES FOR SOLVING PROBLEMS BY THE METHOD OF FUNCTIONAL GRAMMARS

**Vyacheslav A. Kravchenko**

Senior Lecturer, East Siberian State University of Technology and Management  
40v Kluchevskaya st., Ulan-Ude 670013, Russia

**Dashadondok Sh. Shirapov**

DSc, Professor, Department "Electronic computing system", East Siberian State University of Technology and Management

40v Kluchevskaya st., Ulan-Ude 670013, Russia

In the article the issues of automated search for solving the problems with help of functional grammars were considered. We studied the algorithm and features of knowledge bases creation for a problem solver based on the functional grammars method. As an example of knowledge base creation the theory of linear stationary radio engineering systems was used.

**Keywords:** knowledge engineering, problem solver, functional programming.

### Введение

Целью статьи является описание правил построения баз знаний для разработанного ранее Решателя задач на основе метода использования функциональных грамматик [1]. Данный решатель в качестве способа представления знаний использует функциональные грамматики профессора Тузова [2]. Результатом работы решателя является суперпозиция функций, которую можно использовать в качестве программы для ЭВМ на функциональном языке программирования, например на ЛИСПе [3]. Это может быть применено для создания обучающихся систем принятия решений и систем генерирования программ.

### 1. Состав базы знаний

База знаний для разработанного Решателя представляет собой неполную функциональную грамматику:

$$G = (V, P, F),$$

где  $V$  – алфавит символов, представляющих собой все понятия рассматриваемой теории;



$P$  – конечное множество правил вывода (продукций), связывающих между собой все понятия рассматриваемой теории в виде:  $A \rightarrow \varphi \{f\}$ , где  $A$  (левая часть) – один символ из множества  $V$ ,  $\varphi$  (правая часть продукции) – цепочка символов из объединенного алфавита  $V$ , а  $f$  – функция из множества  $F$ ;

$F$  – конечное множество функций вывода  $f$ , которые сопоставлены правилам из множества  $P$  для обозначения выполняемых действий над правой частью правила для получения его левой части.

На этапе постановки задачи Решатель на основе цели и исходных данных задачи производит преобразование неполной функциональной грамматики базы знаний к полному виду:

$$G = (V, P, F) \rightarrow G = (V_T, V_N, P, F, S),$$

где  $V_T$  – конечный алфавит терминальных символов (терминалов), определяющих известные из условия задачи понятия рассматриваемой теории;

$V_N$  – конечный алфавит нетерминальных символов (нетерминалов), не пересекающийся с  $V_T$  и обозначающий неизвестные понятия;

$S$  – начальный нетерминальный символ (аксиома) из множества  $V_N$ , определяющий цель решения.

## 2. Этапы построения базы знаний

Для создания базы знаний для Решателя задач требуется пройти следующие этапы:

- 1) определить границы рассматриваемой теории;
- 2) выявить все понятия теории в рамках выбранных границ и составить алфавит символов  $V$ ;
- 3) выявить все законы, связывающие выбранные объекты предметной области, и составить набор правил  $P$ ;
- 4) расписать на функциональном языке программирования все функциональные зависимости, между объектами теории, согласно правилам  $P$ , т. е. определить множество функций  $F$ .

Первый этап подразумевает конкретизацию области знаний для сужения круга решаемых задач. Это позволяет ограничить сложность базы знаний в соответствии с назначением Решателя. Готовая база знаний всегда может быть расширена без ее кардинального изменения посредством добавления в нее новых символов, правил и функций. В этом заключается один из плюсов представления знаний в виде функциональных грамматик. Поэтому имеет смысл первоначально создавать простые базы знаний с возможностью их дальнейшей модернизации.

Второй этап заключается в выборе понятий в рамках определенной теоретической области. Каждому понятию сопоставляется один символ объединенного алфавита. Символы представляются в виде списочных структур, поэтому для них необходимо составить грамматики синтаксиса возможных значений. Тем самым решаются две задачи. Во-первых, задаются области допустимых значений символов, во-вторых, определяется вид параметров функций грамматики. Стоит отметить, что несколько символов могут иметь одинаковые грамматики.

Третий этап включает выявление всех связей между понятиями-символами и запись их в виде правил  $A \rightarrow \varphi \{f\}$ . В этом выражении,  $\varphi$  – набор понятий, которые при выполнении операции  $f$  приводят к определению символа  $A$ . На данном этапе операции  $f$  обозначаются произвольными символами, например  $f_1, f_2, f_3, \dots$ . Все правила оформляются в виде списка для использования функциональным языком программирования ЛИСП.

Четвертый этап заключается в написании на ЛИСПе всех функций, содержащихся в правилах  $P$  с учетом синтаксиса символов правой  $\varphi$  и левой  $A$  частей. Данный этап является самым трудоемким и позволяет представить решение в виде сгенерированной программы на языке ЛИСП.

## 3. Пример построения базы знаний

Рассмотрим процесс создания базы знаний на примере радиотехники линейных динамических систем.

Этап 1. Определение границ теории

Будем рассматривать теорию линейных динамических радиотехнических цепей в виде системы, состоящей из четырехполюсника, описываемого системным оператором  $T$ , на вход которого подается один сигнал  $u_{вх}(t)$ , а с выхода снимается реакция в виде другого сигнала  $u_{вых}(t)$ .

Четырехполюсник является пассивным и обладает Г-образной структурой. Он может содер-

жать активное, индуктивное и емкостное сопротивления в последовательно-параллельном соединении. Оператор Т выражается как через временные, так и через частотные характеристики.

Входной и выходной сигналы могут быть представлены во временной и частотной областях в виде рядов дискретных значений, выбранных в соответствии с теоремой Котельникова [4].

Этап 2. Выбор алфавита символов

В рамках определенных границ теории выделяем все возможные понятия и сопоставляем каждому из них символ грамматики (табл. 1).

Таблица 1

Алфавит символов функциональной грамматики

№	Характеристика линейной стационарной радиотехнической системы	Символ алфавита
	<i>Характеристики цепи Т</i>	
1	Принципиальная схема	<Схема>
2	Входное операторное сопротивление $Z_{ВХ}(p)$	<Сопр1>
3	Выходное операторное сопротивление $Z_{ВЫХ}(p)$	<Сопр2>
4	Переходная характеристика $g(t)$	<Перех>
5	Импульсная характеристика $h(t)$	<Импул>
6	Передачная характеристика $K(p)$	<Перед>
7	Частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$	<Кэфф>
8	Амплитудно-частотная характеристика $K(\omega)$	<АмпЧХ>
9	Фазочастотная характеристика $\varphi_K(\omega)$	<ФазЧХ>
	<i>Характеристики входного сигнала <math>u_{ВХ}(t)</math></i>	
10	Входной сигнал $u_{ВХ}(t)$	<Сигн1>
11	Спектральная плотность входного сигнала $U_{ВХ}(j\omega)$	<Спек1>
12	Амплитудный спектр входного сигнала $U_{ВХ}(\omega)$	<АмпС1>
13	Фазовый спектр входного сигнала $\varphi_{УВХ}(\omega)$	<ФазС1>
	<i>Характеристики выходного сигнала <math>u_{ВЫХ}(t)</math></i>	
14	Выходной сигнал $u_{ВЫХ}(t)$	<Сигн2>
15	Спектральная плотность выходного сигнала $U_{ВЫХ}(j\omega)$	<Спек2>
16	Амплитудный спектр выходного сигнала $U_{ВЫХ}(\omega)$	<АмпС2>
17	Фазовый спектр выходного сигнала $\varphi_{УВЫХ}(\omega)$	<ФазС2>

В итоге, алфавит символов грамматики получает вид:

$$V_{PT} = \left\{ \begin{array}{l} \langle \text{Схема} \rangle, \langle \text{Сопр1} \rangle, \langle \text{Сопр2} \rangle, \langle \text{Перех} \rangle, \langle \text{Импул} \rangle, \\ \langle \text{Перед} \rangle, \langle \text{Кэфф} \rangle, \langle \text{АмпЧХ} \rangle, \langle \text{ФазЧХ} \rangle, \langle \text{Сигн1} \rangle, \\ \langle \text{Спек1} \rangle, \langle \text{АмпС1} \rangle, \langle \text{ФазС1} \rangle, \langle \text{Сигн2} \rangle, \langle \text{Спек2} \rangle, \\ \langle \text{АмпС2} \rangle, \langle \text{ФазС2} \rangle \end{array} \right\}.$$

Далее для каждого символа определяем грамматику его синтаксиса. Для описания синтаксиса 17 выбранных символов требуется составить 8 грамматик (табл. 2).

Таблица 2

Синтаксис символов функциональной грамматики

Синтаксис/ обозначение	Символы алфавита	Описание синтаксиса
$G_{C1}$ / Схема	<Схема>	Принципиальная схема, выра- женная операторными сопротив- лениями
$G_{C2}$ / ДРФ	<Сопр1>, <Сопр2>, <Перед>	Дробно-рациональная функция
$G_{C3}$ / Функция	<Перех>, <Импул>	Функция, содержащая математи- ческие операции: сложение, вы- читание, умножение, деление, синус, косинус, экспонента
$G_{C4}$ / ДКФ	<Кэфф>	Комплексная дробно- рациональная функция
$G_{C5}$ / МДКФ	<АмпЧХ>	Модуль комплексной дробно- рациональной функции
$G_{C6}$ / АДКФ	<ФазЧХ>	Аргумент комплексной дробно- рациональной функции
$G_{C7}$ / Ряд	<Сигн1>, <Сигн2>, <АмпС1>, <АмпС2>, <ФазС1>, <ФазС2>	Ряд вещественных значений
$G_{C8}$ / РядК	<Спек1>, <Спек2>	Ряд комплексных значений

Ниже в качестве примера показан синтаксис  $G_{C2}$  для описания символов <Сопр1>, <Сопр2> и <Перед>:

$$G_{C2} = (V_{T C2}, V_{N C2}, P_{C2}, S_{C2});$$

$$V_{T C2} = \{0, 1, 2, \dots, 9, (, ), \_, \text{ДРФ}\};$$

$$V_{N C2} = \left\{ \begin{array}{l} \langle \text{Сопр1} \rangle, \langle \text{ДРФ} \rangle, \langle \text{числитель} \rangle, \langle \text{знаменатель} \rangle, \\ \langle \text{многочлен} \rangle, \langle \text{числа} \rangle, \langle \text{число} \rangle, \langle \text{цифра} \rangle \end{array} \right\};$$

$$P_{C2} = \{ \begin{array}{l} \langle \text{Сопр1} \rangle \rightarrow (\text{ДРФ} \_ \langle \text{ДРФ} \rangle), \\ \langle \text{ДРФ} \rangle \rightarrow \langle \text{числитель} \rangle \_ \langle \text{знаменатель} \rangle, \\ \langle \text{числитель} \rangle \rightarrow \langle \text{многочлен} \rangle, \\ \langle \text{знаменатель} \rangle \rightarrow \langle \text{многочлен} \rangle, \\ \langle \text{многочлен} \rangle \rightarrow (\langle \text{числа} \rangle), \\ \langle \text{числа} \rangle \rightarrow \langle \text{число} \rangle \mid \langle \text{числа} \rangle \_ \langle \text{число} \rangle, \\ \langle \text{число} \rangle \rightarrow \langle \text{цифра} \rangle \mid \langle \text{число} \rangle \langle \text{цифра} \rangle, \\ \langle \text{цифра} \rangle \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid \dots \mid 9 \end{array} \};$$

$$S_{C2} = \langle \text{Сопр1} \rangle.$$

Этап 3. Составление набора правил

Между выбранными понятиями теории устанавливаем возможные взаимосвязи и представ-  
ляем их в виде таблицы. Ее сокращенный вид представлен в таблице 3.

Таблица 3

Взаимосвязи между символами алфавита

	Схема	Z <sub>ВХ</sub> (p)	Z <sub>ВЫХ</sub> (p)	g(t)	h(t)	K(p)	K(jω)	...	φ <sub>K</sub> (ω)
Схема		f1	f1					...	
Z <sub>ВХ</sub> (p)	f2		f3/f4	f3		f4		...	
Z <sub>ВЫХ</sub> (p)	f5	f6/f7		f6		f7		...	
g(t)		f8	f8		f9			...	
h(t)				f10			f11	...	
K(p)		f4	f4				f12	...	
K(jω)					f13	f14		...	f15
K(ω)							f17	...	
φ <sub>K</sub> (ω)							f19	...	f20
u <sub>ВХ</sub> (t)								...	
U <sub>ВХ</sub> (jω)							f22	...	
U <sub>ВХ</sub> (ω)								...	
φ <sub>UВХ</sub> (ω)								...	f27
u <sub>ВЫХ</sub> (t)				f29	f30			...	
U <sub>ВЫХ</sub> (jω)							f31	...	f24
U <sub>ВЫХ</sub> (ω)								...	
φ <sub>UВЫХ</sub> (ω)								...	

Исходя из таблицы 3, записываем систему правил:

$$P_{PT} = \{ \langle \text{Схема} \rangle \rightarrow \langle \text{Сопр1} \rangle \langle \text{Сопр2} \rangle \{f1\}; \\ \langle \text{Сопр1} \rangle \rightarrow \langle \text{Схема} \rangle \{f2\}; \\ \langle \text{Сопр1} \rangle \rightarrow \langle \text{Сопр2} \rangle \langle \text{Перех} \rangle \{f3\}; \\ \langle \text{Сопр1} \rangle \rightarrow \langle \text{Сопр2} \rangle \langle \text{Перед} \rangle \{f4\}; \\ \dots \\ \langle \text{ФазC2} \rangle \rightarrow \langle \text{ФазЧХ} \rangle \langle \text{ФазC1} \rangle \{f33\}; \\ \langle \text{ФазC2} \rangle \rightarrow \langle \text{Спек2} \rangle \{f28\} \}.$$

На Лиспе приведенная система правил будет иметь вид:

```
(
  (<Схема> f1 <Сопр1> <Сопр2>)
  (<Сопр1> f2 <Схема>)
  (<Сопр1> f3 <Сопр2> <Перех>)
  (<Сопр1> f4 <Сопр2> <Перед>)
  .....
  (<ФазC2> f33 <ФазЧХ> <ФазC1>)
  (<ФазC2> f28 <Спек2>)
)
```

Этап 4. Определение множества функций

На завершающем этапе, для каждой из записанных в таблице 3 операций (f1 – f33) определяем суть преобразований. В таблице 4, для примера, приведены некоторые из описываемых функций.

Таблица 4

Функции для реализации законов радиотехники

Функция	Суть преобразования	Описываемые взаимосвязи
f1	Построение схемы цепи по операторным входному и выходному сопротивлениям	$Z_{\text{ВХ}}(p) \Rightarrow \text{Схема}$ $Z_{\text{ВЫХ}}(p)$
f5	Расчет операторного выходного сопротивления цепи по схеме	$\text{Схема} \Rightarrow Z_{\text{ВЫХ}}(p)$
f7	Умножение двух ДРФ	$Z_{\text{ВЫХ}}(p) = Z_{\text{ВХ}}(p) \cdot K(p)$
f8	Расчет переходного процесса	$Z_{\text{ВХ}}(p) \Rightarrow g(t)$ $Z_{\text{ВЫХ}}(p)$
f9	Интегрирование функции	$g(t) = \int h(t)dt$
f10	Дифференцирование функции	$h(t) = \frac{dg}{dt}$
f12	Преобразование комплексной ДРФ в операторную ДРФ	$K(p) = K(j\omega)$
f13	Прямое преобразование Фурье	$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$
f15	Расчет комплексной ДРФ по функциям модуля и аргумента	$K(j\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\varphi_K(\omega)}$
f20	Вычитание двух рядов дискретных значений	$\varphi_K(\omega) = \varphi_{U_{\text{ВЫХ}}}(\omega) - \varphi_{U_{\text{ВХ}}}(\omega)$
f21	Обратное дискретное преобразование Фурье	$u_{\text{ВХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\text{ВХ}}(j\omega)e^{j\omega t} dt$ $u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\text{ВЫХ}}(j\omega)e^{j\omega t} dt$
f23	Прямое дискретное преобразование Фурье	$U_{\text{ВХ}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{ВХ}}(t)e^{-j\omega t} dt$ $U_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{ВЫХ}}(t)e^{-j\omega t} dt$
f29	Интеграл Дюамеля	$u_{\text{ВЫХ}}(t) = u_{\text{ВХ}}(0)g(t) + \int_0^t \frac{du_{\text{ВХ}}}{d\tau} g(t - \tau)d\tau$
f30	Интеграл наложения	$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^t u_{\text{ВХ}}(\tau)h(t - \tau)d\tau$

Каждую функцию расписываем на функциональном языке ЛИСП с учетом синтаксиса символов, выступающих в качестве аргументов этих функций. Ниже в качестве примера приведена функция f2.

```
(defun f2 (x) (слождр (car x) (car(cdr x))))
(defun слождр (x y) (cond ((equal (зн x) (зн y)) (list (слож (чс x) (чс y)) (зн x))) (T (list (слож
(умнож (чс x) (зн y)) (умнож (чс y) (зн x))) (умнож (зн x) (зн y))))))
(defun чс (x) (car x))
(defun зн (x) (car (cdr x)))
(defun умнож (x y) (умнож+ x y (колич x) (колич y)))
(defun умнож+ (x y m n) (умнож+2 x y x m n m (- (+ m n) 1)))
(defun умнож+2 (x y z m n k l) (cond ((= y nil) (нули l)) ((= x nil) (умнож+2 z (cdr y) z k (- n 1) k
l)) (T (прибав (умнож+2 (cdr x) y z (- m 1) n k l) (* (car x) (car y)) (- (+ l 2) (+ m n))))))
(defun прибав (x m n) (замена x (list (+ (элемент x n) m)) n))
(defun нули (x) (cond ((= x 1) (list 0)) (T (cons 0 (нули (- x 1)))))
(defun слож (x y) (слож+ x y (колич x) (колич y)))
(defun слож+ (x y m n) (cond ((> m n) (слож+ y x n m)) (T (слож+2 x y (+ (- n m) 1))))
(defun слож+2 (x y k) (cond ((= x nil) y) (T (прибав (слож+2 (cdr x) y (+ k 1)) (car x) k))))
```

### Заключение

В статье были рассмотрены этапы построения базы знаний в виде функциональной грамматики. Было показано, что использование функциональных грамматик в системе решений позволяет смоделировать базу знаний практически для любой области знаний. Для этого необходим специалист в рассматриваемой области, который вместе с инженером знаний сможет реализовать все 4 этапа и составить базу знаний.

Преимуществом базы знаний в виде функциональной грамматики является возможность ее оперативного пополнения. Это достигается за счет добавления новых символов, правил и функций. Причем пополнение знаний возможно в результате накопления опыта, т.к. результат решения также представляет собой функцию. Новые продукции могут быть выражены через уже имеющиеся функции, что упрощает процесс добавления знаний и позволяет избежать повторений, пересечений и противоречий в правилах.

### Литература

1. Кравченко В. А., Могнонов П. Б., Чимитов Д. Н. Программная реализация решателя задач на основе метода функциональных грамматик // Вестник ВСГУТУ. – 2013. – № 6. – С. 36–42.
2. Тузов В. А. Математическая модель языка. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984. – 176 с.
3. Хювёнен Э., Сеппянен И. Мир Лиспа. Т. 2: Методы и системы программирования. – М.: Мир, 1990. – 320 с.
4. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2005. – 462 с.

### References

1. Kravchenko V. A., Mogonov P. B., Chimitov D. N. Programmynaya realizatsiya reshatelya zadach na osnove metoda funktsional'nykh [Software implementation of a problem solver based on the method of functional grammars]. *Vestnik Vostochno-Sibirskogo gosudarstvennogo universiteta tekhnologii i upravleniya – Bulletin of East Siberian State University of Technology and Management*. 2013. No. 6. Pp. 36–42.
2. Tuzov V. A. *Matematicheskaya model' yazyka* [The mathematical model of language]. Leningrad: Leningrad University publ., 1984. 176 p.
3. Khyuvenen E., Seppyanen I. *Mir Lispa. T.2: Metody i sistemy programmirovaniya* [World of Lisp. Volume 2: Methods and systems of programming]. Moscow: Mir, 1990. 320 p.
4. Baskakov S. I. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly* [Radio circuits and signals]. Moscow: «Vysshaya Shkola», 2005. 462 p.

УДК 681.3.06+37.01:014.544+629.7.066  
doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-103-107

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ АГЕНТОВ В ОБЛАКЕ ИНТЕРНЕТ-ОБУЧЕНИЯ

© Курганская Галина Сергеевна

доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационных технологий в управлении Иркутского государственного университета  
Россия, 664003, ул. Карла Маркса, 1, e-mail: galina@buk.irk.ru

В статье представлена точка зрения автора на принципы взаимодействия агентов интеллектуальной платформы интернет-образования ГЕКАДЕМ. В основе подхода лежат модели теории игр, при этом для расчета выигрышей/платежей и их вероятностей используются Байесовские сети доверия. Подход иллюстрируется схематичным примером взаимодействия двух агентов

**Ключевые слова:** представление знаний, интернет-обучение, самоорганизация сложных систем, облачные технологии, мультиагентные системы, теория игр.

## AGENTS' BEHAVIOR MODELING IN THE INTERNET LEARNING CLOUD

Galina S. Kurganskaya

DSc, Informational Technologies Department, Irkutsk State University  
1 Karla Marksa st., Irkutsk 664003, Russia

The article presents the author's view on the principles of interaction of Online education platform HECADEM agents. The approach is based on the models of game theory, herewith for calculation of winnings/payoffs and their probabilities Bayesian belief networks are used. The approach is illustrated with a schematic example of two agents' interaction.

**Keywords:** knowledge representation, Internet learning, self-organization of complex systems, multi-agent system, cloud-based technologies, game theory.

### Введение

Облачные технологии стали уже общепринятым инструментом работы в Интернет. В основном это относится к организации хранения информации пользователей, и соответственно, доступа к ней, а также простых инструментов по ее обработке. На наш взгляд, наибольший – синергетический – эффект может дать интегрированное использование всех возможностей облачных технологий. Именно такой подход реализуется в интеллектуальной Интернет-платформе ГЕКАДЕМ, которая разрабатывается в Иркутском государственном университете.

### 1. Архитектура интернет-платформы

Архитектура интернет-платформы представляет собой интегрированную мультиагентную систему, функционирующую в динамично меняющемся интернет-облаке интеллектуальных ресурсов [1]. Как уже отмечалось, принципиально невозможно обеспечить общее централизованное управление ресурсами облака, поэтому возможным решением может быть самоорганизация как деятельности пользователей, так и функционирования компонентов облака интеллектуальных ресурсов. В основу реализации самоорганизующейся системы интернет-обучения заложен мультиагентный подход. В данной статье будут рассмотрены принципы функционирования двух классов агентов платформы: владельцы ресурсов и пользователи ресурсов. Внутри классов агенты делятся по типам, и соответственно видам [1]. При этом поведение агентов будет определяться логикой, построенной на теории игр, где параметры стратегий игроков (агентов) динамически пересчитываются по сетям доверия в соответствии с байесовским подходом.

Очевидно, что в силу постоянной динамики облака мы не сможем построить сеть доверия «раз и навсегда», нам придется формировать ее всякий раз, когда агенту нужно будет принять решение. Как уже отмечалось [1], в этой ситуации мы будем следовать принципу «локально-

сти», т. е. строиться будет фрагмент сети доверия, а точнее, дерево, корнем которого будет объект, для которого формируется оценка. Максимальное количество уровней, по которым будут рассчитываться соответствующие параметры узлов, может быть глобальным параметром платформы, в пределах которого агенты могут выбирать радиус локального окружения.

Рассмотрим подробнее механизм формирования динамических сетей доверия. Для этого сначала следует понять, какова структура облака интеллектуальных ресурсов, т. е. определить множество составляющих и отношений на них. Будем следовать KFS модели представления знаний, в которой базовым элементом является учебный блок

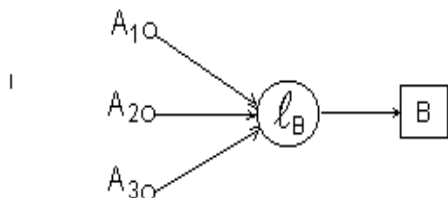


Рис. 1. Учебный блок

где

$B$  – результат изучения учебного блока,

$A_i$  – входные знания, необходимые при изучении блока.

Блок может состоять из конечного множества других блоков, в этом случае он будет рассматриваться как кластер, в котором единственный выход и четко определены входы, если они есть. В дальнейшем мы будем рассматривать все интеллектуальные ресурсы, как такие кластеры знаний.

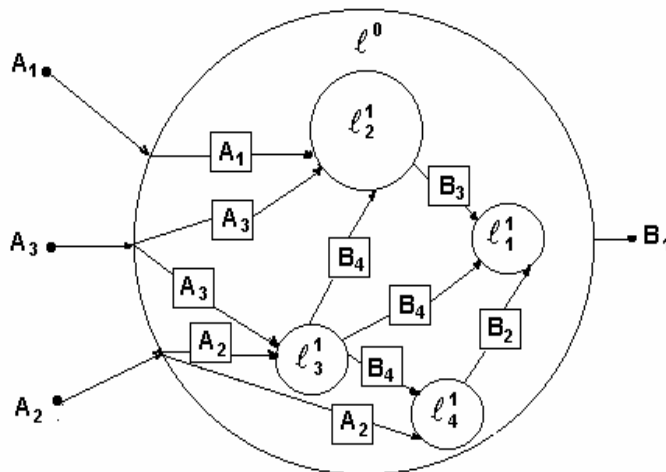


Рис. 2. Кластер знаний

Таким образом, на множестве интеллектуальных ресурсов в соответствии с KFS моделью представления знаний [1] могут быть заданы два базовых отношения строгого частичного порядка:

$part(x,y)$  – объект входит в состав объекта  $y$

$source(x,y)$  – знания из объекта  $x$  нужны при изучении объекта  $y$ .

Очевидно, что эти отношения определяют облако интеллектуальных ресурсов как неоднородную семантическую сеть кластеров, которую можно представить для каждого отношения отдельно в виде ориентированного графа.

Отношение  $source(x,y)$  – будет определяющим для агентов – пользователей ресурсов либо при построении траектории учебного процесса, в случае статического планирования, либо при



выборе следующего кластера для изучения, в случае планирования с «колес». И в том, и в другом случае алгоритм планирования по заданному графу отношения  $source(x,y)$  строит ярусно-параллельную форму (ЯПФ), предложенную Д. А. Поспеловым [2].

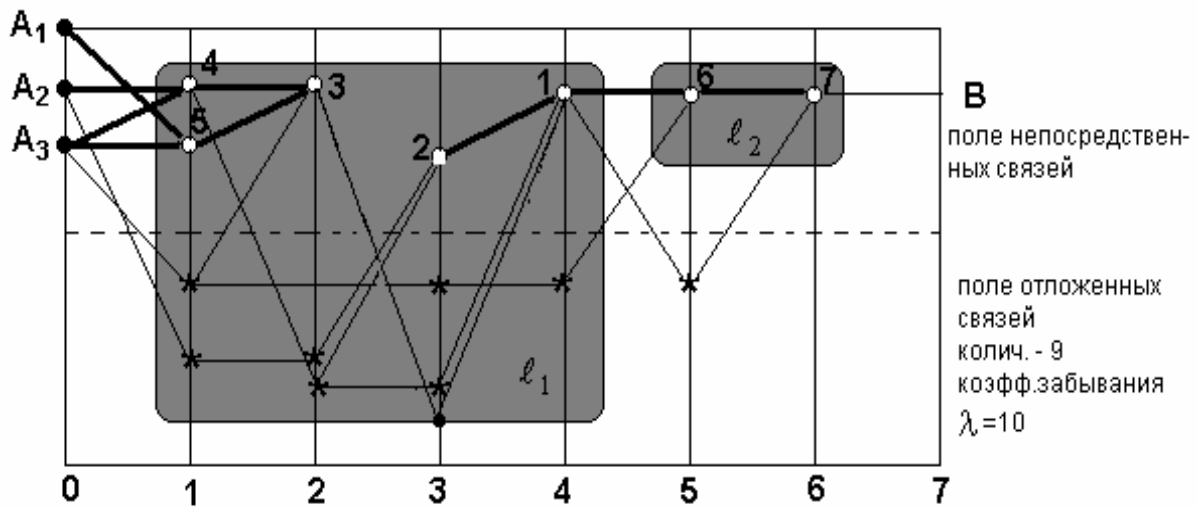


Рис. 3. Ярусно-параллельная форма кластера знаний

В представленном примере видно, что почти в любой точке алгоритма есть альтернативы. Но как обеспечить рациональное поведение агентов? Каким должен быть следующий шаг? Чтобы ответить на этот вопрос, автор использует байесовский подход и теорию игр. Агенты принимают решения на основе анализа текущей ситуации, но при этом работает правило локальности, т.е. для анализа доступен подграф соответствующего графа. При этом отношение  $part(x,y)$  будет служить основой для построения соответствующего фрагмента сети доверия для расчетов вероятностей условных выигрышей.

## 2. Моделирование взаимодействия агентов

Рассмотрим взаимодействие представителей двух классов агентов, когда агенту-потребителю нужно получить ресурс. Конечно, реально у каждого игрока может быть много разных стратегий такой сделки, например:

Владелец

- продать по фиксированной цене
- продать, не дешевле чем  $min$ .
- продать подороже, но продать
- продать по любой цене
- при нескольких одновременных запросах и прочих равных условиях продать потребителю определенного типа

• .....

Потребитель

- купить самый дешевый, если предложений несколько
- купить подешевле, но надлежащего качества
- купить самое качественное, цена не важна
- купить, не дороже чем  $max$
- ...

Ситуация, очевидно, весьма неоднозначная и ее можно рассматривать в нескольких аспектах: Для простоты изложения мы не будем вдаваться в детали, хотя, конечно, именно там «кротится дьявол», а рассмотрим последовательно варианты ситуация, в которых агенты могут принимать решения, используя подходящие модели из теории игр [3].

**Игра с нулевой суммой**

Рассмотрим ситуацию с одним ресурсом и одним претендентом. Для каждого агента определены варианты действий, и известно, что каждый может получить/потерять во всех возможных комбинациях их выбора. Интересы агентов противоположны: выигрыш одного является проигрышем другого. Это классическая антагонистическая игра, или игра с нулевой суммой, которую можно представить в виде платежной матрицы размером  $m \times n$ , у которой каждая  $i$ -я строка ( $i=1, 2, \dots, m$ ) отождествляется с  $i$ -й стратегией первого игрока, а каждый  $j$ -й столбец ( $j=1, 2, \dots, n$ ) отождествляется с  $j$ -й стратегией второго игрока. Элементы матрицы носят смысл выигрыша первого игрока (или проигрыша второго).

Пусть платежная матрица игры имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Понятно, что гарантированный выигрыш игрока при выборе некоторой стратегии равен минимуму соответствующей строки  $\min_j a_{ij}$ , поэтому в результате он выберет вариант с наибольшим значением такого минимума

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина  $\alpha$  называется нижней ценой игры – это то, что может себе гарантировать первый игрок при максиминной стратегии.

Соответственно, второй игрок может себе гарантировать

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Величина  $\beta$  называется верхней ценой игры. Соответствующая стратегия второго игрока называется минимаксной.

Понятно, что в общем случае  $\alpha \leq \beta$ , но когда  $\alpha = \beta$ , то мы имеем седловую точку игры, и такое решение является оптимальным для обоих игроков.

**Смешанные стратегии**

Случаи, когда имеется седловая точка, довольно редки на практике. В этом случае чаще встречаются ситуации, когда седловых точек нет, т. е. нижняя цена игры  $\alpha$  строго меньше верхней цены  $\beta$ .

Прежде отметим, что если мы обозначим через  $V$  действительную цену игры, то очевидно, что при правильных действиях игроков

$$\alpha \leq V \leq \beta.$$

К такому компромиссу можно прийти, если такие сделки проводить многократно. И тогда надо менять стратегии агентов таким образом, разделить разность  $\beta - \alpha$  между двумя игроками, чтобы была максимально возможная выгода для каждого.

Процесс чередования стратегий называется **смешанной стратегией**. Каждый ход в смешанной стратегии – это выбор какой-то определенной стратегии  $A_i$  для игрока  $A$  и какой-то стратегии  $B_j$  для игрока  $B$ . Выбор стратегии – это случайный процесс, поэтому каждую выбранную стратегию на каждом шаге мы можем рассматривать как значение случайной величины вероятностью  $p_i$  для первого агента и, соответственно,  $q_j$  для второго. Понятно, что

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1.$$

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1.$$

Векторы  $P ( p_1, p_2, \dots, p_m)$ ,  $Q ( q_1, q_2, \dots, q_n)$  представляют смешанную стратегию первого и второго агента, соответственно, а пара  $(P, Q)$  называется ситуацией в смешанных стратегиях. В этом случае агенты выбирают стратегии  $A_i$  и  $B_j$  независимо друг от друга случайным образом. И тогда цена игры первого агента есть математическое ожидание

$$V = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} P_i q_j.$$

Ясно, что цель первого агента заключается в максимизации значения  $V$ , а цель второго агента заключается в его минимизации. Решение можно получить, решая двойственные задачи линейного программирования и доказано, что при отсутствии седловой точки эта задача имеет единственное решение.

### **Игра с ненулевой суммой**

Если величина выигрыша первого игрока не совпадает с величиной проигрыша игрока В, то такой игре соответствуют уже 2 платежные матрицы, а игру называют **биматричной**. Хотя можно ее представить одной матрицей, где элементом является вектор  $(x, y)$ , где  $x$  – выигрыш первого, а  $y$  – второго игрока. Каждый агент может выбрать оптимальную с его точки зрения стратегию, используя принцип максимина. В качестве оптимальных стратегий агенты могут также рассматривать те, которые соответствуют равновесию по Нэшу. Но на наш взгляд, как и в случае модели антагонистической игры, лучше перейти к смешанным стратегиям, где векторы вероятностей для каждого игрока можно определить аналогичным способом.

### **Заключение**

Работы агентов по выше представленным моделям поведения опробованы на макетных примерах и дали приемлемые результаты. Понятно, что они далеко не исчерпывают все виды взаимодействий агентов платформы. Например, не рассматривали возможности формирования коалиций со своими интересами. В настоящее время ведутся исследования по привлечению более сложных моделей теории игр для решения таких задач, таких как арбитражная схема Нэша, вектор Шепли для коалиций, построение попарных соответствий (мэтчинга) по Шепли. И это позволяет автору надеяться на полную реализацию платформы облачного интернет-обучения ГЕКАДЕМ, работающей на принципах самообучения и самоорганизации.

### **Литература**

1. Курганская Г. С. Облачные технологии интернет-образования на основе KFS модели представления знаний // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – 2013. – Вып. 9. – С. 69–76.
2. Поспелов Д. А. Введение в теорию вычислительных систем. – М.: Советское радио, 1972. – 280 с.
3. Оуэн Г. Теория игр. – М.: Мир, 1971. – 230 с.

### **References**

1. Kurganskaya G. S. Oblachnye tekhnologii Internet-obrazovaniya na osnove KFS modeli predstavleniya znaniy [Cloud technologies of Online education based on KFS model of knowledge representation]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta: Seriya Matematika i informatika – Bulletin of Buryat State University. Series: Mathematics and Computer Science*. 2013. No. 9. Pp. 69–76.
2. Pospelov D. A. *Vvedenie v teoriyu vychislitel'nykh sistem* [Introduction to Computing Systems Theory]. Moscow: Sovetskoe radio, 1972. 280 p.
3. Owen G. *Game Theory*. USA: Academic Press, 1968.

УДК 004.42

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-108-117

## МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СЕТЕЙ СВЯЗИ С УЧЕТОМ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ

© Попков Глеб Владимирович

кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Россия, 630090, г. Новосибирск, пр-т Лаврентьева, 6, e-mail: glebpopkov@rambler.ru

В статье рассматриваются некоторые методологические вопросы исследования и проектирования структур сетей связи с учетом отказов их элементов в случае возникновения чрезвычайных ситуаций. Предлагается исследовать задачи, возникающие при анализе и синтезе сетей связи, связанные с применением методов теории графов, теории гиперсетей и других теорий описывающих взаимодействие различных структур. В статье приводится классификация теоретических моделей сетей связи, а также критерии эффективности сетей электросвязи в условиях чрезвычайных ситуаций.

**Ключевые слова:** сети электросвязи, теория графов, надежность и живучесть сетей связи.

## METHODOLOGICAL PROBLEMS OF ANALYSIS AND SYNTHESIS OF COMMUNICATION NETWORKS TAKING INTO ACCOUNT EMERGENCY SITUATIONS

Gleb V. Popkov

PhD, Senior Researcher, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, SB RAS

6 Lavrent'eva ave., Novosibirsk 630090, Russia

The article deals with some methodological problems of research and designing of communication networks structures taking into account the failure of their items in case of emergencies. We proposed to investigate the problems arising in analysis and synthesis of communication networks and associated with use of the methods of graph theory, theory of hypernetwork and other theories describing the interaction of different structures. The classification of communication networks theoretical models, as well as criteria of telecommunication networks efficiency in emergency situations, was given.

**Keywords:** telecommunication networks, graph theory, reliability and survivability of communication networks.

Рассмотрим некоторые методологические вопросы исследования и проектирования структур сетей связи (СС) с учетом отказов их элементов при чрезвычайных ситуациях (ЧС). В данной статье представляют интерес задачи, возникающие при анализе и синтезе сетей связи, связанные с применением методов теории графов, теории гиперсетей и других теорий описывающих взаимодействие различных структур.

Основной целью статьи является рассмотрение и приближенная разработка методики для моделирования, постановки и решения задач анализа и синтеза структур сетей связи, устойчивых к разрушающим воздействиям.

Создание такой методики опирается на решение следующих задач:

- 1) разработка методов оценки параметров сетей и создание на базе полученных результатов точных упрощенных моделей сетей;
- 2) разработка эффективных методов для автоматизированного анализа и синтеза структуры сетей связи с оптимальной топологией и с учетом совокупности задаваемых ограничений;
- 3) исследование проблемы обеспечения надежности и живучести сложных сетей связи и создание соответствующих методик и рекомендаций.

## **1. Сети электросвязи и модели структур**

Описанию сетей связи и их элементам посвящен ряд работ [1–3], поэтому здесь зафиксируем те особенности, которые возникают в связи с формальным описанием структур первичной и вторичной сетей как единого объекта исследования.

### **1.1. Морфологическое описание сетей электросвязи**

#### **1. Элементы сетей:**

- пункты или узлы связи: сетевой узел, сетевая станция, терминальное устройство, узел связи, вычислительные средства, кросс и т.п.;
- линии сетей связи: линия передачи, соединительная линия, шина (групповой канал), канал электросвязи, канал вторичной сети и т.п.;
- линейные сооружения: кабельная канализация, коллекторы, опоры воздушных линий связи и т. д.

#### **2. Структуры сетей:**

- топологическая основа (сеть ситуационных трасс): конфигурация возможных трасс прокладки кабельных линий на территории проектируемой СС (сеть представляет собой часть улиц, на которых реализуются сети);
- сеть кабельной канализации – трассы реальной канализации для кабелей связи;
- первичная сеть – конфигурация сетки линий передачи или соединительных линий осуществляемая через сетевые узлы;
- вторичная сеть – конфигурация сетки пучков каналов вторичной сетки или каналов электросвязи;
- сеть электросвязи – конфигурация первичной сети и всех вторичных сетей, рассмотренные совместно.

#### **3. Технология обслуживания**

В технологию обслуживания сетей связи включают коммутацию каналов, пакетов и сообщений с различными способами управления, кроссировку каналов для различных целей, передачу информации при различных требованиях и ограничениях.

#### **4. Внешние воздействия**

- поток заявок между корреспондирующими парами (абонентами, сетевыми узлами и т. д.);
- поток освобождений, т. е. поток, характеризующий окончания передачи информации;
- поток отказов элементов - выходят из строя элементы сетей (в основном первичной сети);
- поток восстановлений элементов (имеется в виду восстановление отказавшихся элементов и ввод в эксплуатацию новых).

#### **5. Критерии эффективности**

В качестве критериев эффективности могут рассматриваться: производительность, экономичность, качество и надежность передачи, живучесть и много других показателей.

#### **6. Требования и ограничения**

При анализе и синтезе конкретных типов сетей связи возникают различные требования и ограничения, связанные с физическими характеристиками сетей и условиями эксплуатации.

### **1.1.2. Формальное описание структур сетей электросвязи**

Опишем математические модели структур сетей связи, определяемых теоретическими моделями. Необходимость в таком описании заключается в том, что граф как математическая модель сети не определяет ее структуру адекватно [2].

Следовательно, при анализе сетей кроме методов теории графов необходимо пользоваться различными эмпирическими приемами исследования структур этих сетей. Очевидно, что в этом случае более подходящим объектом являются гиперсеть и S-гиперсеть, свободная от многих недостатков, присущих графам. Однако граф как математическая модель структуры сети остается полезным для описания структур многих классов теоретических моделей.

Рассмотрим подробнее границы применимости графов для описания структур сетей связи.

### 1. Сеть ситуационных трасс (топооснова)

Структура сети ситуационных трасс определяется теми физическими факторами, которые непосредственно влияют на возможность прокладки кабельных линий на предполагаемой территории размещения СС. Каждому возможному участку трассы прокладки кабельных линий от возможного «пересечения трасс» (перекресток) до следующего перекрестка можно сопоставить ветвь  $t_i \in T$ , графа ситуационных трасс  $ST = (X, T)$ , а каждому перекрестку вершину  $x_i \in X$ , того же графа. Понятно, что с точки зрения живучести каждая ветвь или вершина данного графа должны характеризоваться соответствующими показателями уязвимости.

### 2. Первичные сети

Структура первичной сети естественным образом может быть задана графом  $G=(x, v)$ , где  $x=(x_1, \dots, x_n)$  – множество вершин, а  $v=(v_1, \dots, v_m)$  – множество ветвей. Каждому сетевому узлу первичной сети будет соответствовать вершина графа  $G$ , а каждой соединительной линии – ветвь графа  $G$ . Характеристики элементов первичной сети в этом случае соответствуют параметрам соответствующих вершин и ветвей графа  $G$ .

**Примечание.** Предполагается, что в первичной сети отсутствуют составные каналы передачи. В противном случае структура первичной сети должна моделироваться гиперсетью.

### 3. Вторичные сети.

Структура вторичной сети, если не рассматривать ее реализацию на первичной, также хорошо моделируется графом  $L = (Y, R)$ , где  $Y = (y_1, \dots, y_p)$  – множество вершин, а  $R = (r_1, \dots, r_q)$  – множество ребер графа  $L$ .

Каждому узлу связи (коммутируемому или некоммутируемому) вторичной сети соответствуют вершины графа  $L$ , а каждому каналу (или пучку каналов) вторичной сети соответствует ребро графа  $L$ . Характеристики элементов вторичной сети при этом соответствуют параметрам вершин ребер графа  $L$ .

**Примечание.** Для того чтобы граф вторичной сети адекватно отражал свойства этих сетей, необходимо, чтобы все узлы связи вторичной сети были либо коммутируемыми, либо некоммутируемыми. В нашем случае каналы вторичной сети некоммутируемые. Кроме того, если во вторичной сети используются составные каналы (т.е. в узлах связи вторичной сети осуществляется кроссировка) то структура такой сети должна моделироваться гиперсетью [2].

Моделирование структуры вторичной сети в виде графа, вообще говоря, не позволяет исследовать свойства живучести этих сетей, так как отказы элементов вторичной сети зависимы. Действительно, характер разрушения элементов СС полностью определяется способом реализации вторичных сетей в первичных, т.е. зависит от характеристик живучести последних. Первичные сети в свою очередь определяются характеристиками уязвимости ситуационных трасс на соответствующем графе.

Тем не менее, некоторые структурные характеристики вторичных сетей эффективней вычислять с помощью методов теории графов. Например, исследование метрических характеристик вторичных сетей (число транзитов, длина пути передачи и т.п.), исследование пропускной способности сети, анализ и синтез структурно надежных сетей циркулярной связи и другие задачи [3–4].

### 4. Сеть электросвязи

Реальная сеть связи строится на основе первичной сети электросвязи. Именно, технические средства первичной сети (в первую очередь линии связи, каналобразующая аппаратура и устройства кроссировки) обеспечивают организацию каналов вторичной сети. Узлы связи вторичных сетей обычно не относятся к первичным сетям.

Из определения гиперсети следует, что граф первичной  $G = (x, v)$  – сети электросвязи соответствует первичной сети  $PS = (x, v)$  гиперсети  $S = (x, v, r)$ , а граф вторичной  $L = (Y, R)$  – вторичной сети  $WS = (X, R)$  гиперсети  $S$ . Взаимодействие этих сетей определяется гиперграфом  $FS = (V, R)$ , т.е. ветвь  $v \in V$  инцидентна ребру  $r \in R$  тогда и только тогда, когда соответствующий  $r$  канал вторичной сети (реализован) по линии передачи первичной сети

соответствующей ветви  $v$ . Таким образом, структура сети электросвязи полностью задана гиперсетью.

## **5. Основные формальные модели взаимодействия структур**

Из сказанного выше следует, что основными формальными (математическими) моделями структур сетей электросвязи являются графы и гиперсети. Причем графами описываются первичные и вторичные сети, а сеть электросвязи в целом описывается гиперсетью.

Иногда возникает необходимость учитывать привязку первичной сети к местности (например, к сети ситуационных трасс – сетка дорог города) или каналов передачи к линиям связи. В этом случае первичная сеть связи должна моделироваться гиперсетью (сеть с таким свойством назовем субпервичной). С другой стороны, вторичные сети могут содержать составные каналы вторичной сети, и следовательно, вторичная сеть также определяется гиперсетью (сеть с таким свойством назовем субвторичной). В целом сеть электросвязи в этом случае будет моделироваться иерархической гиперсетью. Очень часто при анализе и синтезе сетей связи требуется рассмотреть сеть электросвязи с несколькими вторичными сетями. Возможны и другие модели взаимодействия структур при проектировании реальных сетей связи.

### **1.2. Теоретические модели сетей электросвязи.**

Исследование и развитие теории структур сетей связи невозможны без теоретического описания системы связи.

В настоящем пункте представлена разработка [5] системы теоретических моделей сетей связи, которые позволяют сформулировать математические задачи анализа и синтеза различного назначения.

Очевидно, при построении теоретических моделей сетей нет необходимости рассматривать многочисленные параметры, свойства и отношения, имеющие место в реальных сетях, так как влияние многих из этих факторов на синтез оптимальных структур сетей связи незначительно. Например, информационные свойства сообщений и сигналов, передаточные свойства каналов связи и т.д. фактически не влияют на выбор структуры сети. С другой стороны, разработанные различными авторами теоретические модели сетей связи не всегда удовлетворяют исследователя при решении конкретных задач анализа и синтеза. В частности, в известных теоретических моделях не учитывается взаимодействие первичных и вторичных сетей связи, что мешает эффективно оценить параметры структурной надежности этих сетей.

#### **1.2.1. Классификация теоретических моделей сетей связи**

Основу любой теоретической модели сети связи составляют элементная база (узлы и линии) и структура сети. Кроме того, существенными параметрами для задач анализа и синтеза структурно-надежных сетей связи являются: число конечных пунктов-полюсов сети и пропускная способность ее элементов.

В зависимости от типа сети, ее функций и задач анализа и синтеза возникает необходимость в фиксации некоторой теоретической модели (идеального объекта), которая наиболее полно отражала бы реальную сеть связи при исследовании определенных свойств данной сети. Очевидно, что одной и той же сети могут соответствовать различные теоретические модели. В этой работе классификация теоретических моделей определяется, прежде всего, задачами исследования структурной надежности сетей связи. В таблице 1 приведены параметры, их условные обозначения, а также типы структурных моделей (математических объектов), которым сопоставлены конкретные значения параметров. Следующие параметры характеризуют основные типы теоретических моделей для задач анализа и синтеза структур сетей связи.

#### **1. Сети связи**

Известно, что естественным теоретическим допущением, при анализе и синтезе структур сетей связи, является деление этих сетей на первичные и вторичные. В свою очередь структуры этих сетей могут определяться сложными взаимодействиями, то есть необходимо рассматривать субвторичные сети. Классификация теоретических моделей сетей по этому параметру имеет вид:

<П / В / СП / СВ / П,В / П,СВ / СП,В / СП,СВ />, т. е. имеет место восемь подтипов структур сетей связи (таблица 1).

## 2. Пункты связи

По терминологии, принятой для ВСС, различают сетевые узлы и сетевые станции (СУ) для первичных сетей, узлы связи и узлы коммутации (УС) - для вторичных сетей. Если в сетевом узле или станции предусмотрена оперативная кроссировка (аппаратура автоматической или ручной кроссировки), то данный узел имеет оперативную кроссировку (СУ(I)), в противном случае долговременную (не оперативную). Надежность элементов сети связи (в частности СУ) имеет различную природу, т.е. разрушение элемента может быть случайным (обозначим С), детерминированным (Д) или он может быть абсолютно надежным (Н). Таким образом, СУ описывается вектором СУ( , ). Подставляя различные значения параметров, получим следующую классификацию сетевых узлов: СУ(О,Д), СУ(О,С), СУ(О, Н), СУ(I,Д), СУ(I,С), СУ(I,Н).

Аналогично классифицируются узлы связи вторичной сети. Если УС(0). Надежность УС обозначим так же, как и в предыдущем случае.

## 3. Линии связи (Л)

Под линиями связи могут пониматься кабельные, воздушные, радио и т. п. линии передачи первичной сети, а также типовые тракты или каналы вторичной сети. Симплексные (ориентированные) линии обозначим Л(О), а дуплексные (неориентированные) обозначим Л(П). Если линии связи кабельные, радиорелейные и т.п. (т.е. физически имеют линейную природу), то обозначим Л( ,К). Для радиолиний (радиовещание, телевидение и т. п.) условное обозначение имеет вид Л( , Р). Линии связи, соединяющие пару пунктов связи (двухполюсные), обозначим Л( ,I-I), а групповые (многополюсные) - Л( , ,Г-Г). Широковещательные линии (т. е. линии, у которых один источник и множество абонентов) обозначим Л( , ,I-Г), а множественно доступные линии (т. е. линии, у которых множество источников имеют связь с одним абонентом) Л( , , Г-I).

Последний параметр, который дает дополнительную классификацию линий, характеризует их надежность или ненадежность. Его значения обозначаются так же, как для СУ и УС.

Описание всех 96 типов линий займет много места, и поэтому приведем пример кодировки неориентированной, кабельной, широковещательной, стационарной линии, которая случайным образом может выйти из строя, - Л (I, K, I-Г, С, ).

С точки зрения описания структур заданное множество параметров достаточно адекватно для предоставления почти всех типов линий реальных сетей связи.

Заметим, что в реальных сетях связи могут присутствовать разнотипные элементы. В этом случае сеть должна задаваться описанием элементов. Для теоретических исследований в области оптимизации структур будем придерживаться однотипных элементов.

## 4. Структура связей для оконченных пунктов

В зависимости от поставленной задачи сеть связи можно рассматривать как двухполюсную (т.е. соединяющую только пару абонентов) или многополюсную (в которой каждый абонент соединен с любым другим). Сеть также может быть широковещательной или множественно доступной. Обозначения для данного параметра сети совпадают с аналогичными обозначениями для каналов.

## 5. Пропускная способность

В том случае, когда при установлении связи между абонентами пропускная способность сети позволяет всегда передать необходимую информацию в заданном объеме, будем говорить, что сеть имеет неограниченную пропускную способность (сигнальная сеть) и обозначим этот факт символом "0". Если пропускная способность элементов имеет существенное значение, то сеть называется потоковой и обозначается символом "1".

Наиболее полное описание теоретической модели имеет вид: </, / СУ( , ); УС( , ) / Л( , , , ), Л( , , , ) / , / , />.

Приведем примеры формального описания некоторых теоретических моделей сети связи.



Таблица 1

Подтипы структур сетей связи		
Параметр классификации	Условные обозначения	Структурная модель
I. Сети связи: I.1. Первичная субпервичная 1.2. Вторичная субвторичная	П СП В СВ	граф, гиперграф гиперсеть граф, гиперграф гиперсеть
2. Пункты связи: 2.1. Сетевой узел первичной сети и его атрибуты 2.2. С кроссировкой и без кроссировки 2.3. Надежные или ненадежные при случай- ном или детерминированном разру- шении элементов 2.4. Узел связи вторичной се- ти и его атрибуты 2.5. Коммутируемый или некоммутируемый 2.6. См. также параметры 2.3	СУ  I 0 Н  С  Д  УС I 0 Н, С, Д	граф, ... гиперсеть, ... граф, ...  случайный граф, ...  граф, ...  граф, ...
3. Линии связи: 3.1. Неориентированные или ориентированные 3.2. Распределенные (радио) и линейные (кабельные, радиорелейные) 3.3. Групповые двухполюсные широковещательные множественнодос тупные 3.4. См. также параметры 2.3.	Л I. 0 Р  К Г-Г 1-1 1-Г Г-1 Н, С, Д	граф, ... оргграф. ... гиперграф, гипер- схема граф  граф, ...
4. Структура связей для оконечных пунктов (см. параметры 3.3)	I-I, Г-Г I-Г, Г-1	
5. Пропускная способность: не ограничена (сигнальная сеть) или ограничена (потокосетевая сеть)	0  I	граф, ...  взвешенный граф, ...

**1. Первичная сеть без кроссировки и коммутации.** Линии кабельные с заданной емкостью.

/П/ СУ (О, Н) / Л (I, К, I-I, Н) /Г-Г/ I/.

Структурная модель: **взвешенный граф.**

**2. Сеть электросвязи радиорелейная с кроссировкой.** Линии связи со случайным отказом. Вторичная сеть с коммутацией, сигнальная, ширококроссировочная.

/П, В/ СУ (I, Н), УС (I, Н) / Л (I, К, I-I, С), Л (О, К, I-Г, С) / I-I, I-Г / 0, 0/.

Структурная модель: **случайная гиперсеть** с надежными ветвями. Вторичная сеть – гиперсхема (ветви удаляются частично).

**3. Первичная сеть из радиоканалов, с кроссировкой.** Вторичная сеть потоковая некоммутируемая. Узлы связи ненадежные и разрушаются оптимально.

/П, В/ СУ(І, Д), УС (О, Н) / Л (І, Р, І-Г, Н), Л (І, Р, І-І, Н)/ І-І, І-І/І-І/.

Структурная модель: абстрактная гиперсеть PS – гиперсхема, WS – **граф**, ветви и ребра гиперсети взвешены.

**4. Телеграфная сеть общего пользования с ненадежными линиями связи первичной сети,** в которой исследуется наличие связи от одного абонента до выделенного множества.

/П, СВ/ СУ (О, Н), УС (І, Н)/ Л (І, К, І-І, С), Л (І, К, І-І, С) / Г-Г, І-Г/ О, І/.

Структурная модель: взвешенная случайная неориентированная, иерархическая 3-гиперсеть, в которой первичная сеть и вторичные сети более высоких уровней (модель взаимодействия структур типа «цепь») являются графами.

Очевидно, что для решения конкретной задачи данная модель должна уточняться. В частности, взвешенными элементами гиперсети являются ребра вторичных сетей, а ненадежными являются ветви первичной сети.

### 1.2.2. Критерии эффективности сетей связи

В общем случае под критерием эффективности сети связи как сложной технической системы понимается совокупность требований, которые предъявляются к существующей или проектируемой сети пользователями, проектировщиками и эксплуатационным персоналом.

Таким образом, критерии эффективности – это условия, в соответствии с которыми принимается решение относительно эффективности ее функционирования. Обычно различают три вида критериев: качества и надежности функционирования; экономические; живучести. Соответствующим критериям можно сопоставить показатели эффективности, которые вычисляются по тем или иным теоретическим моделям.

Рассмотрим перечисленные типы критериев более подробно.

#### 1. Критерии качества и надежности.

Здесь рассмотрим наиболее часто употребляемые критерии качества и надежности функционирования сети.

- Существование заданного числа кондиционных путей, в которых число транзитов ограничено или ограничена длина пути.
- Существование непересекающихся по узлам и каналам заданного числа кондиционных путей.
- Существование непересекающихся по линиям передачи заданного числа кондиционных путей.
- Вероятность существования кондиционных путей между парой абонентов и всеми абонентами одновременно.
- Максимальное число каналов единичной пропускной способностью, соединяющих заданные пары абонентов.
- Число составных каналов с единичной пропускной способностью и кондиционным путем, предоставленных корреспондирующим парам.
- Вероятность того, что число исправных составных каналов с единичной пропускной способностью и кондиционными путями, которыми может быть соединена отдельная пара абонентов, не менее требуемого.
- Вероятность того, что число исправных каналов в группе каналов, предоставленных данной корреспондирующей паре узлов по плану распределения, не менее требуемого.
- Вероятность того, что число составных каналов с единичной пропускной способностью и кондиционными путями, предоставляемых данной корреспондирующей паре узлов по плану кроссировки, не менее требуемого.
- Вероятность своевременной доставки сообщений входящего потока при заданной норме времени доставки.
- Вероятность ожидания для любого поступившего вызова.

- Отношение средних потерь вызовов к общему числу вызовов, поступивших за тот же период времени.
- Вероятность замены отказавшего элемента на резервный при заданном распределении резервов.

Приведенный перечень не претендует на полноту, возможны и другие варианты критериев качества и надежности функционирования. Выбор конкретного критерия или некоторого подмножества определяется той проектной ситуацией, которая возникает при создании реальной сети связи.

Вычисление показателей, соответствующих приведенным критериям, является весьма сложной задачей. Большинство из этих задач являются NP-полными.

## 2. Экономические критерии

Здесь в качестве экономической характеристики сетей всех ТИПОВ возьмем затраты (капитальные или приведенные) на одну линию связи, если рассматривается первичная сеть, на один канал или пучок каналов вторичной сети.

Суммарные затраты складываются из соответствующих затрат на линейные сооружения.

Приведем наиболее употребительные экономические критерии:

- Стоимость линии связи первичной сети в общем случае,

$$c_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}(u_{ij})$$

где  $\alpha_{ij}$  – затраты на строительные работы;

$u_{ij}$  – емкость линии связи;

$\beta_{ij}(u_{ij})$  – функция стоимости линии связи.

- Число каналов в линии связи.
- Суммарная длина каналов в одной линии связи.
  - Длина линии связи.
  - Арендная плата за канал вторичной сети.

Критерии живучести и соответствующие показатели рассмотрены ниже.

### 1.2.3. Основные модели внешних воздействий

Исследование живучести систем связи с помощью теоретических моделей возможно только тогда, когда будет зафиксирована модель внешних воздействий на сеть. Очевидным фактом является то, что число различных вариантов внешних воздействий очень велико. Это разнообразие определяется рядом обстоятельств: разрушающими факторами, структурой и назначением сети, средствами, повышающими живучесть сети, и т.п. Ниже приведены основные модели внешних воздействий, способствующих разрушению сети. Весь класс этих моделей опишем с помощью перечисления (классификации) их основных параметров (признаков).

#### 1. Отказы элементов

В сети связи могут быть разрушены узлы связи или линии передачи или те и другие. Очевидно, что разрушение узлов влечет за собой разрушение линий, входящих в данные узлы. Если рассмотреть более подробно назначение узлов связи, то можно выделить три типа: оконечные пункты, сетевые узлы и узлы коммутации. Все три типа узлов могут территориально находиться в одной точке или разнесены в пространстве. В последнем случае в моделях структур сетей связи под удалением узла любого типа понимается удаление соответствующей вершины структурной модели. Если узлы различных типов объединены в одной точке, то в случае разрушения сетевого узла разрушаются все пучки каналов, входящие в него, а в случае разрушения оконечного пункта или узла коммутации имеет место разрушение пучков каналов, входящих в данные узлы. Причем разрушение пучков каналов может быть полным (физические каналы далее не используются) или частичным (соответствующая часть канала вторичной сети между неразрушенными сетевыми узлами может быть использована после перекроссировки). Ясно также, что в отдельных случаях можно допустить разрушения только пучков каналов в определенных линиях передачи. С другой стороны, отказ линии передачи влечет отказ всех пучков каналов, организованных на данной линии.

Математические модели отказов элементов в различных случаях будут рассмотрены в следующем отчете.

## **2. Восстанавливаемость**

При определенных условиях элементы системы связи могут быть не восстанавливаемы, а в других случаях узлы и линии являются восстанавливаемыми за счет ремонта или резерва восстановления.

## **3. Предсказуемость**

Случайный характер разрушения элементов входит во многие модели внешних воздействий, которые используются при исследовании живучести сети. Причем численное значение вероятности отказа элемента зависит от многих факторов и определяется исследователем эмпирически. Однако полезным и вполне обоснованным является предположение о детерминированном разрушении сети. С практической точки зрения можно предположить, что структура сети полностью известна противнику и что он наиболее оптимальным образом ее собирает разрушить. Тогда, зная критерии оптимальности разрушения, можно точно вычислить множество отказавших элементов. С методологической точки зрения использование детерминированных моделей разрушения позволит синтезировать структуры сетей при случайном ограниченном разрушении, рассчитывая на самый худший вариант отказа элементов. Кроме того, большая неопределенность в оценках вероятности отказов элементов делает зачастую детерминированные модели разрушения наиболее адекватными.

## **4. Временные характеристики отказов**

В зависимости от назначения сети и предполагаемых факторов разрушения могут быть рассмотрены два вида внешних воздействий:

- Импульсное воздействие, предполагает отказ элементов в определенный момент, после которого сеть достаточное время находится в стационарном режиме (т.е. не разрушается). Использование этой модели воздействий правомерно при стихийных явлениях или при таком целенаправленном разрушении сети, когда время восстановления структуры меньше, чем время нанесения очередного удара.

- Долговременное воздействие, характеризуется достаточно длительным разрушением сети в определенном интервале времени. Ясно, что данный параметр модели внешнего воздействия характеризуется некоторой функцией разрушения, зависящей от времени, разрушающего фактора, объема ресурса разрушения.

Последняя модель, как правило, применяется при исследовании функциональной живучести сети связи. Однако неопределенность функции разрушения ограничивает использование, данной модели внешних воздействий для реальных расчетов.

## **5. Ресурс разрушения элемента**

В большинстве известных моделей разрушения считается, что элемент выходит из строя при любом воздействии. Однако в некоторых случаях более адекватной является модель, в которой предусмотрен ресурс разрушения каждого элемента, т.е. элемент отказал, если на него воздействовал ресурс разрушения не менее чем в  $k$  единиц.

## **6. Мощность разрушения сети**

В зависимости от предполагаемых факторов разрушения и выживаемости элементов география разрушения может быть различной. В моделях внешних воздействий различают следующие разрушения: отказ элементов на всей территории сети; отказ элементов из заданного множества; компактные отказы элементов (т.е. отказы всех элементов в некоторой географической окрестности); единичные отказы элементов.

## **7. Критерий оптимальности разрушения**

Определяется ресурсом разрушения и назначением сети связи. В случае детерминированного характера разрушения критерий оптимальности определяется, как правило, соответствующими показателями живучести.

В дальнейшем при решении задач анализа структурной надежности модели внешних воздействий будут фиксироваться.

### Литература

1. Захаров Г. П. Сети с искусственным интеллектом: концепция построения и вопросы терминологии // Системы и средства телекоммуникаций. – 1993. – № 1. – С. 3–8.
2. Попков В. К. Математические модели живучести сетей связи // Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1990. – 235 с.
3. Шмалько А. В. Цифровые сети связи: основы планирования и построения. – М.: Эко-Трендз, 2001.
4. Соколов Н.А. Сети абонентского доступа. Принципы построения. – Пермь: Уралсвязьинформ, 2000. – 255 с.
5. Телекоммуникационные системы и сети: учеб. пособие: в 3 т. – Т. 3. Мультисервисные сети / В. В. Величко, Е. А. Субботин, В. П. Шувалов, А. Ф. Ярославцев. – М.: Горячая линия–Телеком, 2005. – 592 с.

### References

1. Zakharov G. P. Seti s iskusstvennym intellektom: kontseptsiya postroeniya i voprosy terminologii. Sistemy i sredstva telekommunikatsii [Networks with artificial intelligence: the concept of formation and problems of terminology]. *Sistemy i sredstva telekommunikatsii – Systems and means of telecommunication*. 1993. No. 1. Pp. 3–8.
2. Popkov V. K. *Matematicheskie modeli zhivuchesti setei svyazi* [Mathematical models of communication networks survivability]. Novosibirsk: SB RAS Computing center, 1990, 235 p.
3. Shmal'ko A. V. *Tsifrovye seti svyazi: osnovy planirovaniya i postroeniya* [Digital communication networks: principles for planning and constructing]. Moscow: Eco-Trends, 2001.
4. Sokolov N. A. *Seti abonentskogo dostupa. Printsipy postroeniya* [Networks of subscriber access. Principles of construction]. Perm: Uralsvyazinform, 2000. 255 p.
5. Velichko V., Subbotin E. A., Shuvalov V. P., Yaroslavtsev A. F. *Telekommunikatsionnye sistemy i seti. Tom 3. Mul'tiservisnye seti* [Telecommunication systems and networks. V. 3. Multiservice network]. In 3 V. Moscow: Hot line-Telecom, 2005. 592 p.

УДК 004.932

doi: 10.18097/1994–0866–2015–0–9–118–124

**КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД УЛУЧШЕНИЯ СЕГМЕНТАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ**© **Харинов Михаил Вячеславович**

кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории прикладной информатики Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации

Россия, 199178, г. Санкт-Петербург, 14-я линия Васильевского острова, 39, e-mail: khar@iias.spb.su

© **Ханыков Игорь Георгиевич**

аспирант лаборатории прикладной информатики Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации

Россия, 199178, г. Санкт-Петербург, 14-я линия Васильевского острова, 39, e-mail: igk@iias.spb.su.

В статье рассматривается задача автоматической сегментации цифровых изображений посредством кусочно-постоянных приближений с ограниченным числом связанных сегментов из усредненных пикселей. Решение достигается за счет комбинации глобального улучшения приближения по всему полю изображения и локального улучшения приближения по его участкам. Эффективность комбинированного метода демонстрируется на актуальном примере сегментации снимков сцены, которые сняты в различном ракурсе и объединены в одно изображение.

**Ключевые слова:** изображение, приближение, сегментация, среднеквадратичное отклонение, минимизация.

**THE COMBINED METHOD OF IMPROVING IMAGE SEGMENTATION****Mikhail V. Kharinov**

PhD, Senior Researcher, Laboratory of Applied Informatics of St. Petersburg Institute for Informatics and Automation, RAS

39 Vasilyevsky Island 14<sup>th</sup> Line, St. Petersburg 199178, Russia

**Igor G. Khanykov**

Research assistant of Laboratory of Applied Informatics of St. Petersburg Institute for Informatics and Automation, RAS

39 Vasilyevsky Island 14<sup>th</sup> Line, St. Petersburg 199178, Russia

The article deals with the problem of automatic segmentation of digital images via piecewise constant approximations with a limited number of connected segments, constituted of averaged pixels. The solution is achieved by combining of global improvement of approximation across entire image field and local improvement of approximation fragments. The effectiveness of the combined method is demonstrated on the actual example of scene snapshots segmentation. Shots were taken from different angles and then merged into a single image.

**Keywords:** image, approximation, segmentation, standard deviation, minimization.

**Введение**

В статье развивается метод улучшения сегментации цветового изображения, который предложен в [1] и относится к методам автоматической сегментации изображения посредством его аппроксимации упрощенными *приближениями*, которые содержат меньшее число цветов, и сегментов из одинаковых по цвету смежных пикселей. В результате сегментации изображение разбивается на вложенные изображения «объектов», которые выделяет компьютер для последующего анализа признаков и распознавания. Качество разбиения и соответствующего приближения изображения численно оценивается [2] по среднеквадратичному отклонению  $\sigma$  приближения от изображения или суммарной квадратичной ошибке  $E = 3N\sigma^2$ , где  $N$  — число пикселей в изображении, а коэффициент 3 учитывает число цветовых  $R, G, B$  компонент.

При сегментации логично требовать, чтобы, по крайней мере, образы одинаковых реальных объектов сцены одинаково же отображались в приближениях изображения и, в зависимости от числа сегментов, либо все сохранялись, либо синхронно стирались по мере огрубления приближения. Однако на практике сформулированное требование адекватности сегментации оказывается не просто выполнить в отношении заранее не ограниченного множества изображений, объектов сцены и без предварительного обучения. В статье описывается модель сегментации, обеспечивающая решение проблемы посредством *квазиоптимальных* приближений изображения, которые близки к оптимальным приближениям с минимальными значениями суммарной квадратичной ошибки  $E$  или среднеквадратичного отклонения  $\sigma$  и составляют иерархическую последовательность.

### 1. Постановка задачи

В нашей модели сегментации [1, 3] ставится и решается задача аппроксимации последовательности оптимальных приближений изображения иерархической последовательностью квазиоптимальных приближений при каждом значении числа *кластеров* пикселей от 1 до  $N$ , где под кластерами, в общем случае, имеются в виду объединения нескольких несмежных сегментов изображения. Поскольку последовательность оптимальных приближений не является иерархической, решение не однозначно.

В [3] на примере серых изображений мы экспериментально показали, что задача аппроксимации оптимальных приближений квазиоптимальными, с приблизительно равной эффективностью решается дивизимным иерархическим методом Оцу и агломеративным методом Уорда [4], но последний, в отличие от метода Оцу, применим для цветowych изображений. Поскольку задачи сегментации ориентированы на получение разбиений с числом сегментов, которое существенно меньше числа пикселей  $N$ , то построение квазиоптимальных приближений имеет смысл разделить на два этапа [5]:

- формирование разбиения изображения из ограниченного числа *суперпикселей* в виде связанных сегментов;
- агломеративную кластеризацию суперпикселей.

В современной обработке изображений под *суперпикселями* обычно понимают связанные сегменты изображения, не содержащие границ зрительно воспринимаемых объектов [5, 6]. Адекватность сегментации достигается для определенных классов изображений и объектов в результате эвристического моделирования критериев подобия сегментов или кластеров пикселей, настройки параметров и обучения программы на примерах сегментации изображения человеком. Использование эвристических соображений по поводу зрительного восприятия оправдывается тем, что точное вычисление оптимальных приближений является *NP*-трудной задачей [5].

В нашей модели квазиоптимальной сегментации чрезмерная вычислительная сложность обходится за счет построения иерархической последовательности разбиений на кластеры пикселей или сегменты изображения, что ограничивает вычислительную сложность линейной или квадратичной зависимостью от числа пикселей в изображении. В модели полагается, что для *суперпикселей* задана иерархическая структура, которая позволяет минимизировать суммарную квадратичную ошибку  $E$  или среднеквадратичное отклонения  $\sigma$  в различных алгоритмах и их комбинациях. При этом улучшение качества разделения изображения на суперпиксели выделяется в самостоятельную стадию вычислений, которые выполняются не в два, как в [5], а в три этапа:

- разбиение изображения на связанные сегменты в модели Мамфорда-Шаха [3, 7–9];
- формирование суперпикселей в алгоритмах улучшения качества сегментации [1];
- кластеризацию суперпикселей методом Уорда [4].

Новым является этап улучшения качества сегментации, развитие которого является целью данной статьи.

### 2. Оптимальные и квазиоптимальные приближения

В задачах сегментации иерархическая структура квазиоптимальных приближений существенно упрощает их вычисление, запоминание и преобразования, по сравнению с оптимальными

приближениями. Вместе с тем, квазиоптимальные приближения сохраняют ряд свойств оптимальных приближений.

Квазиоптимальные и оптимальные приближения не меняются при линейном преобразовании изображения по яркости, коммутируют с преобразованием из позитива в негатив и с масштабированием изображения посредством дублирования пикселей. При возрастании числа кластеров  $g$  от 1 до  $N$  последовательность приближений описывается монотонной последовательностью значений  $E_g$ , которые нестрого уменьшаются от максимального значения  $E_1$  при единственном кластере до минимального нулевого значения при всех пикселях, отнесенных к различным кластерам.

Нетривиальным свойством оптимальных приближений является выпуклость последовательности значений  $E_g$ :

$$E_g = \frac{E_{g-1} + E_{g+1}}{2}, \quad g = 2, 3, \dots, N-1, \tag{1}$$

при которой уменьшению ошибки  $E_g$  с ростом числа кластеров  $g$  сопутствует нестрогое возрастание производной от  $E_g$  по  $g$ . Применение метода Уорда обеспечивает сохранение свойства (1) для квазиоптимальных приближений в диапазоне, ограниченном числом суперпикселей в изображении.

### 3. Критерии улучшения качества сегментации

На первом и третьем этапе получения иерархии вычисления сводятся к итеративному слиянию множеств пикселей 1 и 2 из условия минимизации приращения  $\Delta E_{merge}$  суммарной квадратичной ошибки:

$$\Delta E_{merge}(1, 2) = \min. \tag{2}$$

Разница состоит в том, что на первом этапе, при разбиении изображения на связные сегменты, в качестве пар множеств 1 и 2 рассматриваются только смежные сегменты, а на третьем этапе, при кластеризации, — все пары суперпикселей.

В явном виде выражение для  $\Delta E_{merge}(1, 2)$  при слиянии множеств 1 и 2 из  $n_1$  и  $n_2$  пикселей дается формулой:

$$\Delta E_{merge}(1, 2) = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \|I_1 - I_2\|^2, \tag{3}$$

где  $I_1, I_2$  — трехмерные значения средних яркостей по цветовым компонентам изображения, а знак  $\| \cdot \|$  обозначает евклидово расстояние.

Улучшение качества разбиения изображения на связные сегменты для формирования суперпикселей на центральном этапе вычислений выполняется посредством комбинаций операций с сегментами.

При заданной бинарной иерархии сегментов в [1] в качестве обратной к операции слияния «merge» введена операция «divide», которая сводится к разделению сегмента 1 из более, чем одного пикселя на два вложенных сегмента  $1', 1''$  и сопровождается неположительным приращением  $\Delta E_{divide}(1)$  суммарной квадратичной ошибки:

$$\Delta E_{divide}(1) \equiv -\Delta E_{merge}(1', 1''). \tag{4}$$

где  $1 = 1' \cup 1''$ .

Метод [1] относится к глобальным методам улучшения сегментации и состоит в циклическом разделении надвое сегмента 1 в одном месте изображения и слияния пары смежных сегментов 2, 3 в другом месте по критерию уменьшения суммарной квадратичной ошибки:

$$\Delta E_{divide}(1) + \Delta E_{merge}(2, 3) < 0, \tag{5}$$

где предполагается, что все три сегмента различны.

Глобальное улучшение сегментации по методу [1] дополняется методом ее локального улучшения, в котором смежные сегменты передают пиксели один другому из условия уменьшения суммарной квадратичной ошибки. Критерием выполнения исключения пикселей сегмента  $1'$  из состава пикселей сегмента 1 и включения их в состав сегмента 2, смежного с сег-



ментом  $1'$ , служит условие отрицательного суммарного приращения квадратичной ошибки:

$$\Delta E_{divide}(1) + \Delta E_{merge}(1', 2) < 0, \quad (6)$$

где  $1' \subset 1$ .

Преобразования сегментов разбиения изображения по критериям (5) и (6) поясняются рис. 1, на котором слева показан пример исходного разбиения изображения, центральное разбиение иллюстрирует результат глобального преобразования, а картина справа иллюстрирует результат локального преобразования исходного разбиения.

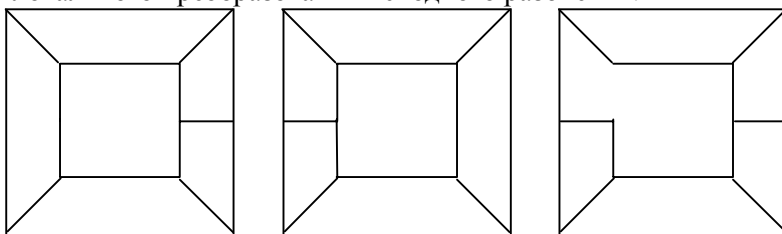


Рис. 1. Схемы глобального и локального методов улучшения сегментации изображения

Схема рис. 1 иллюстрирует глобальные и локальные операции с «половинами» сегментов, определяемыми разделением сегмента надвое. Построения очевидным образом обобщаются, если вместо «половин» выполняются операции с меньшими частями, на которые разбивается сегмент, что, вероятно, более актуально для методов локального улучшения сегментации изображения. При этом если сегмент 2 с числом пикселей  $n_2$  захватывает  $k$  пикселей у смежного сегмента 1 с числом пикселей  $n_1 > k$ , то критерием снижения суммарной квадратичной ошибки служит выражение:

$$\sqrt{\frac{n_2}{n_2 + k}} \|I - I_2\| < \sqrt{\frac{n_1}{n_1 - k}} \|I - I_1\|, \quad (7)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — значения средней яркости пикселей сегментов 1 и 2.

В предельном случае, при  $k=1$  и реклассификации отдельных пикселей из сегмента в сегмент метод локального улучшения сегментации по критерию (7), по существу, уточняет традиционный метод  $K$ -средних и совпадает с методом « $K$ -meanless» [10], дополненным блокированием вариантов реклассификации пикселей, нарушающих связность донорского сегмента.

Варианты преобразований сегментов изображения по критериям (5)-(7) обеспечивают развитие приложений за счет оптимизации сочетаний и порядка выполнения операций с сегментами. Однако, на начальной стадии исследований, прежде всего, необходимо проверить принцип улучшения качества сегментации за счет комбинации глобального и локального методов, а также экспериментально подтвердить эффект на подходящем примере.

#### 4. Экспериментальные результаты

Метод глобального улучшения качества сегментации [1] тестировался на примерах разбиения изображения посредством регулярной решетки и на примерах исправления сегментации, полученной при обработке некоторого дополнительного изображения тех же размеров. При этом достигался стабильный эффект улучшения приближений изображения как по зрительному восприятию, так и по суммарной квадратичной ошибке  $E$  или среднеквадратичному отклонению  $\sigma$ . Однако в обоих случаях на результирующем приближении проявлялись отдельные артефакты, связанные с начальным разбиением (следы решетки, или характерных локальных деталей дополнительного изображения). Оказалось, что дефекты сегментации удаляются при совместном применении глобального и локального методов улучшения сегментации. При этом в качестве локального метода улучшения сегментации применялась версия метода  $K$ -meanless. При анализе наилучших возможностей конкретного применения возникла идея протестировать комбинированный метод улучшения сегментации на примере нескольких стереоизображений одной и той же сцены, совмещенных в единое изображение (рис. 2).

В левом верхнем углу на рис. 2 показано тестовое цветное изображение, скомпонованное из девяти снимков «Teddy» из базы изображений [11]. Снимки сняты в различном ракурсе. Объекты, хотя выглядят одинаково, но задаются различными множествами пикселей, что влия-

ет на результаты сегментации, особенно, в условиях рассматриваемого эксперимента, в котором изображение сегментируется как целое.

В правом верхнем углу на рис. 2 показано приближение изображения из тысячи сегментов, полученное итеративным укрупнением пикселей в версии [3, 8] модели Мамфорда-Шаха. В левом нижнем углу демонстрируется приближение изображения тысячей суперпикселей, полученное комбинированным методом улучшения качества сегментации. В правом нижнем углу разбиение на суперпиксели представлено в 16 цветах методом кластеризации цветовых значений суперпикселей по Уорду. Под приближениями выписаны значения среднеквадратичного отклонения  $\sigma$ .

Сравнивая первоначальную сегментацию (справа в верхнем ряду) с результатами ее улучшения (в нижнем ряду) можно заметить, что обсуждаемый комбинированный метод обеспечивает единообразие выделения объектов и позволяет детектировать больше объектов.

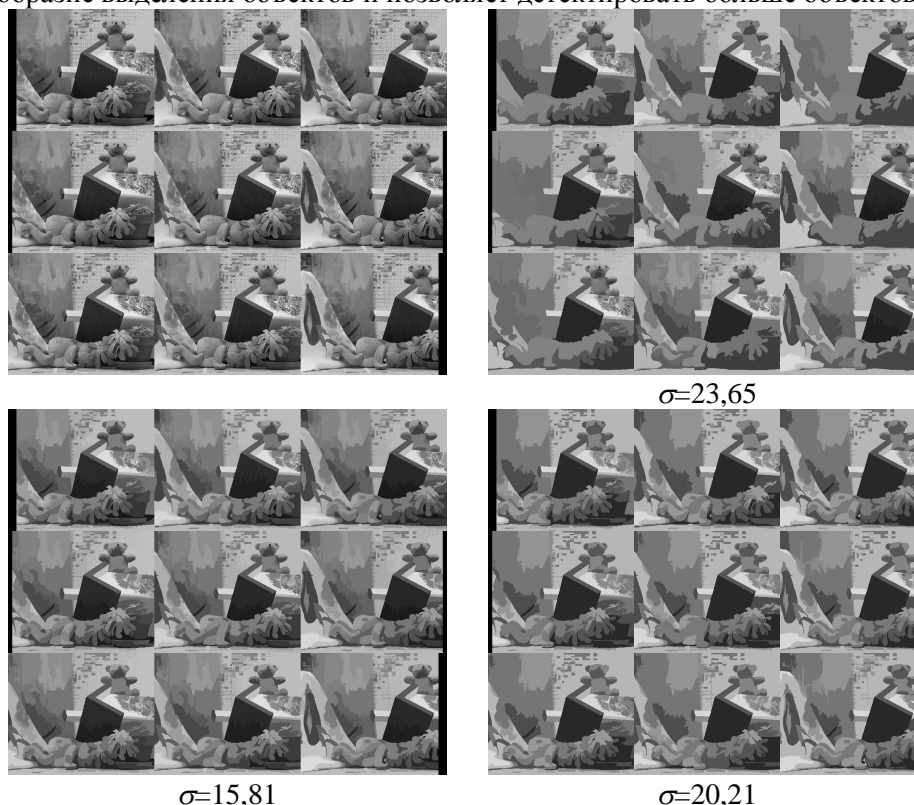


Рис. 2. Комбинированное улучшение качества сегментации

Вследствие недостаточно адекватной сегментации в задачах стереозрения при оценке расстояний посредством анализа стереопар вместо сопоставления объектов прибегают к поиску и сопоставлению на изображении отдельных ключевых точек [12], что ограничивает решение на постановочном уровне. По всей видимости, эффективное улучшение сегментации может оказаться принципиальным для преодоления этой проблемы, а также полезным в практике решения других задач автоматической и автоматизированной обработки изображений.

### Заключение

Если 10–15 лет назад проблема полностью автоматической низкоуровневой обработки видеоданных обсуждалась в России активнее, чем за рубежом, то в настоящее время, за границей она активнее решается как актуальная инженерная задача, например, в рамках проекта PPAML (Probabilistic Programming for Advancing Machine Learning)<sup>1</sup> американского агентства DARPA (Defense Advanced Research Projects Agency). Проект начат в 2013 г. и завершится в 2017 г. созданием программных средств для приложений искусственного интеллекта. В области искусственного зрения для решения практических задач силами инженеров-программистов требуется

<sup>1</sup> [http://www.darpa.mil/our\\_work/i2o/programs/probabilistic\\_programming\\_for\\_advanced\\_machine\\_learning\\_ppaml.aspx](http://www.darpa.mil/our_work/i2o/programs/probabilistic_programming_for_advanced_machine_learning_ppaml.aspx)

создать унифицированный программный инструментарий первичного выделения объектов. В данной статье представлена модель сегментации изображения, в которой реализуется унифицированное улучшение сегментации и предусматривается способ тестирования результатов выделения объектов. При достаточной скорости предложенные методы применимы для улучшения результатов сегментации, вычисляемой по другим алгоритмам. Для скоростных вычислений в модели разработана иерархическая структура данных, которую планируется детально описать в последующих статьях.

### Литература

1. Харинов М. В. Улучшение качества приближения цифрового изображения на основе иерархической сегментации // Вестник Бурятского государственного университета. – 2014. – № 9(3). – С. 54–57.
2. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности / С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
3. Харинов М. В. Альтернатива иерархическому методу Оцу для цветового изображения // Вестник Бурятского государственного университета. – 2014. – Вып. 9. – С. 64–72.
4. Ward J.H., Jr. Hierarchical grouping to optimize an objective function. // J. Am. Stat. Assoc. 1963. Vol. 58, Issue 301, pp. 236-244.
5. Jain V., Turaga S. C., Briggman K., Helmstaedter M. N., Denk W., Seung H. S. Learning to agglomerate superpixel hierarchies // Advances in Neural Information Processing Systems. 2011. pp. 648-656.
6. Achanta R., Shaji A., Smith K., Lucchi A., Fua P., Susstrunk S. SLIC superpixels compared to state-of-the-art superpixel methods // Pattern Analysis and Machine Intelligence. IEEE Transactions. 2012. Vol. 34(11). pp. 2274-2282.
7. Mumford D., Shah J. Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1989. Vol. XLII, № 4. pp. 577-685.
8. Бугаев А. С., Хельвас А. В. Поисковые исследования и разработка методов и средств анализа и автоматического распознавания потоковой информации в глобальных информационных системах. Шифр «Ладкан» // Отчет по НИР. – М.: Изд-во МФТИ, 2001. – Т. 1. – 140 с.
9. Crisp D.J., Tao T.C. Fast Region Merging Algorithms for Image Segmentation // The 5th Asian Conference on Computer Vision (ACCV2002). 23–25 January 2002. Melbourne, Australia. pp. 1–6.
10. Dvoenko S.D. Meaningless k-means as k-meanless clustering with the bi-partial approach // Pattern Recognition and Information Processing (PRIP'2014) / Proc. of the 12th Int. Conf., Minsk, 2014. pp 50–54.
11. Scharstein D., Szeliski R. A taxonomy and evaluation of dense two-frame stereo correspondence algorithms // Int. Jour. Computer Vision (IJCV). – 2002. – No.47 (1/2/3). – Pp.7–42. – URL: <http://vision.middlebury.edu/stereo/>
12. Малашин Р. О. Методы структурного анализа изображений трехмерных сцен: автореф. дис. канд. техн. наук. – СПб., 2014. – 22 с.

### References

1. Kharinov M. V. Uluchshenie kachestva priblizheniya tsifrovogo izobrazheniya na osnove ierarkhicheskoi segmentatsii [Improving of approximation quality of a digital image based on hierarchical segmentation]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2014. No. 9 (3). Pp. 54–57.
2. Aivazyan S. A., Bukhshtaber V. M., Enyukov I. S., Meshalkin L. D. *Prikladnaya statistika: Klassifikatsiya i snizhenie razmernosti* [Applied statistics: classification and dimension reduction]. Moscow: Finansy i statistika, 1989. 607 p.
3. Kharinov M. V. Al'ternativa ierarkhicheskomu metodu Otsu dlya tsvetovogo izobrazheniya [Alternative to the hierarchical Otsu's method for color image]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2014. No. 9. Pp. 64–72.
4. Ward J. H., Jr. Hierarchical grouping to optimize an objective function. *J. Am. Stat. Assoc.* 1963. V. 58, Issue 301. Pp. 236-244.
5. Jain V., Turaga S. C., Briggman K., Helmstaedter M. N., Denk W., Seung H. S. Learning to ag-

glomerate superpixel hierarchies. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2011. Pp. 648–656.

6. Achanta R., Shaji A., Smith K., Lucchi A., Fua P., Susstrunk S. SLIC superpixels compared to state-of-the-art superpixel methods. *Pattern Analysis and Machine Intelligence. IEEE Transactions*. 2012. V. 34(11). Pp. 2274–2282.

7. Mumford D., Shah J. Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1989. V. 42. No 4. Pp. 577–685.

8. Bugaev A. S., Khel'vas A. V. *Poiskovye issledovaniya i razrabotka metodov i sredstv analiza i avtomaticheskogo raspoznavaniya potokovoi informatsii v global'nykh informatsionnykh sistemakh. Shifr «Latskan»* [Pilot studies and development of methods and tools for analyzing and automatic recognition of streaming information in global information systems. Cipher "Lapel"]. Moscow: Moscow Institute of Physics and Technology publ., 2001. V. 1. 140 p.

9. Crisp D. J., Tao T. C. Fast Region Merging Algorithms for Image Segmentation. *The 5th Asian Conference on Computer Vision (ACCV2002)*. 23–25 January 2002. Melbourne, Australia. Pp. 1–6.

10. Dvoenko S. D. Meanless k-means as k-meanless clustering with the bi-partial approach. *Pattern Recognition and Information Processing (PRIP'2014)*. Proc. of 12<sup>th</sup> Int. Conf. Minsk, 2014. Pp. 50–54.

11. Scharstein D., Szeliski R. A taxonomy and evaluation of dense two-frame stereo correspondence algorithms. *Int. Jour. Computer Vision (IJCV)*. 2002. No. 47 (1/2/3). Pp.7–42. Available at: <http://vision.middlebury.edu/stereo/>

12. Malashin R. O. *Metody strukturnogo analiza izobrazhenii trekhmernykh stsen. Avtoref. dis. kand. tekhn. nauk* [Method of structural analysis of three-dimensional scenes images. Author's abstract of Cand. techn. sci. Diss. St Petersburg. 2014. 22 p.

## 5. Управляемые системы и методы оптимизации

УДК 517.977

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-125-131

### ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

© Булдаев Александр Сергеевич

доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, директор Научно-образовательного инновационного центра системных исследований и автоматизации Бурятского государственного университета  
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, e-mail: buldaev@mail.ru

Конструируется метод оценивания коэффициентов системы обыкновенных дифференциальных уравнений, квадратичной по переменным состояния. Описываемый подход основывается на специальных формулах приращения функционалов от решений системы, не содержащих остаточных членов разложений.

**Ключевые слова:** квадратичная система, параметрическая оптимизация, приращение функционала.

### THE METHOD OF ESTIMATING THE PARAMETERS OF QUADRATIC SYSTEMS

Aleksandr S. Buldaev

DSc, Professor, Scientific and Educational Innovation Centre for System Studies and Automation, Buryat State University  
24a Smolina st., Ulan-Ude 670000, Russia

We constructed the method for estimating the coefficients of ordinary differential equations system, which was quadratic in state variables. The approach was based on special formulas of functionals increment from system solutions, that didn't contain residual terms of expansions.

**Keywords:** quadratic system, parametric optimization, increment of functionals.

#### Введение

Для задач параметрической идентификации динамических систем распространенным является оптимизационный подход, в соответствии с которым рассматривается определенная задача оптимизации параметров. Для решения возникающей задачи параметрической оптимизации можно использовать методы решения конечномерных задач математического программирования с неявно заданными функциями от параметров [1]. Другой способ решения основывается на применении теории и методов оптимального управления [2; 3]. Предлагаемый в данной работе подход основывается на построении и реализации специальных формул приращения конструируемых функционалов от решений системы, не содержащих остаточных членов разложений.

#### 1. Задача параметрической оптимизации

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j,k=1}^n a_{ijk}(\alpha, t)x_j(t)x_k(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(\alpha, t)x_j(t) + c_i(\alpha, t), \quad i = 1, \dots, n,$$

или в векторной форме

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \alpha, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

где  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  – вектор состояния,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  – вектор постоянных коэффициентов системы со значениями в компактной области  $A \subset R^m$ . Функция  $f(x, \alpha, t)$  является квадра-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-03680)

тичной по  $x$  с коэффициентами, непрерывными по  $\alpha$  и измеримыми по  $t$ , на множестве  $R^n \times A \times T$ . Общее предположение измеримости по  $t$  класса допустимых функций  $f$  связано с возможностью использования дифференциальных уравнений с разрывными по  $t$  правыми частями («толчками» [4] в заданные моменты времени), а также с использованием интегралов от измеримых по  $t$  функций в качестве функционалов. Предположим, что свойства функции  $f$  обеспечивают существование и единственность решения системы (1)  $x(t) = x(t, \alpha)$ ,  $t \in T$  для любого допустимого  $\alpha$ .

Пусть известен вектор параметров  $\alpha^0 \in A$  системы (1), который соответствует некоторому стандартному состоянию системы, называемому невозмущенным. Невозмущенному состоянию соответствует решение  $x^0(t) = x(t, \alpha^0)$ ,  $t \in T$ .

Примем далее, что истинное, или возмущенное состояние системы описывается системой (1) при некотором  $\alpha^* = \alpha^0 + \Delta\alpha^0 \in A$ . Предположим, что заданы измерения  $\hat{x}(\theta)$  в дискретные моменты времени  $\theta \in \Theta = \{\theta_k : k = 1, \dots, K; t_0 < \theta_1 < \dots < \theta_K \leq t_1\}$  возмущенного решения  $x(t, \alpha^*)$ ,  $t \in T$ . Дополнительно могут быть заданы измерения  $\hat{\Phi}^l$ ,  $l = \overline{1, L}$  функционалов от возмущенного решения. Функционалы определяются соотношениями

$$\Phi^l(\alpha) = \varphi^l(x(t_1, \alpha)) + \int_T F^l(x(t, \alpha), \alpha, t) dt, \quad l = \overline{1, L}, \quad (2)$$

где функции  $F^l(x, \alpha, t)$ ,  $l = \overline{1, L}$  являются квадратичными по  $x$  с коэффициентами, непрерывными по  $\alpha$  и измеримыми по  $t$ , на множестве  $R^n \times A \times T$ . Функции  $\varphi^l(x)$ ,  $l = \overline{1, L}$  квадратичны по  $x$  на  $R^n$ .

Отметим, что измерение  $\hat{x}_i(\theta_k)$  для  $i$ -й компоненты возмущенного решения в момент времени  $\theta_k$  можно представить в форме измерения функционала, имеющего вид (2)

$$J^{ik}(\alpha) = \int_T \langle q^{ik}(t), x(t, \alpha) \rangle dt, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad k \in \{1, \dots, K\},$$

в котором измеримая вектор-функция  $q^{ik}(t) = (q_1^{ik}(t), \dots, q_n^{ik}(t))$ ,  $t \in T$  определяется соотношениями

$$q_j^{ik}(t) = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ \delta(t - \theta_k), & j = i \end{cases} \text{ для } j = 1, \dots, n, \quad \delta(t - \theta_k) - \text{дельта-функция.}$$

Допустим, что статистические погрешности в измерениях устранены и в результате предварительной обработки данных в пределах заданной точности известно возмущенное решение  $x^*(t) = x(t, \alpha^*)$ ,  $t \in T$  и значения функционалов  $\Phi^l(\alpha^*)$ ,  $l = \overline{1, L}$ . Задача состоит в нахождении вектора возмущения параметров  $\Delta\alpha^0 = \alpha^* - \alpha^0$  по известным данным.

В алгоритмах теории малых возмущений, применяемых для решения обратных задач [5, 6], предполагают малость вектора возмущения параметров по сравнению с  $\alpha^0$ . С этой целью в задачу вводят малый параметр  $\varepsilon > 0$  по правилу  $\delta\alpha^0 = \varepsilon\Delta\alpha^0$ . Далее систему (1) и функционалы (2) линеаризуют в окрестности невозмущенного вектора параметров  $\alpha^0$  и отыскивают малую вариацию  $\delta\alpha^0$  так, чтобы  $\Phi^l(\alpha^0 + \delta\alpha^0) \approx \Phi^l(\alpha^*)$  при всех  $l$ . Если найденный возмущенный вектор  $(\alpha^0 + \delta\alpha^0)$  сильно отличается от  $\alpha^0$ , то  $(\alpha^0 + \delta\alpha^0)$  принимается за новое начальное невозмущенное приближение  $\alpha^1 = \alpha^0 + \delta\alpha^0$  и процесс уточнения новой вариации  $\delta\alpha^1$  повторяется. Таким образом, строится последовательность приближений  $\alpha^{s+1} = \alpha^s + \delta\alpha^s$ ,  $s = 0, 1, \dots$ , которая при определенных условиях сходится в том или ином смысле. Основой способа вычисления вариаций  $\delta\alpha^s$  является система алгебраических уравнений, построенная на формулах вариации функционалов  $\delta\Phi^l \approx \Phi^l(\alpha^s + \delta\alpha^s) - \Phi^l(\alpha^s)$  для различных  $l$ .

В рассматриваемом классе квадратичных по состоянию обратных задач возможно получение формул приращения функционалов (2), не содержащих остаточных членов разложений. Использование таких формул приращения функционалов позволяет решить задачу определения искомого вектора приращения параметров  $\Delta\alpha^0$  без последующих его локальных уточне-

ний, т.е. предлагаемый в работе метод оценивания возмущенных параметров имеет нелокальный характер.

Рассмотрим функцию Понтрягина  $H(p, x, \alpha, t) = \langle p, f(x, \alpha, t) \rangle$  с сопряженной переменной  $p \in R^n$ . Для дифференцируемой функции  $p(t)$ ,  $t \in T$  с условием  $p(t_1) = 0$  и нелокального возмущения  $\Delta x(t) = x^*(t) - x^0(t)$ ,  $t \in T$  можно записать тождество Лагранжа

$$\int_T \{ \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle p(t), \Delta \dot{x}(t) \rangle \} dt = 0. \quad (3)$$

При этом второе слагаемое в тождестве можно представить как

$$\begin{aligned} \langle p(t), \Delta \dot{x}(t) \rangle &= H(p(t), x^*(t), \alpha^*, t) - H(p(t), x^0(t), \alpha^0, t) = \\ &= H(p(t), x^*(t), \alpha^*, t) - H(p(t), x^*(t), \alpha^0, t) + \\ &+ H(p(t), x^*(t), \alpha^0, t) - H(p(t), x^0(t), \alpha^0, t) = \Delta_{\alpha^*} H(p(t), x^*(t), \alpha^0, t) + \\ &+ \langle H_x(p(t), x^0(t), \alpha^0, t), \Delta x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle H_{xx}(p(t), x^0(t), \alpha^0, t) \Delta x(t), \Delta x(t) \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем модифицированную сопряженную систему уравнений для переменной  $p(t)$ ,  $t \in T$

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x^0(t), \alpha^0, t) - \frac{1}{2} H_{xx}(p(t), x^0(t), \alpha^0, t) \Delta x(t) + q(t), \quad (5)$$

с начальным условием

$$p(t_1) = 0. \quad (6)$$

При этом  $q(t)$  – измеримая функция, для которой определен линейный функционал от решения системы (1)

$$J(\alpha) = \int_T \langle q(t), x(t, \alpha) \rangle dt. \quad (7)$$

Предположим существование и единственность решения  $p^0(t) = p(t, \alpha^0)$ ,  $t \in T$  сопряженной системы (5) с условием (6). Полагая  $p(t) = p^0(t)$ ,  $t \in T$  в тождестве (3) и учитывая (4)–(6), получаем формулу приращения функционала (7), не содержащую остаточных членов разложения

$$\Delta_{\alpha^*} J(\alpha^0) = \int_T \langle q(t), \Delta x(t) \rangle dt = - \int_T \Delta_{\alpha^*} H(p^0(t), x^*(t), \alpha^0, t) dt. \quad (8)$$

Выбирая измеримые функции  $q(t)$ ,  $t \in T$ , можно строить различные функционалы (7). При этом совокупность соотношений (8) будет образовывать систему алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора параметров  $\alpha^*$ .

При условии линейности функции  $f(x, \alpha, t)$  по  $\alpha$  равенство (8) принимает вид

$$\int_T \langle q(t), \Delta x(t) \rangle dt = \left\langle - \int_T H_{\alpha}(p^0(t), x^*(t), \alpha^0, t) dt, \Delta \alpha^0 \right\rangle. \quad (9)$$

В этом случае, выбирая не менее  $m$  различных функций  $q(t)$ ,  $t \in T$  можно перейти к переопределенной системе линейных уравнений вида (9) относительно вектора  $\Delta \alpha^0 = \alpha^* - \alpha^0$ , которая может быть эффективно решена по критерию наименьших квадратов [7].

Пусть дополнительно кроме возмущенного решения  $x^*(t)$ ,  $t \in T$  заданы значения функционалов (2) от возмущенного решения. Получим формулы приращения этих функционалов, позволяющие сформировывать уравнения алгебраической системы для определения искомого вектора  $\alpha^*$ .

Тождество Лагранжа (3) для произвольной дифференцируемой функции  $p(t)$ ,  $t \in T$  принимает форму

$$\int_T \{ \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle p(t), \Delta \dot{x}(t) \rangle \} dt = \langle p(t_1), \Delta x(t_1) \rangle.$$

Для фиксированного  $l \in \{1, \dots, L\}$  выберем  $p(t_1) = -\varphi_x^l(x^0(t_1)) - \frac{1}{2} \varphi_{xx}^l(x^0(t_1)) \Delta x(t_1)$ . Тогда из предыдущего равенства получаем формулу приращения терминальной части функционала (2)

$$\varphi^l(x^*(t_1)) - \varphi^l(x^0(t_1)) = - \int_T \{ \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle p(t), \Delta \dot{x}(t) \rangle \} dt. \quad (10)$$

Рассмотрим сопряженную систему (5) со следующими начальным условием и функцией  $q(t)$

$$p(t_1) = -\varphi'_x(x^0(t_1)) - \frac{1}{2} \varphi''_{xx}(x^0(t_1)) \Delta x(t_1), \tag{11}$$

$$q(t) = F'_x(x^0(t), \alpha^0, t) + \frac{1}{2} F''_{xx}(x^0(t), \alpha^0, t) \Delta x(t), \quad t \in T. \tag{12}$$

Пусть  $p^l(t) = p^l(t, \alpha^0)$ ,  $t \in T$  – решение задачи Коши (5), (11). Полагая  $p(t) = p^l(t)$ ,  $t \in T$  в (10), на основании (4), (5), (11) и (12) получаем равенство

$$\begin{aligned} \varphi^l(x^*(t_1)) - \varphi^l(x^0(t_1)) + \int_T (F^l(x^*(t), \alpha^0, t) - F^l(x^0(t), \alpha^0, t)) dt = \\ = - \int_T \Delta_\alpha H(p^l(t), x^*(t), \alpha^0, t) dt. \end{aligned} \tag{13}$$

Определим функцию Понтрягина для функционала (2) в форме

$$H^l(p, x, \alpha, t) = \langle p, f(x, \alpha, t) \rangle - F^l(x, \alpha, t).$$

Учитывая, что

$$\Delta_\alpha H^l(p^l(t), x^*(t), \alpha^0, t) = \Delta_\alpha H(p^l(t), x^*(t), \alpha^0, t) - \Delta_\alpha F^l(x^*(t), \alpha^0, t),$$

из равенства (13) получаем формулу приращения функционала (2)

$$\Delta_{\alpha^0} \Phi^l(\alpha^0) = - \int_T \Delta_\alpha H^l(p^l(t), x^*(t), \alpha^0, t) dt. \tag{14}$$

Совокупность равенств (14) при различных  $l \in \{1, \dots, L\}$  образует алгебраическую систему из  $L$  уравнений относительно искомого вектора параметров  $\alpha^*$ . При условии линейности функций  $f(x, \alpha, t)$ ,  $F(x, \alpha, t)$  по  $\alpha$  имеем линейную систему уравнений относительно  $\Delta \alpha^0$

$$\Phi^l(\alpha^*) - \Phi^l(\alpha^0) = \left\langle - \int_T H^l_{\alpha^0} (p^l(t), x^*(t), \alpha^0, t) dt, \Delta \alpha^0 \right\rangle, l = \overline{1, L}.$$

Таким образом, точные формулы (8), (14) функционалов «измерений» позволяют производить нелокальную оценку вектора возмущенных параметров  $\alpha^*$ . Построение точных формул для рассматриваемого квадратичного по состоянию класса обратных задач использует специальную форму сопряженной системы уравнений (5), которая отличается от стандартной формы сопряженной системы, рассматриваемой в теории малых возмущений для обратных задач. При этом в точных формулах (8), (14) и в построенных модифицированных сопряженных системах используется возмущенное решение  $x^*(t)$ ,  $t \in T$ , которое требуется задать для реализации процедуры нелокального оценивания.

Отметим, что в случае линейности по  $x$  функций  $f(x, \alpha, t)$ ,  $F(x, \alpha, t)$ , модифицированные сопряженные системы совпадают со стандартными, которые не содержат возмущенное решение.

Укажем выгодные отличия предлагаемого метода от, например, известного [8] прямого интегрального метода, который также позволяет производить нелокальную оценку вектора возмущенных параметров на основе точной формулы для возмущения  $\Delta x(t) = x^*(t) - x^0(t)$ ,  $t \in T$ .

1) В методе [8] требуется задание всех компонент возмущенного решения  $x^*(t)$ ,  $t \in T$ . В предлагаемом методе достаточно использовать только компоненты возмущенного решения, которые фигурируют в частных приращениях по  $\alpha$  функций Понтрягина  $H$ ,  $H^l$  в соответствующих уравнениях (8), (14).

2) Метод [8] позволяет производить оценку вектора возмущенных параметров на основе известных данных только для линейных по состоянию функционалов (7). Предлагаемый метод может использовать для оценки данные «измерений» квадратичных по состоянию функционалов вида (2).

Для построения системы алгебраических уравнений относительно вектора возмущенных параметров требуется задание возмущенного решения  $x^*(t)$ ,  $t \in T$ . На практике данные наблюдений  $\hat{X} = \{\hat{x}(\theta) : \theta \in \Theta\}$  возмущенного решения задаются на дискретном множестве моментов времени  $\theta \in \Theta = \{\theta_k : k = 1, \dots, K; t_0 < \theta_1 < \dots < \theta_K \leq t_1\}$ . Применяя среднеквадратическое приближение ( $K$  достаточно велико) или интерполяцию ( $K$  достаточно мало), можно построить гладкую функцию  $\hat{x}(t)$ ,  $t \in T$ , которую будем рассматривать как прообраз возмущенного решения или квазирешение по терминологии [5]. Квазирешение  $\hat{x}(t)$ ,  $t \in T$  будем использовать для построения практической процедуры оценки вектора возмущенных параметров.



Для фиксированных  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k \in \{1, \dots, K\}$  определим функцию  $q^{ik}(t) = (q_1^{ik}(t), \dots, q_n^{ik}(t))$ , где  $q_j^{ik}(t) = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ \delta(t - \theta_k), & j = i \end{cases}$  для  $j = 1, \dots, n$ ,  $\delta(t - \theta_k)$  – дельта-функция,  $t \in T$ ,  $\theta_k \in \Theta$ . Обозначим  $\hat{p}^{ik}(t)$ ,  $t \in T$  – решение сопряженной системы (5) при  $\Delta x(t) = \hat{x}(t) - x^0(t)$ ,  $q(t) = q^{ik}(t)$  с начальным условием  $\hat{p}^{ik}(t_1) = 0$ . Рассмотрим систему уравнений (8) относительно  $\alpha^* = \alpha$  для  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, K}$  при  $q(t) = q^{ik}(t)$ ,  $p^0(t) = \hat{p}^{ik}(t)$ ,  $x^*(t) = \hat{x}(t)$ ,  $\Delta x(t) = \hat{x}(t) - x^0(t)$ ,  $t \in T$

$$\hat{x}_i(\theta_k) - x_i^0(\theta_k) = - \int_T \Delta_\alpha H(\hat{p}^{ik}(t), \hat{x}(t), \alpha^0, t) dt, \quad i = \overline{1, n}, k = \overline{1, K}. \quad (15)$$

Пусть дополнительно заданы значения  $\hat{\Phi}^l$ ,  $l = 1, \dots, L$  функционалов «измерений» вида (2). Обозначим  $\hat{p}^l(t)$ ,  $t \in T$  – решение сопряженной системы (5) при  $\Delta x(t) = \hat{x}(t) - x^0(t)$ ,  $q(t) = F'_x(x^0(t), \alpha^0, t) + \frac{1}{2} F''_{xx}(x^0(t), \alpha^0, t) \Delta x(t)$  с начальным условием

$$\hat{p}^l(t_1) = -\varphi'_x(x^0(t_1)) - \frac{1}{2} \varphi''_{xx}(x^0(t_1)) \Delta x(t_1).$$

Присоединим к системе уравнений (15) систему уравнений (14) относительно  $\alpha^* = \alpha$  для  $l = \overline{1, L}$  при  $\Phi^l(\alpha^*) = \hat{\Phi}^l$ ,  $p^l(t) = \hat{p}^l(t)$ ,  $x^*(t) = \hat{x}(t)$ ,  $t \in T$

$$\hat{\Phi}^l - \Phi^l(\alpha^0) = - \int_T \Delta_\alpha H^l(\hat{p}^l(t), \hat{x}(t), \alpha^0, t) dt, \quad l = \overline{1, L}. \quad (16)$$

При условии линейности функций  $f(x, \alpha, t)$ ,  $F(x, \alpha, t)$  по  $\alpha$ , система уравнений (15), (16) является линейной относительно вектора  $\Delta \alpha = \alpha - \alpha^0$ , которая может быть эффективно решена по методу наименьших квадратов [7]. Пусть  $\alpha^1 = \alpha^0 + \Delta \alpha^1 \in A$  – решение системы (15), (16).

Введем функционал от решений системы (1), характеризующий меру близости решения к возмущенному решению

$$\Phi(\alpha) = \sum_{k=1}^K \langle x(\theta_k, \alpha) - \hat{x}(\theta_k), x(\theta_k, \alpha) - \hat{x}(\theta_k) \rangle + \sum_{l=1}^L \langle \Phi^l(\alpha) - \hat{\Phi}^l, \Phi^l(\alpha) - \hat{\Phi}^l \rangle. \quad (17)$$

Если  $|\Phi(\alpha^1) - \Phi(\alpha^0)|$  превышает заданную точность расчета, то  $\alpha^1$  принимается за новое начальное приближение вместо  $\alpha^0$  и расчет повторяется. Иначе  $\alpha^1$  принимается за оценку  $\alpha^*$ .

В случае линейности функций  $f(x, \alpha, t)$ ,  $F(x, \alpha, t)$  по  $\alpha$  последовательность приближений  $\alpha^{s+1} = \alpha^s + \Delta \alpha^s$ ,  $s = 0, 1, \dots$  является релаксационной:  $\Phi(\alpha^{s+1}) \leq \Phi(\alpha^s)$ . Действительно, решение  $\Delta \alpha^{s+1}$  системы (15), (16) определяется согласно методу наименьших квадратов из условия  $\Phi(\alpha^{s+1}) = \Phi(\alpha^s + \Delta \alpha^s) \rightarrow \min_{\Delta \alpha^s}$ . Невозрастающая последовательность  $\Phi(\alpha^s)$ ,  $s = 0, 1, \dots$  ограничена снизу, поэтому имеет конечный предел, т. е.  $\Phi(\alpha^s) - \Phi(\alpha^{s+1}) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ .

На практике вычислений вместо (17), следуя [5], удобно использовать безразмерную форму функционала в виде

$$\Phi(\alpha) = \sum_{k=1}^K \left\langle \frac{x(\theta_k, \alpha)}{\hat{x}(\theta_k)} - 1, \frac{x(\theta_k, \alpha)}{\hat{x}(\theta_k)} - 1 \right\rangle + \sum_{l=1}^L \left\langle \frac{\Phi^l(\alpha)}{\hat{\Phi}^l} - 1, \frac{\Phi^l(\alpha)}{\hat{\Phi}^l} - 1 \right\rangle.$$

Отметим нелокальный характер итерационной процедуры оценивания вектора возмущенных параметров: в процедуре отсутствует малый параметр, характеризующий близость соседних приближений. Нелокальность приближений является существенным фактором повышения эффективности оценивания параметров.

Предлагаемый подход легко обобщается на полиномиальные по состоянию системы и функционалы с помощью соответствующей модификации сопряженной системы [9].

### Заключение

Выделим основные особенности предлагаемой процедуры оценивания.

1. Нелокальность оценивания: в процедуре отсутствует малый параметр, характеризующий близость оцениваемого вектора возмущенных параметров к невозмущенному вектору параметров.

2. Для нелокального оценивания вектора возмущенных параметров могут использоваться значения нелинейных полиномиальных по состоянию функционалов «измерений» от возмущенного решения.

3. При условии точного задания возмущенного решения процедура позволяет определить точный вектор возмущенных параметров за одну итерацию вычислений.

4. Процедура не требует обязательной наблюдаемости всех компонент возмущенного решения. Достаточно использовать данные наблюдений только для компонент возмущенного решения, фигурирующих в частных приращениях по вектору параметров для функции Понтрягина.

В целом построенный в процедуре расчетный вектор возмущенных параметров может быть использован в качестве начального приближения для дальнейшего уточнения методами последовательной минимизации [5] различных функционалов отклонений решения системы (1) от наблюдаемого прообраза решения (квазирешения). Если функционалы отклонений имеют вид (2), в котором функции  $\varphi^l(x)$ ,  $F^l(x, \alpha, t)$  полиномиальны по переменной  $x$ , то для минимизации можно применить процедуры нелокального улучшения вектора параметров  $\alpha$ , предложенные в [9].

### Литература

1. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994. – 344 с.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
3. Методы решения задач математического программирования и оптимального управления. – Новосибирск: Наука, 1984. – 232 с.
4. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 222 с.
5. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и алгоритмы. – М.: Наука, 1991. – 300 с.
6. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 319 с.
7. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
8. Himmelblau D. M., Jones C. R., Bischoff K. B. Determination of rate constants for complex kinetics models // Ind. Eng. Chem. Fund. – 1967. – Vol.6, No. 4. – P. 539–543.
9. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. – Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. – 260 с.

### References

1. Vasil'ev O. V. *Lektsii po metodam optimizatsii* [Lectures on optimization techniques]. Irkutsk: Irkutsk State University, 1994. 344 p.
2. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka, 1976. 392 p.
3. *Metody resheniya zadach matematicheskogo programmirovaniya i optimal'nogo upravleniya* [Methods for solving problems of mathematical programming and optimal control]. Novosibirsk: Nauka, 1984. 232 p.
4. Filippov A. F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoii chast'yu* [Differential equations with discontinuous right side]. Moscow: Nauka, 1985. 222 p.
5. Marchuk G. I. *Matematicheskie modeli v immunologii. Vychislitel'nye metody i algoritmy* [Mathematical models in immunology. Computational methods and algorithms]. Moscow: Nauka, 1991. 300 p.

6. Marchuk G. I. *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchei sredy* [Mathematical modeling in the problem of environment]. Moscow: Nauka, 1982. 319 p.
7. Lawson Ch., Hanson R. *Solving Least Squares Problems*. USA: Prentice Hall, 1974. 337 p.
8. Himmelblau D. M., Jones C. R., Bischoff K. B. Determination of rate constants for complex kinetics models. *Ind. Eng. Chem. Fund.* 1967. V. 6. No. 4. Pp. 539–543.
9. Buldaev A. S. *Metody vozmushchenii v zadachakh uluchsheniya i optimizatsii upravlyaemykh sistem* [Perturbation methods in the problems of control systems improvement and optimization]. Ulan-Ude: Buryat State University publ., 2008. 260 p.

УДК 517.977

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-132-139

## ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО АНАЛИЗУ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА НЕЛОКАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ<sup>1</sup>

© Бурлаков Иван Дмитриевич

аспирант кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета  
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, e-mail: ivan.burlakov.91@mail.ru

В статье рассматривается проекционный метод нелокального улучшения и приводится результат численного эксперимента по анализу эффективности этого метода в нелинейной задаче оптимального управления.

**Ключевые слова:** задача оптимального управления, нелокальное улучшение, вычислительный эксперимент.

## NUMERICAL EXPERIMENT ON EFFECTIVENESS ANALYSIS OF THE PROJECTION METHOD FOR NONLOCAL IMPROVEMENT

Ivan D. Burlakov

Research Assistant, Department of Applied mathematics, Buryat State University  
24a Smolina st., Ulan-Ude 670000, Russia

The article deals with the projection method of nonlocal improvement and the results of numerical experiments on effectiveness analysis of this method in the nonlinear optimal control problem.

**Keywords:** optimal control problem, nonlocal improvement, numerical experiment.

### Введение

Рассмотрим задачу оптимального управления со свободным правым концом:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \inf, \quad (3)$$

где  $x(t) \in R^n$  – вектор состояния,  $u(t) \in R^r$  – вектор управления. Множество  $V$  кусочно-непрерывных на  $T$  функций со значениями в выпуклом компактном множестве  $U \subset R^r$  рассматривается в качестве множества допустимых управлений. Промежуток управления  $T$  и начальное состояние  $x_0$  заданы.

Также предполагаем, что выполнены условия гарантирующие существование и единственность решения  $x(t, v)$ ,  $t \in T$  системы (1) – (2) для любого допустимого управления  $v(t)$ ,  $t \in T$  [4].

Решать поставленную задачу (1) – (3) будем при помощи *модифицированного проекционного метода нелокального улучшения управлений с дифференциально-алгебраической сопряженной системой*. Этот метод приведем в итерационном виде, более подробно про него можно прочитать в книгах [3], [5], [6].

### 1. Проекционный метод нелокального улучшения

Как было сказано выше, рассматриваемый метод покажем в итерационном виде. Такой вид позволяет реализовать метод на компьютере, что может существенно облегчить расчет задачи.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-03680-а)

Проекционный метод нелокального улучшения использует дифференциально-алгебраическую сопряженную систему [5], [6], итерационный процесс расчета которой имеет вид:

$$\dot{p}^{k+1}(t) = -H_x(p^{k+1}(t), x^0(t), u^0(t), t) - r(t), \quad (4)$$

$$p^{k+1}(t_1) = -\varphi_x(x^0(t_1)) - q, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} H(p^k(t), x^k(t), u^0(t), t) - H(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t) = \\ = \left\langle H_x(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t) + r(t), x^k(t) - x^0(t) \right\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\varphi(x^k(t_1)) - \varphi(x^0(t_1)) = \left\langle \varphi_x(x^0(t_1)) + q, x^k(t_1) - x^0(t_1) \right\rangle, \quad (7)$$

где  $p^k(t) = p(t, u^0, u^k)$ ,  $x^k(t) = x(t, u^k)$  и  $H(p, x, u, t) = \langle p, f(x, u, t) - F(x, u, t) \rangle$  – функция Понтрягина с сопряженной переменной  $p(t, u, v)$ . Величины  $r(t)$  и  $q$  вычисляются из соответствующих алгебраических уравнений (6) и (7) (возможно и не единственным образом) [5], [6]. Такая модификация сопряженной системы позволяет получить [6] формулу приращения целевой функции в исходной задаче, которая не содержит остаточных членов разложений.

Итерационный процесс решения проекционного отображения с параметром возмущения  $\alpha > 0$ , который равен параметру проектирования (применяется метод проекционных возмущений [4]), принимает вид:

$$u^{k+1}(t) = P_u(u^0(t) + \alpha(H(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^0(t), t) + s(t))), \quad (8)$$

где  $s(t)$  находится из алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} H(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^k(t), t) - H(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^0(t), t) = \\ = \left\langle H_u(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^0(t), t) + s(t), u^k(t) - u^0(t) \right\rangle, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (9)$$

Если в задаче (1) – (3)  $f(x, u, t)$  и  $F(x, u, t)$  линейны по  $x$ , то из [5] и [6] следует, что  $r(t) \equiv 0$ ,  $t \in T$ , а если  $\varphi(x)$  линейна, то  $q = 0$ . Для задачи (1) – (3) линейной по управлению, полагаем  $s(t) = 0$ ,  $t \in T$  [5], [6].

При вычислении  $s(t)$ ,  $r(t)$  и  $q$  можно применить условия описанные в [3], [7].

## 2. Вычислительный эксперимент

В примерах вычисленные значения управляемых, фазовых и сопряженных переменных записывались в узлах равномерной сетке с шагом дискретизации  $\Delta t = 0.02$  на отрезке  $[0, 10]$  для первого примера и  $\Delta t = 0.01$  на отрезке  $[0, 5.115]$  для второго. Численный расчет задачи проводился до первого улучшения, далее строилась новая задача и итерационный алгоритм повторялся. В качестве критерия остановки выбиралось условие  $|\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k)| \leq |\Phi(u^k)| \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  – заданная точность. Численное решение фазовых и сопряженных задач Коши осуществлялось методом Рунге-Кутты-Вернера пятого или шестого порядка точности с помощью библиотеки IMSL языка Fortran PowerStation 4.0 [2]. По суммарному количеству решенных задач Коши для фазовой и сопряженной системы проводится сравнительный анализ эффективности.

Теперь решим следующую задачу [1]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1 x_2, \\ \dot{x}_2(t) = u_2, \\ \dot{x}_3(t) = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0.1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 0, \\ u(t) &\in [-1, 0], \quad t \in [0, 10]. \\ \Phi(u) &= \frac{1}{2}(x_1^2(10) + x_2^2(10)) + x_3(10) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Это билинейно-квадратичная задача с двумя управлениями.

**Решение:**

Введем необходимые конструкции. Функция Понтрягина для этого примера принимает следующий вид:

$$H(p, x, u, t) = p_1 u_1 x_2 + p_2 u_2 + \frac{1}{2} p_3 (u_1^2 + u_2^2).$$

Градиенты:

$$H_{x_1} = 0, \quad H_{x_2} = p_1 u_1, \quad H_{x_3} = 0, \quad H_{u_1} = p_1 x_2 + p_3 u_1, \quad H_{u_2} = p_2 + p_3 u_2.$$

Далее составляем дифференциально-алгебраическую сопряженную систему (4)–(7), где  $r_1(t) = r_2(t) = r_3(t) \equiv 0$ , так как  $f(x, u, t)$ ,  $F(x, u, t)$  линейны по  $x_1, x_2$  и  $x_3$ :

$$\begin{cases} \dot{p}_1^{k+1} = 0, \\ \dot{p}_2^{k+1} = -p_1^{k+1} u_1^0, \\ \dot{p}_3^{k+1} = 0, \end{cases}$$

$$p_1^{k+1}(10) = -x_1^0 - q_1, \quad p_2^{k+1}(10) = -x_2^0 - q_2, \quad p_3^{k+1}(10) = -1,$$

$$q_i = \frac{\varphi(x^k(t_1)) - \varphi(x^0(t_1))}{x^k(t_1) - x^0(t_1)} - \varphi_{x_i}(x^0(t_1)), \quad i = 1, 2,$$

$q_3 \equiv 0$ , так как  $\varphi(x)$  линейна по  $x_3$ .

Находим управление (8)–(9):

$$\begin{aligned} u^{k+1}(t) &= P_u \left( u^0(t) + \alpha \left( H(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^0(t), t) + s(t) \right) \right), \\ s(t) &= \frac{H(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^k(t), t) - H(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^0(t), t)}{u^k(t) - u^0(t)} - \\ &\quad - H_u(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^0(t), t). \end{aligned}$$

Здесь  $x^k(t)$  и  $p^k(t)$  – решение фазовой и сопряженной системы, соответственно, на  $k$ -й итерации метода. При вычислении  $s(t)$ ,  $q$  применяются условия описанные в [3], [7]. В качестве начального приближения возьмем управление  $u_1^0(t) \equiv 0$ ,  $u_2^0(t) \equiv 1$  [1].

В таблице 1 приведены результаты из [1] (1–3 метод, в книге [1] для решения задачи применялись стандартные градиентные методы и их модификации) и результат, полученный с помощью проекционного метода нелокального улучшения (ПМНУ) ( $\Phi^*$  обозначает наилучшее значение функционала). Полученные значения управляемых и фазовых траекторий изображены на рисунках 1, 2, 3, 4.

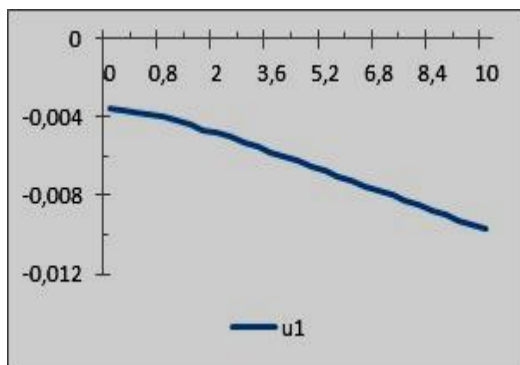


Рис. 1. Оптимальное управление  $u_1$

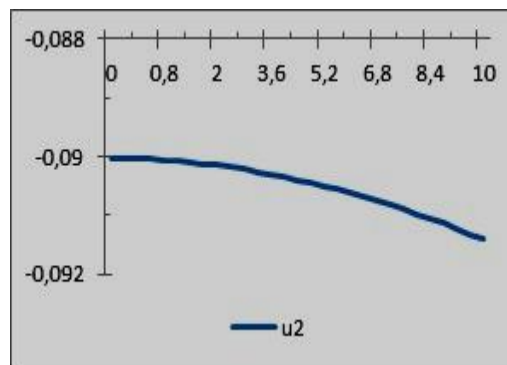


Рис. 2. Оптимальное управление  $u_2$

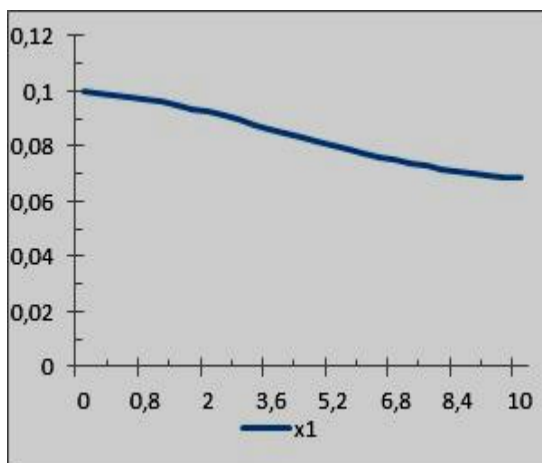


Рис. 3. Оптимальная траектория  $x_1$

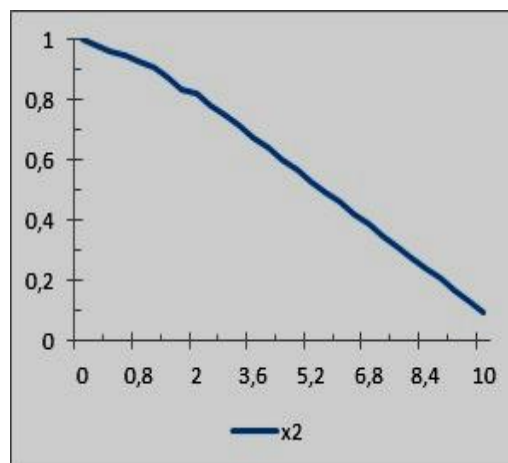


Рис. 4. Оптимальная траектория  $x_2$

Таблица 1

Сравнительный анализ эффективности

Метод	$\Phi^*$	Число задач Коши
1	0.04986	33
2	0.04692	41
3	0.048158	40
ПМНУ ( $\alpha = 0.01$ )	0.048037	9

Дальнейшее уменьшение параметра  $\alpha$  в ПМНУ приводит к ухудшению итогового значения функционала, хотя вычислительные затраты при этом не сильно меняются. Увеличение параметра  $\alpha$  – к увеличению вычислительных затрат (возрастает количество решенных задач Коши) и падению точности значения функционала.

Следующей задачей рассмотрим задачу Цермело [9], [10, стр. 112–113]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \cos(x_3), \\ \dot{x}_2(t) = \sin(x_3), \\ \dot{x}_3(t) = u, \end{cases}$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0,$$

$$u(t) \in [-0.5, 0.5], \quad t \in [0, 5.115].$$

$$\Phi(u) = 5.115 + 1000 \left( (x_1(5.115) - 4)^2 + (x_2(5.115) - 3)^2 \right) \rightarrow \min.$$

**Решение:**

Введем необходимые конструкции. Функция Понтрягина:

$$H(p, x, u, t) = p_1 \cos(x_3) + p_2 \sin(x_3) + p_3 u.$$

Градиенты:

$$H_{x_1} = 0, H_{x_2} = 0, H_{x_3} = -p_1 \sin(x_3) + p_2 \cos(x_3), H_u = p_3.$$

Составляем дифференциально-алгебраическую сопряженную систему (4)–(7):

$$\begin{cases} \dot{p}_1^{k+1} = -r_1, \\ \dot{p}_2^{k+1} = -r_2, \\ \dot{p}_3^{k+1} = p_1^{k+1} \sin(x_3^0) - p_2^{k+1} \cos(x_3^0) - r_3, \end{cases}$$

$$p_1^{k+1}(5.115) = 2000(4 - x_1^0) - q_1, \quad p_2^{k+1}(5.115) = 2000(3 - x_2^0) - q_2, \quad p_3^{k+1}(5.115) = 0,$$

$$r_i(t) = \frac{H(p^k(t), x^k(t), u^0(t), t) - H(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t)}{x^k(t) - x^0(t)} - H_{x_i}(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$q_i = \frac{\varphi(x^k(t_1)) - \varphi(x^0(t_1))}{x^k(t_1) - x^0(t_1)} - \varphi_{x_i}(x^0(t_1)), \quad i = 1, 2,$$

$q_3 \equiv 0$ , так как  $\varphi(x)$  линейна по  $x_3$ .

Находим управление (8)–(9) ( $s(t) = 0$  так как задача линейна по управлению):

$$u^{k+1}(t) = P_u(u^0(t) + \alpha H(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^0(t), t)),$$

Здесь  $x^k(t)$  и  $p^k(t)$  – решение фазовой и сопряженной системы, соответственно, на  $k$ -й итерации метода. При вычислении  $r(t)$ ,  $q$  применяются условия описанные в [3], [7].

В качестве начального приближения возьмем управление  $u^0(t) \equiv 0$ .

В таблице 2 приведены результаты из [9] и результат, полученный с помощью проекционного метода нелокального улучшения (ПМНУ) ( $\Phi^*$  обозначает наилучшее значение функционала). Полученные значения управляемых и фазовых траекторий изображены на рисунках 5, 6, 7, 8.

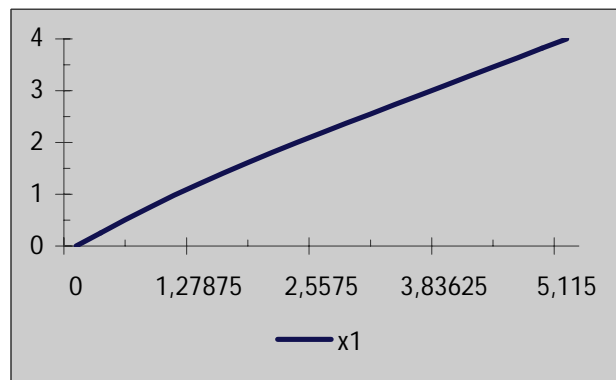


Рис. 5. Оптимальная траектория  $x_1$



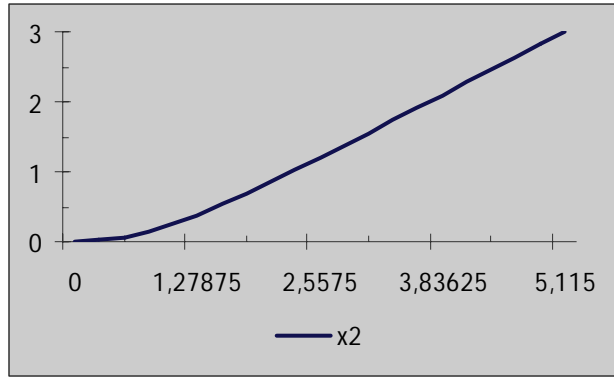


Рис. 6. Оптимальная траектория  $x_2$

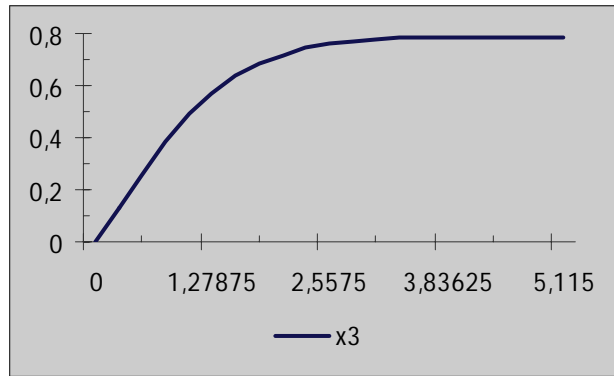


Рис. 7. Оптимальная траектория  $x_3$

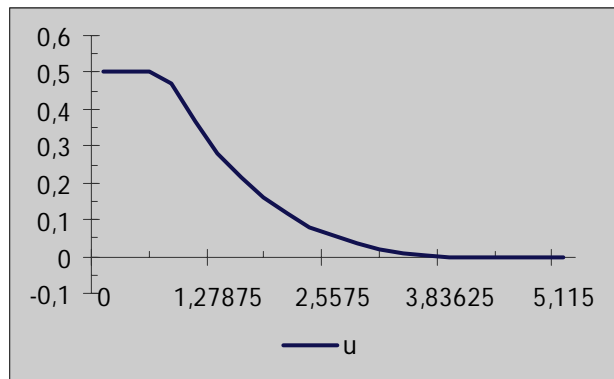


Рис. 8. Оптимальное управление  $u$

Таблица 2

## Сравнительный анализ эффективности

Метод	$\Phi^*$	Число задач Коши
1	5.850061	100010
2	5.260061	100125
3	5.128061	100002
4	5.178061	100019
5	5.260061	100036
6	6.410061	100008
7	5.330061	100015
8	5.110066	100012
9	5.300061	51837
10	5.111361	59909
ПМНУ ( $\alpha = 10^{-5}$ )	5.115998	14501

Дальнейшее уменьшение параметра  $\alpha$  в ПМНУ приводит к увеличению вычислительных затрат, например при  $\alpha = 10^{-6}$  мы получаем, что итоговое значение равно 5.122384 получается при решении 75627 задач Коши. Увеличение же параметра  $\alpha$  приводит к увеличению вычислительных затрат (возрастает количество решенных задач Коши) и падению точности значения функционала.

**Заключение**

Обычно для решения задач оптимального управления применяются градиентные методы, в которых релаксация по функционалу в общем случае обеспечивается лишь локально. Проекционный метод нелокального улучшения не гарантирует релаксацию функционала на каждой итерации, но компенсирует это отсутствием параметрического поиска. Нелокальное улучшение при поиске решения является существенным фактом повышения эффективности. Нелокальность обеспечивается фиксированностью параметра возмущения.

По решению данных примеров мы можем заметить, что проекционный метод нелокального улучшения эффективен по вычислительным затратам. При решении он затрачивает наименьшее количество задач Коши, при приемлемой точности полученного итогового значения функционала.

Дополнительно по анализу эффективности проекционного метода нелокального улучшения можно посмотреть в [7] и [8].

**Литература**

1. Антоник В. Г., Срочко В. А. Вопросы сравнительной эффективности методов градиентного типа в задачах оптимального управления. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2003.
2. Бартенев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. – М.: Диалог-МИФИ, 2001. – Ч. 3. – 368 с.
3. Булдаев А. С., Анхбаяр Г. Условия улучшения и оптимальности в задачах оптимизации нелинейных управляемых систем // Вестник Бурятского государственного университета. – 2014. – Вып. 9(2). – С. 3–9.
4. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. – Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. – 260 с.
5. Булдаев А. С., Моржин О. В. Модификация метода проекций для улучшения нелинейных управлений // Вестник Бурятского государственного университета. – 2010. – Вып. 9. – С. 10–17.
6. Булдаев А. С., Моржин О. В. Улучшение управлений в нелинейных системах на основе краевых задач // Известия Иркутского государственного университета. – Сер. Математика. – 2009. – Т. 2, № 1. – С. 94–106.
7. Бурлаков И. Д. Анализ эффективности метода нелокального улучшения в задачах оптимального управления // Вестник Бурятского государственного университета. – 2014. – Вып. 9(2). – С. 10–19.

8. Бурлаков И. Д. Численные эксперименты по анализу эффективности проекционного метода нелокального улучшения // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2014. – № 2. – С. 59–66.
9. Горнов А. Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. – Новосибирск: Наука, 2009. – 279 с.
10. Тятюшкин А. И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1992. – 193 с.

#### References

1. Antonik V. G., Srochko V. A. *Voprosy sravnitel'noi effektivnosti metodov gradientnogo tipa v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Issues of Comparative Gradient-type Methods Effectiveness in Optimal Control Problems]. Irkutsk: Irkutsk State University publ., 2003.
2. Barten'ev O. V. *Fortran dlya professionalov. Matematicheskaya biblioteka IMSL* [Fortran for Professionals. IMSL Mathematical Library]. Moscow: Dialog-MIFI, 2001. Part. 3. 368 p.
3. Buldaev A. S., Ankhbayar G. Usloviya uluchsheniya i optimal'nosti v zadachakh optimizatsii nelineinykh upravlyaemykh sistem [Conditions of Improve and Optimality in the Problems of Nonlinear Control Systems Optimization]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2014. V. 9(2). Pp. 3–9.
4. Buldaev A. S. *Metody vozmushchenii v zadachakh uluchsheniya i optimizatsii upravlyaemykh sistem* [Methods of Perturbation in the Problems of Control Systems Improvement and Optimization]. Ulan-Ude: Buryat State University, 2008. 260 p.
5. Buldaev A. S., Morzhin O. V. Modifikatsiya metoda proektsii dlya uluchsheniya nelineinykh upravlenii [Modification of the Projection Method for Nonlinear Control Improvment]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2010. V. 9. Pp. 10–17.
6. Buldaev A. S., Morzhin O. V. Uluchshenie upravlenii v nelineinykh sistemakh na osnove kraevykh zadach [Controls Improvement in Nonlinear Systems Based on Boundary-value Problems]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika – Proceedings of the Irkutsk State University. Series Mathematics*. 2009. V. 2. No.1. Pp. 94–106.
7. Burlakov I. D. Analiz effektivnosti metoda nelokal'nogo uluchsheniya v zadachakh optimal'nogo upravleniya [Effectiveness Analysis of the Nonlocal Improvement Method in Optimal Control Problems]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2014. V. 9(2). Pp. 10–19.
8. Burlakov I. D. Chislennyye eksperimenty po analizu effektivnosti proektsionnogo metoda nelokal'nogo uluchsheniya [Numerical Experiments on the Efficiency Analyses of the Projection Method of Nonlocal Improvement]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, Informatika – Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Computer Science*. 2014. V. 2. Pp. 59–66.
9. Gornov A. Yu. *Vychislitel'nye tekhnologii resheniya zadach optimal'nogo upravleniya* [Computing Technology for Solving Optimal Control Problems]. Novosibirsk: Nauka, 2009. 279 p.
10. Tyatyushkin A. I. *Chislennyye metody i programmnyye sredstva optimizatsii upravlyaemykh sistem* [Numerical methods and software for control systems optimization]. Novosibirsk: Nauka, Siberian Branch, 1992. 193 p.

УДК 517.97

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-140-144

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ В КЛАССЕ ГЛАДКИХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ<sup>1</sup>

© Поплевко Василиса Павловна

кандидат физико-математических наук, доцент Иркутского государственного университета  
Россия, 664003, ул. Карла Маркса, 1, e-mail: vasilisa@math.isu.ru

Исследуется задача оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений первого порядка. Управляющие воздействия выбираются из класса гладких функций, удовлетворяющих интегральным ограничениям. Для задачи получено необходимое условие оптимальности вариационного типа в классе допустимых гладких управлений. Предложена основанная на необходимом условии схема метода улучшения допустимого управления и проведена численная реализация в системе MATLAB 7.0. Приведены результаты расчетов. Проведенный численный эксперимент показал, что предложенный метод улучшения гладких управляющих воздействий, удовлетворяющих интегральным ограничениям, может эффективно применяться для решения данного класса задач.

**Ключевые слова:** полулинейная гиперболическая система, гладкие управления, необходимое условие оптимальности, итерационный метод улучшения допустимого управления.

## OPTIMUM CONTROL OF HYPERBOLIC SYSTEMS IN THE CLASS OF SMOOTH CONTROL ACTIONS

Vasilisa P. Poplevko

PhD, A/Professor, Irkutsk State University  
1 Karla Marksa st., Irkutsk 664003, Russia

The problem of optimal control of first order semi-linear hyperbolic equations system was studied. Control actions were selected from the class of smooth functions satisfying the integral constraints. We obtained the necessary optimality conditions of variational type in the class of admissible smooth controls. The condition of optimality was proved, and a scheme of iterative method was proposed. The numerical experiment was carried out in MATLAB 7.0 system. The results of numerical experiment showed that the proposed method of improving the smooth control functions could be effectively used to solve this class of problems.

**Keywords:** semi-linear hyperbolic system, smooth control, necessary condition of optimality, iterative method for improving the admissible control.

### Введение

В классе гладких управляющих воздействий исследуется задача оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений первого порядка. Рассматривается случай, когда функция, входящая в правую часть системы, определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие задачи возникают при моделировании ряда процессов химической технологии [1]. Управляющие воздействия стеснены интегральными ограничениями.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую систему полулинейных гиперболических уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} x_t + A(s,t)x_s &= f(x, y, s, t), \\ (s, t) \in \Pi, \quad \Pi &= S \times T, \quad S = [s_0, s_1], \quad T = [t_0, t_1]. \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ №14-01-00564)

Здесь  $x = x(s, t)$  –  $n$ -мерная вектор-функция,  $A = A(s, t)$  – диагональная матрица  $n \times n$ ,  $y = y(t)$  –  $m$ -мерная вектор-функция. Дополнительно введем предположение, что диагональные элементы  $a_i = a_i(s, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , матрицы коэффициентов знакопостоянны в  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} a_i(s, t) &> 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1; \\ a_i(s, t) &= 0, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2; \\ a_i(s, t) &< 0, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Составим две диагональные подматрицы:  $A^+(s, t)$  размерности  $m_1 \times m_1$  и  $A^-(s, t)$  размерности  $(n - m_2) \times (n - m_2)$  из положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы  $A$  соответственно. Из вектора состояния  $x = x(s, t)$  выделим два подвектора, соответствующих положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы  $A$ :

$$x^+ = (x_1, x_2, \dots, x_{m_1}), \quad x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \dots, x_n).$$

Начально-краевые условия для системы (1) зададим в следующем виде

$$x(s, t_0) = x^0(s), \quad s \in S; \quad x^+(s_0, t) = \eta(t), \quad x^-(s_1, t) = \mu(t), \quad t \in T. \quad (2)$$

Функция  $y(t)$  определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y_t &= g(y, u, t), \quad t \in T, \\ y(t_0) &= y^0. \end{aligned} \quad (3)$$

В качестве множества допустимых управлений выберем совокупность гладких на  $T$  функций, удовлетворяющих интегральным ограничениям

$$\int_T \Phi_j(u(t)) dt = L_j, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (4)$$

с дополнительным условием однородности подынтегральных функций

$$\Phi_j(\lambda u) = \lambda^\alpha \Phi_j(u), \quad \alpha \geq 1.$$

Требуется найти допустимое управление, доставляющее минимум целевому функционалу

$$J(u) = \int_S \varphi(x(s, t_1), s) ds + \iint_{\Pi} F(x, s, t) ds dt \rightarrow \min. \quad (5)$$

на решениях задачи (1)–(3).

Задача (1)–(5) рассматривается при следующих предположениях на параметры:

1) диагональные элементы  $a_i = a_i(s, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  матрицы  $A$  непрерывно дифференцируемы в прямоугольнике  $\Pi$ ;

2) функции  $x^0(s)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\mu(t)$  непрерывны на  $S$  и  $T$  соответственно;

3) вектор-функция  $f(x, y, s, t)$  и скалярные функции  $\varphi(x, s)$ ,  $F(x, s, t)$  непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по  $x$ ,  $y$  и  $x$  соответственно;

4) функция  $g(y, u, t)$  непрерывна, непрерывно дифференцируема по своим аргументам и имеет ограниченные производные по  $y$ ,  $u$ .

Решение начально-краевой задачи (1)–(2) понимается в обобщенном смысле как решения интегральной системы уравнений, построенной на характеристиках исходной гиперболической системы [2].

## 2. Необходимое условие оптимальности

Введем следующие функции

$$\begin{aligned} H(\psi, x, y, s, t) &= \langle \psi, f(x, y, s, t) \rangle - F(x, s, t), \\ h(p, y, u, t) &= \langle p, g(y, u, t) \rangle. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы функции  $\psi(s, t)$ ,  $p(t)$  являлись решениями следующей сопряженной задачи:

$$\psi_t + A(s, t)\psi_s + A_s\psi = -H_x(\psi, x, y, s, t), \quad \psi(s, t_1) = -\varphi_x(x(s, t_1)),$$

$$\psi^-(s_0, t) = 0, \quad \psi^+(s_1, t) = 0; \tag{6}$$

$$p_t = -h_y(p, y, u, t) - \int_{s_0}^{s_1} H_y ds, \quad p(t_1) = 0. \tag{7}$$

В [3] было сформулировано необходимое условие оптимальности для данной оптимизационной задачи с поточечными ограничениями на управляющие функции.

Необходимое условие оптимальности в случае интегральных ограничений на управление сформулировано в следующей Теореме.

**Теорема.** Если процесс  $\{u, y\}$  является оптимальным в задаче (1)–(5), всюду на отрезке  $T$  выполняется условие

$$\langle h_u(p(t), y(t), u(t), t), u_t(t)) \rangle - \frac{1}{\alpha} \cdot \langle h_u(p(t), y(t), u(t), t), u \rangle_t = 0, \quad t \in T. \tag{8}$$

**Замечание.** В случае, когда в интегральные ограничения управления входят линейно ( $\alpha = 1$ ), условие (8) запишется в более простой форме (аналогичные результаты были получены в работе [4])

$$\langle h_u(p(t), y(t), u(t), t), u \rangle = 0, \quad t \in T. \tag{9}$$

На основе полученного условия оптимальности можно построить численный метод решения задач оптимального управления (аналогично [3,4]).

### 3. Общая схема метода

Введем в рассмотрение скалярную функцию

$$\omega(p(t), y(t), u(t), t) = \langle h_u(p(t), y(t), u(t), t), u_t(t)) \rangle - \frac{1}{\alpha} \cdot \langle h_u(p(t), y(t), u(t), t), u \rangle_t.$$

Пусть задано начальное приближение из класса допустимых функций  $u^0(t)$ . Опишем переход от  $u^k(t)$  к  $u^{k+1}(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . На управлении  $u^k(t)$  находятся  $x^k(s, t)$ ,  $y^k(t)$ ,  $\psi^k(s, t)$ ,  $p^k(t)$  решения прямой и сопряженной систем и строится  $\omega(p^k(t), y^k(t), u^k(t), t)$ . Если  $\omega_k(t) = 0, t \in T$ , то управление  $u^k$  удовлетворяет необходимому условию оптимальности, и алгоритм заканчивает свою работу. Если необходимое условие не выполняется, строится гладкая вариация управления  $u^k$  по правилу [4]:

$$u_\varepsilon^k(t) = (1 + \varepsilon_k \delta(t))u^k(t + \varepsilon_k \delta(t)),$$

где

$$\delta_k(t) = \frac{\gamma_k(t)}{M},$$

$$\gamma_k(t) = \frac{(t-t_0)(t_1-t)\omega_k}{(t_1-t_0) \max_{t \in T} |\omega_k|}, \quad M = \max_{t \in T} |\dot{\gamma}_k(t)|.$$

Параметр  $\varepsilon_k$  определяется из численного решения задачи одномерной минимизации

$$\varepsilon_k : J(u_\varepsilon^k) \rightarrow \min, \quad \varepsilon \in [0, 1]$$

среди значений  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ . Случай, когда найденное значение параметра очень близко к нулю, соответствует неуплощению функционала на шаге метода.

Следующее приближение находится по формуле

$$u^{k+1} = u_{\varepsilon_k}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### 4. Численный эксперимент

Рассмотрим работу описанного выше метода на тестовом примере. В квадрате  $[0;1] \times [0;1]$  рассмотрим задачу оптимального управления

$$x_{1t} + x_{1s} = x_1 + x_2 + 3y_1, \quad x_1(0, t) = 0, \quad x_1(s, 0) = 1;$$

$$\begin{aligned}x_{2t} + 2x_{2s} &= x_2 - y_2, & x_2(0, t) &= 0, & x_2(s, 0) &= s. \\y_{1t} &= -u + t^2, & y_1(0) &= 1, \\y_{2t} &= uy_1, & y_2(0) &= 1.\end{aligned}$$

Допустимые управления – гладкие функции, удовлетворяющие интегральному ограничению

$$\int_0^1 u(t) dt = \frac{1}{3}.$$

Целевой функционал имеет вид

$$J(u) = \int_s (x_1(s, t_1) - \eta_1(s))^2 + (x_2(s, t_1) - \eta_2(s))^2 ds \rightarrow \min,$$

где функции  $\eta_1(s)$ ,  $\eta_2(s)$  подсчитаны на допустимом управлении  $\bar{u}(t) = \frac{2}{3}(1-t)$ .

В качестве начального управления аналитически была подобрана функция  $u^0 = u^0(t) = \frac{1}{3}(\sin 2\pi t + 1)$ . Значение целевого функционала  $J(u^0) = 2,8335$ .

Результаты вычислений приведены в таблице 1:

Таблица 1

$s$	$\eta_1(s)$	$\eta_2(s)$	$x_1^k(s, t_1)$	$x_2^k(s, t_1)$
0	0	0	0	0
0,17	7,3764	-0,19271	7,3791	-0,19393
0,38	13,298	-0,42972	13,3001	-0,43102
0,56	16,105	-0,62852	16,1072	-0,62997
0,75	17,73	-0,8358	17,7334	-0,83475
0,87	18,587	-0,96649	18,593	-0,96774
1	20,366	-1,1089	20,374	-1,1099

Значение целевого функционала на выходе процедуры  $J(u^k) = 0,00027221$ ; величина невязки метода  $\max_{t \in T} |\omega_k(t)| = 0,0014792$ ; количество итераций 98; причина остановки алгоритма – достижение заданной точности по значению функционала.

Рассмотрим работу метода при постоянной управляющей функции. Возьмем начальное управление  $u^0(t) = \frac{1}{3}$ . Значение целевого функционала  $J(u^0) = 0,031325$ .

Результаты вычислений приведены в таблице 2:

Таблица 2

$s$	$\eta_1(s)$	$\eta_2(s)$	$x_1^k(s, t_1)$	$x_2^k(s, t_1)$
0	0	0	0	0
0,17	7,3764	-0,19271	7,3831	-0,20393
0,38	13,298	-0,42972	13,307	-0,43892
0,56	16,105	-0,62852	16,138	-0,63057
0,75	17,73	-0,8358	17,753	-0,85575
0,87	18,587	-0,96649	18,621	-0,98014
1	20,366	-1,1089	20,394	-1,1202

Значение целевого функционала на выходе процедуры  $J(u^k) = 0,0097656$ ; величина невязки метода  $\max_{t \in T} |\omega_k(t)| = 0,081655$ ; количество итераций 130; причина остановки алгоритма – не улучшение по значению функционала ( $J(u^k) - J(u^{k-1}) > 10^{-6}$ ).

### Заключение

Для задачи оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений первого порядка в классе гладких управлений, удовлетворяющих интегральным ограничениям

была предложена основанная на необходимом условии схема метода улучшения допустимого управления и проведена численная реализация в системе MATLAB 7.0. Численный эксперимент показал, что на результат вычислений влияет выбор начального приближения.

В случае интегральных ограничений на управляющие воздействия (в отличие от поточечных ограничений) есть возможность рассматривать постоянные функции управления. Однако при таких управляющих функциях метод работает менее эффективно.

Проведенный численный эксперимент показал, что предложенный метод улучшения гладких управляющих воздействий может эффективно применяться для решения данного класса задач.

#### Литература

1. Демиденко Н. Д., Потапов В. И., Шокин Ю. И. Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами. – Новосибирск: Наука, 1983. – 271 с.
2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 686 с.
3. Аргучинцев А. В., Поплевко В. П. О задаче управления сосредоточенными параметрами в правых частях полуплинейных гиперболических систем // Изв. ИГУ. Сер. Математика. – 2015. – Т. 11. – С. 3–12.
4. Аргучинцев А. В. Оптимальное управление гиперболическими системами. – М.: Физматлит, 2007. – 165 с.

#### References

1. Demidenko N. D., Potapov V. I., Shokin Yu. I. *Modelirovanie i optimizatsiya sistem s raspredelennymi parametrami* [Modeling and Optimization of Systems with Distributed Parameters]. Novosibirsk: Nauka, 1983. 271 p.
2. Rozhdestvenskii B. L., Yanenko N. N. *Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniya k gazovoi dinamike* [Systems of Quasi-linear Equations and their Applications to Gas Dynamics]. Moscow: Nauka, 1978. 686 p.
3. Arguchintsev A. V., Poplevko V. P. O zadache upravleniya sosredotochennymi parametrami v pravyykh chastyakh polulineinykh giperbolicheskikh sistem [On the Problem of Lumped Parameters Control at the Right Sides of Semi-Linear Hyperbolic Systems]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematika» – Proceedings of Irkutsk State University. Series «Mathematics»*. 2015. V. 11. Pp. 3–12.
4. Arguchintsev A. V. *Optimal'noe upravlenie giperbolicheskimi sistemami* [Optimal Control of Hyperbolic Systems]. Moscow: Fizmatlit, 2007. 165 p.



УДК 517.97

doi: 10.18097/1994-0866-2015-0-9-145-149

## ГЛОБАЛЬНЫЙ МЕТОД УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА РАЗРЫВОВ ТРАЕКТОРИИ<sup>1</sup>

© Трушкова Екатерина Александровна

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем управления РАН

Россия, 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65, e-mail: katerinatr@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления динамическими системами, линейными по неограниченному управлению. Построено обобщение этого класса систем, включающее процессы с разрывными траекториями на концах и в конечном числе внутренних точек временного отрезка. Предложен итерационный метод улучшения обобщенного процесса. Более детально метод разработан для задачи оптимального управления билинейными системами. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** динамическая система, оптимальное управление, импульсное управление, метод улучшения.

## THE GLOBAL METHOD OF CONTROL IMPROVEMENT FOR THE CASE OF TRAJECTORY DISCONTINUITIES FINITE NUMBER

**Ekaterina A. Trushkova**

DSc, Leading Researcher, Institute of Control Sciences, RAS

65 Profsoyuznaya st., Moscow 117997, Russia

The problem of optimal control of linear in unlimited control dynamic systems was considered. We built the extension of the systems of this class. It included processes with discontinuous trajectories at the ends and in the finite number of time interval interior points. It was constructed the iterative method for generalized process improvement. In more detail the method was designed for the problem of bilinear systems optimal control. We gave the results of computational experiments.

**Keywords:** dynamical system, optimal control, impulse control, improvement method.

### Введение

В работе [1] рассматривалась задача оптимального управления динамическими системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, линейными по неограниченному управлению. Для таких задач характерно отсутствие минимума на ординарном классе допустимых процессов (непрерывные траектории, кусочно-непрерывные управления) и достижение его на некотором обобщении этого класса, включающем процессы с разрывными траекториями. Для обобщенной постановки задачи в случае разрывов траектории на концах временного отрезка был разработан метод последовательного улучшения управления [1], обобщающий известный глобальный метода улучшения [2-4]. В настоящей статье проводится дальнейшее исследование подобных задач, а именно, исследуется обобщенная постановка для случая конечного числа разрывов траектории на временном отрезке и разработан для этой постановки глобальный метод улучшения.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенная задача оптимального управления для случая разрывов траектории  $x(t)$  в точках  $t = 0$ ,  $t = \xi$  и  $t = T$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-07-09091).

$$\begin{aligned}
 J(m) &= F(x(T)) \rightarrow \min, \\
 x(0) &= x_0, \quad x(0+) = \Omega(\tau(0), 0, x(0)), \\
 \dot{x}(t) &= g(t, x(t)) + h(t, x(t))u(t), \quad t \in (0, \xi) \cup (\xi, T), \\
 x(\xi) &= \Omega(\tau(\xi), \xi, x(\xi-)), \quad x(T) = \Omega(\tau(T), T, x(T-)),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $x(t)$  –  $n$ -мерная непрерывная на  $(0, \xi) \cup (\xi, T)$  кусочно-дифференцируемая функция; управление  $u(t)$  – скалярная кусочно-непрерывная функция,  $\tau(0), \tau(\xi), \tau(T) \in R$ ,  $\Omega(\tau, t, x)$  – решение задачи Коши для предельной системы

$$\frac{d\omega}{d\tau} = h(t, \omega), \quad \omega(0, t, x) = x.
 \tag{2}$$

Непрерывно-дифференцируемые функции  $F(x)$ ,  $g(t, x)$ ,  $h(t, x)$ , состояние  $x_0$  и момент  $T$  заданы.

По аналогии с обобщенной задачей из [1], где рассматривались разрывы лишь в точках  $t = 0$  и  $t = T$ , обозначим через  $E$  множество допустимых обобщенных процессов

$$m = (x(t), u(t), \tau(0), \tau(\xi), \tau(T)).$$

Величины  $\tau(0), \tau(\xi)$  и  $\tau(T)$  играют роль управляющих параметров. Обобщенное управление  $(u(t), \tau(0), \tau(\xi), \tau(T))$  будем называть *импульсным*.

Таким образом, каждому обобщенному управлению соответствует обобщенная траектория  $x(t)$ , разрывная по  $t$  в точках  $t = 0$ ,  $t = \xi$  и  $t = T$ .

Поставим задачу улучшения для обобщенной постановки: задан процесс  $m^0 \in E$ ; требуется получить процесс  $m \in E$  такой, что  $J(m) < J(m^0)$ .

На эту задачу здесь доопределяется метод глобального улучшения, предложенный и исследованный в [1–4].

## 2. Метод улучшения обобщенного процесса

Введем в рассмотрение функционал

$$\begin{aligned}
 L(m) &= G(\tau(T), x(T-)) + G^0(\tau(0)) - \int_0^T R(t, x, u) dt + G^1(\tau(\xi), x(\xi-)), \\
 G(\tau, x) &= F(\omega(\tau, T, x)) + \varphi(T, x), \quad G^0(\tau) = -\varphi(0, \omega(\tau, 0, x_0)), \\
 G^1(\tau, x) &= \varphi(\xi-, x) - \varphi(\xi+, \omega(\tau, \xi, x)), \\
 R(t, x, u) &= \varphi_x^T(g(t, x) + h(t, x)u) + \varphi_t, \quad t \in (0, T),
 \end{aligned}$$

где  $\varphi(t, x)$  непрерывно-дифференцируема по  $(t, x)$  при  $t \neq \xi$ .

Функционал  $L$  является обобщенным лагранжианом для обобщенной задачи (1), т. е.  $L(m) = J(m)$ ,  $m \in E$ .

Опишем одну итерацию *глобального метода улучшения* для рассматриваемой обобщенной задачи.

0. Задаем обобщенное управление  $(u^0(t), \tau^0(0), \tau^0(\xi), \tau^0(T))$ . Находим соответствующую траекторию  $x^0(t)$  и вычисляем значение функционала  $F(x^0(T)) = F(\omega(\tau^0(T), T, x^0(T-)))$ .

1. Находим функцию  $\varphi(t, x)$  из условий

$$\begin{aligned}
 G(\tau^0(T), x^0(T-)) &\geq G(\tau^0(T), x) \quad \forall x, \\
 G^1(\tau^0(\xi), x^0(\xi-)) &\geq G^1(\tau^0(\xi), x) \quad \forall x, \\
 R(t, x^0(t), u^0(t)) &\leq R(t, x, u^0(t)) \quad \forall x, t \in (0, \xi) \cup (\xi, T).
 \end{aligned}$$

2. Построение улучшенного режима проводим последовательно для  $t = 0$ ,  $t \in (0, \xi)$ ,  $t = \xi$ ,  $t \in (\xi, T)$  и  $t = T$ . А именно, разрывная траектория допустимого процесса строится следующим образом:

1) интегрируем уравнение (2) при  $t = 0$ ,  $x = x_0$  и находим значение  $\tau(0)$  из условия

$$\tau(0) \in \text{Arg} \min_{\tau} G^0(\tau);$$

2) находим решение  $x(t)$  задачи Коши

$$\dot{x} = g(t, x) + h(t, x)u(t, x), \quad t \in (0, \xi), \quad x(0+) = \omega(\tau(0), 0, x_0),$$

где  $u(t, x)$  вычисляется по формуле, аналогичной формуле особого режима, представленной в [1];

3) интегрируем уравнение (2) при  $t = \xi$ ,  $x = x(\xi-)$  и находим значение  $\tau(\xi)$  из условия

$$\tau(\xi) \in \text{Arg} \min_{\tau} G^1(\tau, x(\xi-)).$$

4) находим решение  $x(t)$  задачи Коши

$$\dot{x} = g(t, x) + h(t, x)u(t, x), t \in (\xi, T), x(\xi +) = \omega(\tau(\xi), \xi, x(\xi -)),$$

где  $u(t, x)$  вычисляется по формуле, аналогичной формуле особого режима, представленной в [1];

5) интегрируем уравнение (2) при  $t = T, x = x(T-)$  и находим значение  $\tau(T)$  из условия

$$\tau(T) \in \underset{\tau}{\text{Arg min}} G(\tau, x(T-)).$$

6) вычисляем новое значение функционала

$$F(x(T)) = F(\omega(\tau(T), T, x(T-))).$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Описанная выше процедура гарантирует выполнение неравенства  $L(m) \leq L(m^0)$  и, как следствие, выполнение неравенства  $J(m) \leq J(m^0)$ . При этом, если выполняется хотя бы одно из следующих неравенств:

$$G(\tau(T), x(T-)) < G(\tau^0(T), x(T-)),$$

$$G(\tau^0(T), x(T-)) < G(\tau^0(T), x^0(T-)),$$

$$G^0(\tau(0)) < G^0(\tau^0(0)), \int_0^T (R(t, x(t), u^0(t)) - R(t, x^0(t), u^0(t))) dt > 0,$$

то справедливо строгое неравенство  $L(m) < L(m^0)$  и, как следствие, строгое неравенство  $J(m) < J(m^0)$ .

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы в [1].

**Замечание.** Все вышеизложенное легко обобщается на случай конечного числа  $s$  разрывов траектории (импульсов управления) при  $t = 0, t = \xi_k, k = 1, \dots, s, t = T$ .

### 3. Метод улучшения для билинейных систем

Для случая, когда

$$g(t, x(t)) + h(t, x(t))u(t) = (A(t) + B(t)u(t))x(t),$$

$$F(x(T)) = x^T(T)Mx(T),$$

разрешающую функцию  $\varphi(t, x)$  можно искать в линейном виде, т. е.  $\varphi(t, x) = \psi^T(t)x$ . Одна итерация глобального метода улучшения для этого случая переписывается в следующем виде.

0. Задаем обобщенное управление  $(u^0(t), \tau^0(0), \tau^0(\xi), \tau^0(T))$ . Находим соответствующую траекторию  $x^0(t)$  и вычисляем значение функционала  $F(x^0(T))$ , где  $x^0(T) = \Phi(\tau^0(T), T)x^0(T-)$ ,  $\Phi(\tau, t) = e^{B(t)\tau}$  – фундаментальная матрица решений системы (2) для рассматриваемого случая.

1. Находим функцию  $\psi(t)$  как решение задачи Коши

$$\dot{\psi} = -(A(t) + B(t)u^0(t))^T \psi,$$

$$\psi(T) = -2\Phi^T(\tau^0(T), T)M\Phi(\tau^0(T), T)x^0(T-).$$

2. Вычисляем  $\tau(0)$  из условия

$$\tau(0) \in \underset{\tau}{\text{Arg min}} \{-\psi^T(0)\Phi(\tau, 0)x_0\}.$$

3. Находим решение  $x(t)$  задачи Коши

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)u(t, x(t)))x(t), t \in (0, \xi), x(0+) = \Phi(\tau(0), 0)x_0,$$

где  $u(t, x)$  вычисляется по формуле, аналогичной формуле особого режима, представленной в [1].

4. Вычисляем  $\tau(\xi)$  из условия

$$\tau(\xi) \in \underset{\tau}{\text{Arg min}} \{-\psi^T(\xi+) \Phi(\tau, \xi)x(\xi-)\}.$$

5. Находим решение  $x(t)$  задачи Коши

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)u(t, x(t)))x(t), t \in (\xi, T), x(\xi+) = \Phi(\tau(\xi), \xi)x(\xi-),$$

где  $u(t, x)$  вычисляется по формуле, аналогичной формуле особого режима, представленной в [1].

6. Из соотношения

$$\tau(T) \in \underset{\tau}{\text{Arg min}} \{-x^T(T-) \Phi^T(\tau, T)M\Phi(\tau, T)x(T-)\},$$

находим  $\tau(T)$ .

7. Вычисляем новое значение функционала

$$F(x(T)) = F(\Phi(\tau(T), T)x(T-)).$$

#### 4. Вычислительные эксперименты

В качестве модельного примера рассмотрим грубую аппроксимацию для известной задачи вращения плоской молекулы [5, 6]. После разложения волновой функции и операторов, входящих в соответствующее уравнение Шрёдингера, по собственным функциям конечномерная аппроксимация третьего порядка рассматриваемой динамической системы в действительных переменных запишется в виде

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)u(t))x(t), t \in [0, T], x(t) \in R^6, \tag{3}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В отличие от [5, 6], где рассматривалась задача перевода волновой функции из первого собственного подпространства (соответствующего собственному значению 1) во второе (соответствующее собственному значению 4), поставим задачу перевода волновой функции из первого собственного подпространства в третье (соответствующее собственному значению 9), что соответствует постановке задачи оптимального управления системой (3) с начальным условием  $x(0) = (1, 0, \dots, 0)^T$  на минимум функционала  $F(x) = 1 - x_3^2 - x_6^2$ .

При проведении вычислений для работы компьютерной программы (написанной на языке программирования C++), реализующей вышеизложенный итерационный метод улучшения управления при различном равномерном выборе точек разрыва траектории, были фиксированы  $T = 3$ , ограничение на управление  $|u(t)| \leq 100$  и начальное управление  $u^0(t) = 0.01$ . Полученные результаты представлены в следующей таблице и позволяют сделать вывод об улучшении работы метода при добавлении точек внутренних разрывов траектории.

Номер итерации	$\tau(0)$	$\tau(0.75)$	$\tau(1.5)$	$\tau(2.25)$	$\tau(3)$	$F(x(3))$
Без внутренних разрывов						
0	0				0	1
1	0				0.001256	1
2	0				1.234020	0.999982
3	0				5.468880	0.000327
4	0				0.168389	0.000193
5	0				5.645440	0.000130
Один внутренний разрыв при $\xi = 1.5$						
0	0		0		0	1
1	0		2.895920		0.001256	1
2	0		1.439480		0.616380	0.000208
3	0		1.439480		0.586850	0.000144
4	0		1.438850		0.586850	0.000128
5	0		1.438220		0.579938	0.000112
Три внутренних разрыва при $\xi_1 = 0.75, \xi_2 = 1.5, \xi_3 = 2.25$						
0	0	0	0	0	0	1
1	0	5.987880	0.435425	6.258680	0.175301	1
2	0	5.979080	0.769690	6.210930	4.099780	0.999960
3	0	5.797500	0.772203	0.007539	0.082309	0.001222
4	0	5.796870	0.771575	0.008168	0.006911	0.000113
5	0	5.796870	0.771575	0.008168	0.081053	0.000049

### Заключение

Разработан итерационный глобальный метод улучшения обобщенного процесса, включающего разрывные в конечном числе внутренних точек временного отрезка траектории. Детально метод представлен применительно к задаче оптимального управления билинейными системами. Проведена программная реализация соответствующих алгоритмов улучшения на языке C++. Метод апробирован в вычислительных экспериментах на модельной тестовой задаче.

### Литература

1. Кротов В.Ф., Моржин О.В., Трушкова Е.А. Разрывные решения задач оптимального управления. Итерационный метод оптимизации // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 12. – С. 31–55.
2. Кротов В.Ф., Фельдман Н.Н. Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1983. – № 2. – С. 160–168.
3. Krotov V.F. *Global methods in optimal control theory*. – New York: Marcel Dekker, 1996.
4. Трушкова Е.А. Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 6. – С. 151–159.
5. Boussaid N., Caponigro M., Chambrion T. *Periodic control laws for bilinear quantum systemt with discrete spectrum*. – URL: <http://arXiv.org/pdf/1111.4550v1>
6. Трушкова Е. А. Метод глобального улучшения для гамильтоновых систем с управляемыми коэффициентами // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. – 2013. – Т. 13. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1, ч. 2. – С. 95–99.

### References

1. Krotov V. F., Morzhin O. V., Trushkova E. A. *Razryvnye resheniya zadach optimal'nogo upravleniya. Iteratsionnyi metod optimizatsii* [Discontinuous solutions of optimal control problems. The iterative optimization method]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2013. No. 12. Pp. 31–55.
2. Krotov V. F., Fel'dman N. N. *Iteratsionnyi metod resheniya zadach optimal'nogo upravleniya* [The iterative method for solving optimal control problems]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika – Proceedings of USSR Academy of Science. Engineering Cybernetics*. 1983. No. 2. Pp. 160–168.
3. Krotov V. F. *Global methods in optimal control theory*. New York: Marcel Dekker, 1996
4. Trushkova E. A. *Algoritmy global'nogo poiska optimal'nogo upravleniya* [Algorithms of control improvement global search]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2011. No. 6. Pp. 151–159.
5. Boussaid N., Caponigro M., Chambrion T. *Periodic control laws for bilinear quantum system with discrete spectrum*. Available at: <http://arXiv.org/pdf/1111.4550v1>.
6. Trushkova E. A. *Metod global'nogo uluchsheniya dlya gamil'tonovykh sistem s upravlyaemyimi koeffitsientami* [Global improvement method for Hamiltonian systems with controllable coefficients]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika. Proceedings of Saratov University. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2013. Bk. 13. V. 1. No. 2. Pp. 95–99.

## Содержание

### 1. Алгебра и геометрия

Ковыршина А. И. О стабильных элементах в свободных нильпотентных группах ранга два.....	3
Новиков М. А. Связь знакоопределенности с приведением к полным квадратам пучка двух квадратичных форм.....	7

### 2. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения

Казимиров А. С., Пантелеев В. И. О классах булевых функций, порожденных максимальными мультиклонами.....	16
Шишкин Г. А. Краевые задачи интегродифференциальных уравнений Вольтерра с функциональным аргументом опережающего типа.....	23

### 3. Математическое моделирование

Балбарова Д. Г., Олзоева С. И., Садуев Н. Б. Нейросетевое моделирование в задачах прогнозирования распространения опасных инфекционных заболеваний животных.....	27
Баргуев С. Г. Вынужденные колебания системы твердых тел, установленных на консольной балке с демпфированием.....	31
Бекларян А. Л. Имитационная модель поведения толпы в среде разработки AnyLogic.....	40
Воротынцев А. В. Модель распределения ассимилятов и оптимального роста растительного покрова.....	54
Мачулис В. В. Путь между двумя пиками ресурса в математической модели миграции животных.....	62
Мижидон А. Д., Дабаева М. Ж. Установившиеся вынужденные колебания системы твердых тел, установленных на упругом стержне.....	68
Мижидон А. Д., Мадаева Е. А. Численные эксперименты по методу идентификации линейных динамических систем при гармоническом сигнале.....	76
Цыдыпов Б. Д., Аветян М. А. Нелинейная электрофизическая задача для сильноточных катодных узлов генераторов низкотемпературной плазмы.....	83

### 4. Информационные системы и технологии

Дорждэрэм М., Данеев А. В. Создание инфраструктуры единого информационного пространства Улан-Баторской железной дороги.....	89
Кравченко В. А., Ширапов Д. Ш. Построение баз знаний для решения задач методом функциональных грамматик.....	96
Курганская Г. С. Моделирование поведения агентов в облаке интернет-обучения.....	103
Попков Г. В. Методологические вопросы анализа и синтеза сетей связи с учетом чрезвычайных ситуаций.....	108
Харинов М. В., Ханьков И. Г. Комбинированный метод улучшения сегментации изображения.....	118

### 5. Управляемые системы и методы оптимизации

Булдаев А. С. Об одном методе оценки параметров квадратичных систем.....	125
Бурлаков И. Д. Численный эксперимент по анализу эффективности проекционного метода нелокального улучшения.....	132
Поплевко В. П. Оптимальное управление гиперболической системой в классе гладких управляющих воздействий.....	140
Трушкова Е. А. Глобальный метод улучшения управления для случая конечного числа разрывов траектории.....	145

## Contents

### 1. Algebra and Geometry

Kovyrshina A. I. Stable elements in free nilpotent groups of rank two.....	3
Novikov M. A. Correlation of sign definiteness with reduction to perfect square of two quadratic forms bundle.....	7

### 2. Functional Analysis and Differential Equations

Kazimirov A. S., Pantelev V. I. On the classes of Boolean functions generated by maximal multicloness.....	16
Shishkin G. A. Boundary-value problems of Volterra integer-differential equations with functional argument of advancing type.....	23

### 3. Mathematical modeling

Balbarova D. G., Olzoeva S. I., Saduev N. B. Neural network modeling in the problems of predicting the spread of dangerous infectious animal diseases.....	27
Barguev S. G. Forced oscillations of solids installed on cantilever beam with damping.....	31
Beklaryan A. L. Simulation model of crowd behavior in the IDE AnyLogic.....	40
Vorotyntsev A. V. The model of assimilates allocation and optimal growth of plant cover.....	54
Machulis V. V. A path between two peaks of resource in the mathematical model of animal migration.....	62
Mizhidon A. D., Dabaeva M. Zh. Steady-state forced oscillations of solid system mounted on elastic rod.....	68
Mizhidon A. D., Madaeva E. A. Numerical experiments by the method of identification of linear dynamical systems under harmonic signal.....	76
Tsydyпов B. D., Avetyan M. A. Nonlinear electrophysical problem for high-current cathode assemblies in generators of low-temperature plasma.....	83

### 4. Information Systems and Technology

Dorzhdereem M., Daneev A. V. Creation of common information space infrastructure of Ulaanbaatar railway.....	89
Kravchenko V. A., Shirapov D. Sh. Creation of knowledge bases for solving problems by the method of functional grammars.....	96
Kurganskaya G. S. Agents' behavior modeling in the Internet learning cloud.....	103
Popkov G. V. Methodological problems of analysis and synthesis of communication networks taking into account emergency situations.....	108
Kharinov M. V., Khanykov I. G. The combined method of improving image segmentation.....	118

### 5. Controlled systems and methods of optimization

Buldaev A. S. The method of estimating the parameters of quadratic systems.....	125
Burlakov I. D. Numerical experiment on effectiveness analysis of the projection method for nonlocal improvement.....	132
Poplevko V. P. Optimum control of hyperbolic systems in the class of smooth control actions....	140
Trushkova E. A. The global method of control improvement for the case of trajectory discontinuities finite number.....	145

## ВЕСТНИК БУРЯТСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА

Вестник БГУ включен в подписной каталог Роспечати за № 18534 и Перечень изданий Российской Федерации, где должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

На основании постановления заседания Ученого совета БГУ за № 10 от 28 мая 2009 г. в «Вестнике БГУ» в 2015 г. публикуются статьи по следующим направлениям:

### **1. Педагогика (январь)**

гл. ред. Дагбаева Нина Жамсуевна – тел. 21-04-11; 44-23-95

эл. адрес: [vestnik\\_pedagog@bsu.ru](mailto:vestnik_pedagog@bsu.ru)

### **2. Экономика. Право (февраль)**

гл. ред. Атанов Николай Иванович – тел. 21-37-44

эл. адрес: [vestnik\\_econom@bsu.ru](mailto:vestnik_econom@bsu.ru)

### **3. Химия, физика (март)**

гл. ред. Хахинов Вячеслав Викторович – тел. 43-42-58

эл. адрес: [khakhinov@mail.ru](mailto:khakhinov@mail.ru)

### **4. Биология, география (март)**

гл. ред. Доржиев Цыдып Заятуевич – тел. 21-03-48

эл. адрес: [vestnik\\_biolog@bsu.ru](mailto:vestnik_biolog@bsu.ru)

### **5. Психология, социальная работа (апрель)**

гл. ред. Базарова Татьяна Содномовна – тел. 21-26-49

эл. адрес: [decspf@mail.ru](mailto:decspf@mail.ru)

### **6. Философия, социология, политология, культурология (апрель)**

гл. ред. Осинский Иван Иосифович – тел. 21-05-62

эл. адрес: [intellige2007@rambler.ru](mailto:intellige2007@rambler.ru)

### **7. История (май)**

гл. ред. Митупов Константин Батомункич – тел. 21-64-47

эл. адрес: [vestnik\\_history@bsu.ru](mailto:vestnik_history@bsu.ru)

### **8. Востоковедение (май)**

гл. ред. Бураев Дмитрий Игнатьевич – тел. 44-25-22

эл. адрес: [gailia@mail.ru](mailto:gailia@mail.ru)

### **9. Математика, информатика (июнь)**

гл. ред. Булдаев Александр Сергеевич – тел. 21-97-57

эл. адрес: [vestnik\\_bsu\\_math@rambler.ru](mailto:vestnik_bsu_math@rambler.ru)

### **10. Филология (сентябрь)**

гл. ред. Имixelова Светлана Степановна – тел. 21-05-91

эл. адрес: [223015@mail.ru](mailto:223015@mail.ru); [map1955@mail.ru](mailto:map1955@mail.ru)

### **11. Романо-германская филология (сентябрь)**

гл. ред. Ковалева Лариса Петровна – тел. 21-17-98

эл. адрес: [klp@bsu.ru](mailto:klp@bsu.ru), [khida@mail.ru](mailto:khida@mail.ru)

### **12. Медицина, фармация (октябрь)**

гл. ред. Хитрихеев Владимир Евгеньевич – тел. 44-82-55

эл. адрес: [vestnik\\_medicine@bsu.ru](mailto:vestnik_medicine@bsu.ru)

### **13. Физкультура и спорт (октябрь)**

гл. ред. Гаськов Алексей Владимирович – тел. 21-69-89

эл. адрес: [gaskov@bsu.ru](mailto:gaskov@bsu.ru)

### **14. Философия, социология, политология, культурология (ноябрь)**

гл. ред. Осинский Иван Иосифович – тел. 21-05-62

эл. адрес: [intellige2007@rambler.ru](mailto:intellige2007@rambler.ru)

### **15. Теория и методика обучения (декабрь)**

гл. ред. Очиров Михаил Надмитович – тел. 21-97-57

эл. адрес: [vestnik\\_method@bsu.ru](mailto:vestnik_method@bsu.ru)



## Требования к оформлению статей, представляемых в «Вестник БГУ»

Отбор и редактирование публикуемых статей производятся редакционной коллегией из ведущих ученых и приглашенных специалистов.

В «Вестник БГУ» следует направлять статьи, отличающиеся высокой степенью научной новизны и значимостью. Каждая статья имеет УДК, а также письменный развернутый отзыв (рецензию) научного руководителя или научного консультанта, заверенный печатью. Рецензенты должны являться признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и иметь в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи.

Автор статьи обязан заключить лицензионный договор о предоставлении неисключительных прав на использование созданного им произведения (статьи) ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет». Образец лицензионного договора представлен на сайте БГУ.

Общие требования	Тексты представляются в электронном и печатном виде. Файл со статьей может быть на дискете или отправлен электронным письмом. На последней странице – подпись автора(ов) статьи. Название статьи и аннотация даются и на английском языке. Аннотация (авторское резюме) должна заключать от 100 до 250 слов. После аннотации дать ключевые слова (не менее семи слов) на русском и английском языках. Несоответствие между русскоязычным и англоязычным текстами не допускается. Выполнить транслитерацию русского текста литературы латиницей
Электронная копия	Текстовый редактор Microsoft Word (версии 6.0, 7.0, 97). В имени файла указывается фамилия автора
Параметры страницы	Формат А4. Поля: правое – 15 мм, левое – 25 мм, верхнее, нижнее – 20 мм
Форматирование основного текста	С нумерацией страниц. Абзацный отступ – 5 мм. Интервал – полуторный
Гарнитура шрифта	Times New Roman. Обычный размер кегля – 14 пт. Список литературы и аннотация – 12 пт
Объем статьи (ориентировочно)	Краткие сообщения – до 3 с., статьи на соискание ученой степени кандидата наук – 8–12 с., на соискание ученой степени доктора наук – 10–16 с. Название статьи должно содержать не более 10 слов
Сведения об авторах	Указываются фамилия, имя, отчество (полностью), ученая степень, звание, должность и место работы, страна, адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail (на русском и английском языках)

• Список литературы – все работы необходимо пронумеровать, в тексте ссылки на литературу оформлять в квадратных скобках.

• Материалы, не соответствующие предъявленным требованиям, к рассмотрению не принимаются. Все статьи проходят проверку в системе «Антиплагиат. ВУЗ».

• Решение о публикации статьи принимается редакционной коллегией выпуска «Вестника БГУ». Корректур авторам не высылаются, присланные материалы не возвращаются.

• Статьи принимаются в течение учебного года.

• Допустима публикация статей на английском языке, сведения об авторах, название и аннотацию которых необходимо перевести на русский язык.

• Формат журнала 60x84 1/8.

• Рисунки и графики должны иметь четкое изображение. Фотографии и рисунки в формате \*.tif или \*.jpg должны иметь разрешение не менее 300 dpi. Диаграммы, рисунки, графики должны прилагаться отдельными файлами, чтобы издательство имело возможность ввести в них правки. Математические формулы в текстах должны быть выполнены в MathType. Если работа содержит примеры на старославянском языке или языках народов, то отправить соответствующие символы.

Стоимость обработки 1 с. (формата А4) для преподавателей БГУ составляет 200 р., для остальных – 400 р. Для аспирантов – бесплатно.

Адрес: 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24 а, Издательство БГУ.

Факс (301-2)-21-05-88

Оплата производится при получении счета от бухгалтерии БГУ.